Anleitung zum Lösen mathematischer Aufgaben

alles mit || gekennzeichnete
ist rote Schrift

aus dem Bereich des Mathematikunterrichts
an Fachschulen, Volkshochschulen
und erweiterten Oberschulen

Dozent Dr. rer. nat. Steffen Koch, Leipzig

Mit 61 Bildern

fv VEB FACHBUCHVERLAG LEIPZIG

Inhaltsverzeichnis

Einführung

In diesem Büchlein sind aus dem Bereich des Mathematikunterrichts der Fach- und Oberschulen etwa 140 vollständig durchgerechnete Aufgaben enthalten, deren Lösung jeweils in Schritte unterteilt ist:

Teil **A**:	Aufgabenstellung
Teil **B**:	Erste Lösungsschritte, meist mit dem Lösungsplan, dem Ansatz und den notwendigen Vorüberlegungen
Teil **C**:	Durchführung der weiteren rechnerischen Operationen
Teil **D**:	Fixierung des Ergebnisses, Kontrolle und Formulierung der Antwort. Hier werden auch Schlußfolgerungen gezogen, Verallgemeinerungen erwähnt und Hinweise auf Ergänzungen gegeben.

Bei mehrgliedriger Problemstellung werden gelegentlich die Teilaufgaben getrennt in (B) und (C) bearbeitet.
Neben einfacheren Aufgaben sind auch solche enthalten (Kennzeichnung durch *), die ein tieferes Eindringen in das Stoffgebiet erfordern. Dem fortgeschrittenen Leser wird empfohlen, auch selbständig von der Aufgabenstellung zur Lösung zu gelangen und sein Ergebnis mit dem des Teils D zu vergleichen.
Jedem der 11 Abschnitte sind in gedrängter Form Leitsätze, Verfahrensweisen und Übersichten vorangestellt, die eine gewisse Hilfestellung für die nachfolgenden Aufgaben geben sollen. Diese Vorbetrachtungen ersetzen aber dem Leser weder die Formelsammlung noch das Lehrbuch.
Meist sind hier einführende Beispielaufgaben zu finden, deren Durchrechnung sich vor den Übungen empfiehlt.
Bereitet dem Leser ein Abschnitt Schwierigkeiten oder stellt er Lücken fest, so ist dringend anzuraten, den Abschnitt nach einem Lehrbuch zu wiederholen. Eine Auswahl geeigneter Lehrmaterialien ist im Literatur- und Quellenverzeichnis angegeben.

1. Formelumstellungen

In Technik, Physik und Mathematik sind gegenseitige Beziehungen zwischen Größen als Formeln bekannt. Es handelt sich um Gleichungen, die entweder Identitäten sind (für alle Belegungen der Variablen gelten) oder innerhalb eines bestimmten Definitionsbereiches die objektive Realität widerspiegeln. Häufig sind solche Beziehungen ihrer mathematischen Struktur nach gleichartig aufgebaut. Die Bearbeitung der völlig verschiedenen Gebieten entnommenen Gesetzmäßigkeiten erfolgt deshalb oft analog. Ein und derselbe Typ einer mathematischen Beziehung beschreibt und charakterisiert also dann physikalische oder technische Verhältnisse aus verschiedenen Sachgebieten.

Beispiele:

Typ: $\boldsymbol{A = B \cdot C}$	$s = v \cdot t$ gleichförmige Bewegung	$U = R \cdot I$ OHMsches Gesetz	$v = r \cdot \omega$ Drehbewegung	$F_R = \mu \cdot F_N$ Reibung
	$\sin\alpha = n \sin\beta$ Brechungsgesetz Optik	$\Phi = I \cdot \omega$ Lichtstrom	$RT = p \cdot V$ Gasgleichung	$u = \pi \cdot d$ Kreisumfang
Typ: $\boldsymbol{A = B \cdot C^2}$	$a_r = \omega \cdot r^2$ Radialbeschleunigung	$E = m \cdot c^2$ Gleichung von EINSTEIN	$J = \frac{\varrho}{2} cu^2$ Schallstärke	$s = \frac{g}{2} \cdot t^2$ Freier Fall
	$F_z = \frac{m}{r} \cdot v^2$ Zentrifugalkraft	$A = \pi \cdot r^2$ Kreisfläche	$P = R \cdot I^2$ Elektrische Leistung	$A_1 = A_0 \cdot k^2$ Ähnlichkeit bei Flächen
Typ: $\boldsymbol{A = B \cdot \sqrt{C}}$	$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$ Periodendauer beim Fadenpendel	$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}$ Periodendauer physikalisches Pendel	$c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}$ Schallgeschwindigkeit	$d = a \cdot \sqrt{2}$ Quadratdiagonale
Typ: $\boldsymbol{A = \frac{B \cdot C}{D \pm E}}$	$\varrho = \frac{\gamma_F \cdot G}{G - G_F}$ Dichtebestimmung	$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ KIRCHHOFFsches Gesetz	$f = \frac{a \cdot b}{a + b}$ Brennweite beim Spiegel	$Z = \frac{\omega L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2}$ Betrag des Widerstandsoperators Parallelschaltung
Typ: $\boldsymbol{A = B \frac{C \cdot D}{E^2}}$	$F = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ Anziehung von Massen	$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{s^2}$ COULOMB-Gesetz	$F = c \frac{m_1 \cdot m_2}{e^2}$ Magnetisches Feld	$E = \frac{I \cdot \cos\varepsilon}{r^2}$ Beleuchtungsstärke
Typ: $\boldsymbol{A = B\,(1 + C)}$	$l = l_0\,(1 + \alpha \Delta t)$ Längenausdehnung	$V = V_0\,(1 + \gamma \Delta t)$ Volumenausdehnung	$R = R_0\,(1 + \alpha t)$ Widerstand in Abhängigkeit von der Temperatur	$a_n - a_1 = d\,(n - 1)$ arithmetische Folge

Die Beziehungen (Gleichungen, Formeln) enthalten in den Termen Variablen, die voneinander abhängen.

Die Beziehung $s = v \cdot t$
(Weg = Geschwindigkeit · Zeit)

kann als Funktionsgleichung

$$s(t) = v \cdot t \qquad [s \text{ und } t \text{ variabel, } v \text{ konstant}]$$

dargestellt werden.
Bedeutung: Der zurückgelegte Weg s ist bei gleichförmig geradliniger Bewegung von der Zeit t abhängig.

Entsprechend kann man schreiben:
$U(R) = I \cdot R$ und $v(r) = \omega \cdot r$ und $F_R(F_N) = \mu \cdot F_N$ und $u(d) = \pi \cdot d$ usw. Der Typ einer solchen Abhängigkeit wird mathematisch durch die verallgemeinernde Symbolik $f(x) = \ldots$ beschrieben.
In der Regel ist in einer Formel eine bestimmte Variable gesucht (unbekannt), die anderen Größen sind gegeben. Nicht immer ist jedoch die unbekannte Variable in Abhängigkeit von den anderen explizit dargestellt. Dann muß die Formel erst **nach einer bestimmten (unbekannten) Variablen aufgelöst werden.**

Das geschieht in folgender Weise:

Schritt	Prinzip	Muster
A	**Aufgabenstellung** (sachgebietsbezogen)	In einer Batterieschaltung sind n Elemente in Reihe (hintereinander) geschaltet. Jedes Element hat die Spannung U und den inneren Widerstand R_i. Die Gesamtstromstärke ist I. Der Außenwiderstand R_a ist gesucht.
	Aufstellen der Formel (bekannt oder gegeben, evtl. aus der Formelsammlung zu entnehmen)	$I = \frac{n \cdot U}{n \cdot R_i + R_a}$
	Formulierung der mathematischen Aufgabe (Kennzeichnung der gesuchten Größe)	$I = \frac{n \cdot U}{n \cdot R_i + \boldsymbol{R_a}}$ ist nach R_a aufzulösen.
B	**Beschreibung der mathematischen Terme** (Lösungsplan)	Die gesuchte Variable steht als Summand im Nenner eines Bruches.
	Elementare Operationen zur Vereinfachung (falls erforderlich, Wurzeln oder Brüche beseitigen – falls unbek. Variable innerhalb eines durch Klammern eingeschlossenen Terms, Auflösen desselben oft zweckmäßig)	$I(n \cdot R_i + R_a) = n \cdot U$ $I \cdot n \cdot R_i + I \cdot R_a = n \cdot U$

C	**Isolieren der unbekannten Variablen** (Ziel: Terme mit der unbekannten Variablen stehen isoliert auf einer Seite der Beziehung)	$I \cdot R_a = n \cdot U - I \cdot n \cdot R_i$
	Division der gesamten Gleichung durch den Koeffizienten (Beiwert) der unbekannten Variablen (Zuvor ist gegebenenfalls die unbekannte Variable auszuheben / auszuklammern)	$R_a = \frac{n \cdot U - I \cdot n \cdot R_i}{I}$
D	**Bessere Gestaltung der gefundenen Formel**	$R_a = n\frac{U}{I} - n\,R_i$ oder: $R_a = n\left(\frac{U}{I} - R_i\right)$
	Deutung und Diskussion	Der Außenwiderstand kann bestimmt werden durch die mit der Anzahl der Elemente multiplizierten Differenz von Gesamtwiderstand und Innenwiderstand.

Beachten Sie:

Bei der Umstellung von Formeln gelten die Gesetzmäßigkeiten des Lösens von Gleichungen. Es dürfen also nur **äquivalente Umformungen** vorgenommen werden. Grundsätzlich darf auf beiden Seiten einer Gleichheitsbeziehung nur die gleiche Operation ausgeführt werden,

und zwar:

Addition oder Subtraktion eines Terms,
Multiplikation mit einem von Null verschiedenen Term,
Division durch einen von Null verschiedenen Term,
Potenzieren mit ungeradzahligem Exponenten,
Radizieren, sofern auf beiden Seiten positive Größen stehen.
Eine Division durch 0 oder durch einen Term, der den Wert 0 annehmen kann, ist nicht zulässig.

1.1. Die im Beispiel genannte Formel

$$I = \frac{n\,U}{n\,R_i + R_a}$$

ist nach n aufzulösen.
(Gesucht ist die Anzahl der in Reihe geschalteten Elemente.)

1.2. Die unter dem Namen „Geradengleichung" oder „Linearfunktion" bekannte Beziehung

$$y = a_0 + a_1 x$$

ist nach x aufzulösen.

1.3. Für die Berechnung des Widerstandswertes eines Drahtes gilt die Formel $R = \varrho\,\frac{l}{A}$, wobei ϱ eine Materialkonstante (spez. Widerstand), A der Leitungsquerschnitt und l die Länge der Leitung ist.
Für A ist πr^2 einzusetzen. Die Formel ist nach dem Radius des Leitungsdrahtes aufzulösen.

1.4. Die Formel der Richmannschen Mischungsregel

$$m_1 c_1\,(t - t_1) = m_2 c_2\,(t_2 - t)$$

ist nach der Mischtemperatur t aufzulösen.

1.5. Die Gleichung

$$\frac{1+m}{1-m} = \frac{a}{b}$$

ist nach m aufzulösen.

1.6. Im gleichseitigen Dreieck gilt für die Höhe h und die Seitenlänge a die Beziehung:

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

Die Seitenlänge a soll in Abhängigkeit von der Höhe h angegeben werden.

1.7. Für einen Kreis gelten bekanntlich die Formeln $A = \pi r^2$ für die Kreisfläche und $u = 2\pi r$ für den Kreisumfang.
Lösen Sie beide Formeln nach r auf. Durch Gleichsetzung ist anschließend eine Beziehung zwischen A und u herzustellen, die von r unabhängig ist.

1.8. Die Beziehung

$$v = \sqrt{t+1}$$

ist nach t aufzulösen.

***1.9.** Die Formel

$$s_n = a_1\,\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

gilt für die Summe einer geometrischen Reihe. (Der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder ist konstant.)
Die Beziehung ist nach der Gliederzahl n aufzulösen.

1.1. Die gesuchte Variable steht im Zähler und in einem Summanden des Nenners eines Bruches.

$InR_i + IR_a = nU$ (nach Multiplikation mit dem gesamten Nenner)

1.2. Die gesuchte Variable ist Faktor in einem Summanden der rechten Seite.

$y - a_0 = a_1x$ oder $a_1x = y - a_0$

1.3. Es ist zunächst der Ausdruck für A einzusetzen. Die gesuchte Variable r steht dann in quadratischer Form im Nenner eines Bruches.

$R = \varrho \dfrac{l}{\pi r^2}$ wegen $A = \pi r^2$

Mit πr^2 multipliziert:

$R\pi r^2 = \varrho l$

1.4. Die gesuchte Variable t tritt links- und rechtsseitig als Glied einer Differenz auf, die mit verschiedenen Faktoren multipliziert ist.

$$m_1c_1t - m_1c_1t_1 = m_2c_2t_2 - m_2c_2t$$

1.5. Die gesuchte Variable m steht im Zähler und im Nenner eines Bruches in einer Summe bzw. Differenz.

$b\,(1 + m) = a\,(1 - m)$

$b + bm \;= a - am$

1.6. Die gesuchte Variable a ist Teil eines Produktes, das eine irrationale Zahl enthält. Es wird mit 2 multipliziert, durch $\sqrt{3}$ dividiert. Anschließend werden die Seiten vertauscht.

$$\frac{2h}{\sqrt{3}} = a; \quad a = \frac{2h}{\sqrt{3}}$$

1.7. Beide Beziehungen werden durch die Koeffizienten von r bzw. r^2 dividiert.

$$\frac{A}{\pi} = r^2 \qquad \frac{u}{2\pi} = r$$

1.8. Die gesuchte Variable t tritt als Summand im Radikanden einer Wurzel auf. Es muß $t \geqq -1$ gelten. Zweckmäßigerweise wird zunächst quadriert. $v^2 = t + 1$

1.9. Die gesuchte Variable n tritt im Exponenten eines Gliedes im Zähler eines Bruchs auf. Multiplikation mit $(q-1)$, Division durch a_1.

$$\frac{s_n\,(q-1)}{a_1} = q^n - 1$$

1.1. Glieder mit der unbekannten Variablen linksseitig zusammengefaßt.

$$InR_i - nU = -IR_a$$
$$n\,(U - IR_i) = IR_a$$

Division durch die Klammer.

$$n = \frac{IR_a}{U - IR_i}$$

1.2. Man dividiere durch a_1: $\quad x = \dfrac{y - a_0}{a_1}$

1.3. Zunächst ist durch $R\pi$ zu dividieren. $\quad r^2 = \dfrac{\varrho l}{R\pi}$

Zur Auflösung nach r ist die Wurzel zu ziehen: $\quad r = \pm\sqrt{\dfrac{\varrho l}{R\pi}}$

Es ist aber nur der positive Wert verwendbar.

1.4. Glieder mit der unbekannten Variablen linksseitig zusammenfassen.

$$(m_1c_1 + m_2c_2)\,t = m_1c_1t_1 + m_2c_2t_2$$

$$t = \frac{m_1c_1t_1 + m_2c_2t_2}{m_1c_1 + m_2c_2}$$

1.5. Glieder mit m linksseitig zusammenfassen.

$$(a + b)\,m = a - b$$

$$m = \frac{a - b}{a + b}$$

1.6. Der entstandene Nenner sollte rational gemacht werden (Erweiterung mit $\sqrt{3}$).

$$a = \frac{2h\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{2}{3}h\sqrt{3}$$

1.7. Zwei Wege möglich!

(1) Linksseitig radizieren und r gleichsetzen.

$$\sqrt{\frac{A}{\pi}} = r = \frac{u}{2\pi}$$

$$\frac{A}{\pi} = \frac{u^2}{4\pi^2}$$

(2) Rechte Gleichung quadrieren und r^2 gleichsetzen.

$$\frac{A}{\pi} = r^2 = \frac{u^2}{4\pi^2}$$

1.8. $t = v^2 - 1$

1.9. Man addiere beidseitig 1. Auch hier ist Logarithmieren angezeigt.

$$\frac{s_n\,(q-1) + a_1}{a_1} = q^n \Rightarrow \log\frac{s_n\,(q-1) + a_1}{a_1} = n\log q$$

Es können hier Logarithmen einer beliebigen Basis verwendet werden. In der Regel wird man die dekadischen Logarithmen (Basis 10) nehmen.

D

1.1. Die Anzahl der Elemente läßt sich bei Kenntnis von I, U, R_a und R_i nach $n = \frac{IR_a}{U - IR_i}$ ermitteln.

Eine Division von Zähler und Nenner durch I würde nur zu nebenstehender Form führen, die physikalisch wenig aussagekräftig ist.
$$n = \frac{R_a}{\frac{U}{I} - R_i}$$

1.2. Die Darstellung in Form eines Quotienten ist möglich $x = \frac{y - a_0}{a_1}$, aber wenig aussagekräftig. Aus der Form $x = \frac{1}{a_1} y - \frac{a_0}{a_1}$ erkennt man, daß auch x linear von y abhängt.

1.3. Berücksichtigt man in der Lösung $r = \sqrt{\frac{\varrho l}{R\pi}}$, daß π eine Zahlenkonstante und ϱ eine (bekannte) Materialkonstante ist, so ist die Schreibweise $r = \sqrt{\frac{\varrho}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{l}{R}} = c\sqrt{\frac{l}{R}}$ besser.

1.4. Die Mischtemperatur t ergibt sich als ein Bruch:

$$t = \frac{m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}.$$

Für $t_1 = t_2$ ergibt sich nach Kürzen $t = t_1 = t_2$ (trivialer Fall).

1.5. Die Größe m ist der Quotient aus Differenz und Summe von a und b:

$$m = \frac{a - b}{a + b}$$

1.6. Im gleichseitigen Dreieck hängt gemäß $a = \frac{2\sqrt{3}}{3} h$ die Seitenlänge linear von der Höhe ab (ist ihr direkt proportional).
Der funktionale Charakter läßt sich durch $a = f(h)$ andeuten. Die Schreibweise $a(h) = \frac{2\sqrt{3}}{3} h$ ist nur als „Abkürzung" zu betrachten!

1.7. Die Abhängigkeit zwischen A und u des Kreises kann durch $A = \frac{1}{4\pi} u^2$ oder $u = 2\sqrt{A\pi}$ dargestellt werden. Die Fläche wächst mit dem Quadrat des Umfangs!

1.8. t ist in quadratischer Weise von v abhängig.
$t = v^2 - 1$

1.9. Die Anzahl der Glieder n läßt sich nach der Formel

$$n = \log \frac{s_n (q - 1) + a_1}{a_1} : \log q$$

bestimmen. Man beachte, daß $n \in N$ sein muß. Zuweilen muß wegen der Ungenauigkeit der Tafelwerte etwas gerundet werden.

Einige Bemerkungen zum Lösungsplan

Bereits bei den Aufgaben des Abschnitts 1. wird der Leser festgestellt haben, daß beim Lösen mathematischer Aufgaben nichts dem Zufall überlassen bleiben sollte, sondern planvoll und zielgerichtet vorgegangen werden muß. In diesem Büchlein wird in der Regel jeweils nur *ein* Lösungsweg vorgeschlagen. Man überzeuge sich jedoch an Hand folgender Aufgabe, daß meist mehrere Wege zum Ziel führen. Jedem dieser Wege liegt ein gewisser Plan, ein gewisses Programm zugrunde, dessen wesentlicher Inhalt die Erreichung eines Teilzieles ist. Nicht nur dem Anfänger fällt es oft schwer, sich sofort für den elegantesten oder rentabelsten Lösungsweg zu entscheiden. Zu einem Wechsel auf einen anderen Lösungsplan während der Arbeit ist nur dann zu raten, wenn der eingeschlagene Weg nachweisbar nicht zum Ziel führen kann. Im übrigen wird derjenige stets im Vorteil sein, der den größeren Vorrat an Lösungsverfahren parat hat.

Beispiel:

Der Ausdruck $A = \frac{a - b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ soll vereinfacht werden.

Lösungsweg 1 (Programm: Es handelt sich um zwei Brüche, die zunächst gleichnamig zu machen sind.)
Hauptnenner: $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$ (binom. Form)
Nach Erweiterung ergibt sich: $A = \frac{(a - b)(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - (a - b)(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}$

Daraus folgt: $A = \frac{2\sqrt{b}(a - b)}{a - b} = \underline{\underline{2\sqrt{b}}}$

Lösungsweg 2 (Programm: Die Zähler beider Brüche sind gleich, infolgedessen sollte $(a - b)$ ausgeklammert werden.)

Ausheben: $A = (a - b)\left(\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}\right)$

Gleichnamigmachen: $A = (a - b)\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - (\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}$

und weiter: $A = \underline{\underline{2\sqrt{b}}}$

Lösungsweg 3 (Programm: Die beiden Brüche enthalten irrationale Nenner, die Nenner sollten also zunächst rational gemacht werden.)

Rationalmachen:

$$A = \frac{(a - b)(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} - \frac{(a - b)(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})}$$

Die beiden Nenner sind gleich groß, nämlich $(a - b)$. Im Zähler wird $(a - b)$ ausgehoben und gegen den Nenner gekürzt. Es bleibt $\underline{\underline{A = 2\sqrt{b}}}$.

Lösungsweg 4 (Programm: Man erkennt, daß die Ausdrücke in Zähler und Nenner Bestandteile der dritten binomischen Formel sind. Es gilt $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$. Die beiden Zähler sind in ein Produkt zu verwandeln.)

Aufspalten der Zähler: $A=\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

Kürzen: $A=(\sqrt{a}+\sqrt{b})-(\sqrt{a}-\sqrt{b})$
und weiter: $\underline{\underline{A=2\sqrt{b}}}$

Lösungsweg 5 (Programm: Das Rechnen mit den Wurzeln erscheint unbequem. Man führt eine Substitution durch: $u=\sqrt{a}$ und $v=\sqrt{b}$.)
Neue Form des Ausdrucks nach Substitution:

$$A=\frac{u^2-v^2}{u-v}-\frac{u^2-v^2}{u+v}$$

Umformung der Zähler: $A=\dfrac{(u-v)(u+v)}{u-v}-\dfrac{(u-v)(u+v)}{u+v}$

Kürzen: $A=2v$

Die Substitution wird rückgängig gemacht: $\underline{\underline{A=2\sqrt{b}}}$.

Es gibt noch weitere Lösungswege. Alle genannten – doch recht unterschiedlichen – Methoden führen zum Ziel. Nachträglich kann sogar eingeschätzt werden, daß dabei keine großen Unterschiede im Arbeitsaufwand auftreten.
Nachdem diese Aufgabe gelöst ist, sollte man auf die Deutung des Ergebnisses nicht verzichten. Zur – kaum vorauszusagenden – Überraschung hängt A nicht von a ab, sondern nur von b: symbolisch ausgedrückt durch $A=f(b)$.
Die Werte, die A für bestimmte Größen a und b annimmt (z. B. für $a=1013{,}65$ und $b=6{,}25$), lassen sich mit der Darstellung $A=2\sqrt{b}$ viel schneller berechnen als in der Ausgangsform.
Bei der Aufgabenstellung sollte übrigens vermerkt werden, daß sowohl a als auch b nicht negativ sein müssen!

2. Einige Bemerkungen zur Mengenlehre

Die Symbolik der Mengenlehre hat sich weitgehend in allen Bereichen der modernen Schulmathematik durchgesetzt. Sie zeichnet sich durch Kürze und Abstraktion aus. Dem Anfänger – der sich die Grundlagen der Mengenlehre mittels der einschlägigen Literatur aneignen sollte – bereiten aber häufig die elementaren Mengenoperationen und die Darstellung von Intervallen Schwierigkeiten. Dabei sollte beachtet werden, daß die Mengen in den Lehrbüchern nicht immer mit den gleichen Symbolen gekennzeichnet werden.

(In der folgenden Übersicht werden die an Fachschulen üblichen Symbole rot ausgedruckt.)

Name der Menge	Symbole nicht standardisiert	in der Schulmathem. üblich	sonstige Symbolik	Folgende Rechenoperationen sind innerhalb der Menge unbeschränkt ausführbar					
				Addition	Subtraktion	Multiplikation	Division, außer durch 0	Potenzieren	Radizieren von pos. Größen
Leere Menge		$\{\,\}$, $\emptyset$							
Einermenge aus Element 0		$\{0\}$		ja	ja	ja	n	n	n
Einermenge aus Element 1		$\{1\}$		n	n	ja	ja	ja	ja
Zweiermenge aus den Elementen 0 und 1		$\{0; 1\}$		n	n	ja	ja	ja	ja
Positive ungerade Zahlen	U, Un^+			n	n	ja	n	ja	n
Positive gerade Zahlen	Gr^+			ja	n	ja	n	ja	n
Natürliche Zahlen (ohne Null)	N^+	$\boldsymbol{N}$	$N\setminus\{0\}$	ja	n	ja	n	ja	n
Natürliche Zahlen mit Null		$\boldsymbol{N}$	$\mathfrak{N}$, $\dot{N}$ (ny)	ja	n	ja	n	ja	n
Ganze Zahlen		$\boldsymbol{G}$	$\mathfrak{G}$, Γ (gamma)	ja	ja	ja	n	ja	n
Ganze, negative Zahlen	$\boldsymbol{G}^-$			ja	n	n	n	n	n
Primzahlen	Pr			n	n	n	n	n	n
Gebrochene (pos.) Zahlen		R^+	$\boldsymbol{P}^+$	ja	n	ja	ja	ja	n
Rationale Zahlen		R	$\boldsymbol{P}$ (rho) $\mathfrak{P}$, K	ja	ja	ja	ja	ja	n
Nichtrationale Zahlen	$\boldsymbol{I}$			n	n	n	n	n	ja
Reelle Zahlen		P	$\boldsymbol{R}$, Δ (delta) $\mathfrak{R}$	ja	ja	ja	ja	ja	ja
Komplexe Zahlen			Z, K, $\mathfrak{Z}$						

Weitere Symbole

$2 \in N$:	2 ist Element von N
$0{,}5 \notin G$:	0,5 ist nicht Element von G
$N \subset G$:	N ist Teilmenge von G N ist enthalten in G Alle Elemente von N sind auch Elemente von G
$A \subseteqq B$:	A ist Teilmenge von B oder gleich B (A ist echte oder unechte Teilmenge von B) [Verwechseln Sie diese Zeichen nicht mit $<$ oder $\leqq$!]
$A = B$:	Beide Mengen sind gleich. Sie enthalten genau dieselben Elemente. (Die Reihenfolge der Elemente bleibt unberücksichtigt.)

Die leere Menge Ø und die Menge selbst ist stets Teilmenge einer Menge. Man spricht von **unechten** Teilmengen.

Angabe von Intervallen

Moderne Schreibweise (Mengenlehre)	herkömmliche Schreibweise mit Ungleichheitszeichen	Sprechweise
$[a; b]$ oder $< a; b >$	$a \leqq x \leqq b$	beiderseits abgeschlossenes Intervall
$(c; d)$	$c < x < d$	beiderseits offenes Intervall
$(m; n]$	$m < x \leqq n$	linksseitig offenes Intervall
$(-\infty; -2) \cup (2; \infty)$	$\lvert x \rvert > 2$	zwei Intervalle zusammengefaßt
$(-\infty; -8] \cup [12; \infty)$	$\lvert x - 2 \rvert \leqq$ $\leqq 10$	dto.

Man beachte, daß einige der genannten Zeichen in verschiedenen Bereichen der Mathematik zum Teil recht unterschiedliche Bedeutungen haben. Insbesondere beachte man:

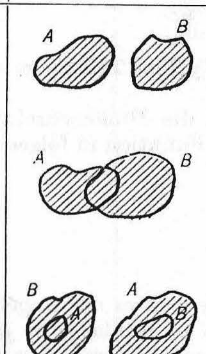
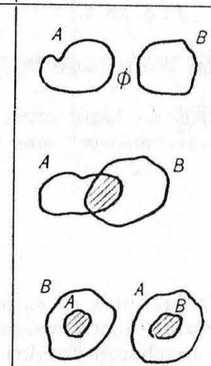
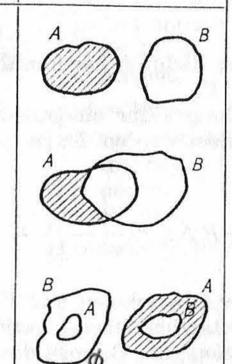
$(2; 3)$	Koordinaten eines Punktes (Zahlenpaar) oder beidseitig offenes Intervall
$\{2; 3\}$	Menge von zwei Elementen
$\ldots < 4; \cdots$	linke geschlossene Begrenzung eines Intervalls
$\ldots < 4 \cdots$	oder „Kleiner-als"-Beziehung.

Für die Ausführung von Mengenoperationen werden einheitlich die Symbole $\cup$, $\cap$ und $\setminus$ verwendet. (Vgl. Übersicht auf der folgenden Seite.)

Mittels dieser Symbole werden vor allem folgende Tatbestände verdeutlicht:

$K_1 \cap K_2 = S$:	Angabe des Schnittpunkts oder der Schnittpunkte zweier Kurven
$F_1 \cap F_2 = M$:	Gemeinsame Wertepaare zweier Funktionen („Lösungen" x und y eines Gleichungssystems)
L, auch $E = \{\cdots\}$:	Lösungs- oder Erfüllungsmenge einer Gleichung

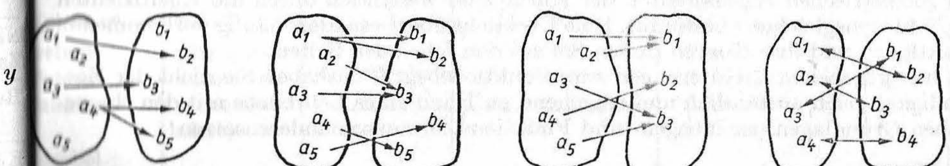
Übersicht über die Mengenoperationen

Symbolik	$A \cup B$	$A \cap B$	$A \setminus B$	$A \times B$
Bezeichnung	Vereinigungsmenge	Durchschnittsmenge	Differenzmenge	Mengen-Produkt
Erfaßt werden alle Elemente, die … … liegen	entweder in A oder in B oder in beiden …	sowohl in A als auch in B …	zwar in A, aber nicht in B …	Menge aller möglichen Zahlenpaare aus je einem Element von A und einem von B
Bilddarstellung (Punktmengen)				Eine Abbildung einer Menge auf eine andere (Funktion) ist Teilmenge des Mengenprodukts.
Beziehungen	$A \cup B =$ $\Rightarrow B \subset A$	$A \cap B = O$ $\Rightarrow A, B$ liegen „diskret"	$A \setminus B = O$ $\Rightarrow A \subset B$ $A \setminus B = A$ $\Rightarrow A, B$ diskret	

Abbildungen von Mengen

Gegeben sind zwei Mengen A und B.

Eine **Abbildung aus** der Menge A **in** die Menge B liegt vor, wenn eine Vorschrift gewissen Elementen aus A gewisse Elemente in B zuordnet. Werden dabei **alle** Elemente von A und B erfaßt, so spricht man von einer Abbildung **von** A **auf** B.



Bei einer **eindeutigen Abbildung** wird **jedem** Element $a \in A$ **ein und nur ein** Element $b \in B$ zugeordnet.
Die Abbildung ist **eineindeutig** (oder umkehrbar eindeutig), wenn dabei auch jedem Element $b \in B$ ein und nur ein Element $a \in A$ zugeordnet werden kann.

Funktionen

Arbeiten Sie von Anfang an mit der **mengentheoretischen Definition** der Funktion!

> Eine Funktion ist eine eindeutige Abbildung aus der Zahlenmenge X in die Zahlenmenge Y, d. h., jedem $x \in X$ ist ein (und nur ein) Element $y \in Y$ zugeordnet.

$$f : X \Rightarrow Y$$

Die Menge aller dadurch bestimmten Wertepaare $(x_n ; y_n)$ ist Teilmenge des Mengenprodukts $X \times Y$.
Ist die Abbildung sogar eineindeutig, so kann auch die Umkehrfunktion (inverse Funktion) gebildet werden. Es ist erstrebenswert, eine Funktion in folgender Form zu kennzeichnen:

$$f = \left\{(x ; y) \mid x \in R \wedge x \Rightarrow \frac{x}{x^2+1}\right\}.^{1)}$$

Im Bereich der Oberschulen und Fachschulen ist es jedoch in der Regel üblich, aus Zweckmäßigkeitsgründen eine verkürzte Schreibweise zu wählen; für die genannte spezielle Funktion zum Beispiel die zugehörige Funktionsgleichung

$$(y =)\ f(x) = \frac{x}{x^2+1} \qquad \text{mit dem Vermerk: } x \text{ reell.}$$

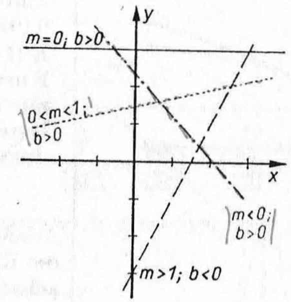
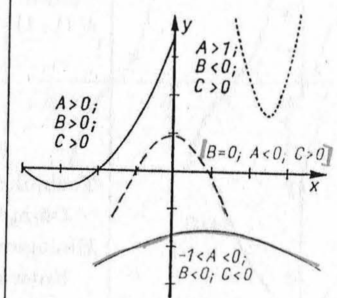
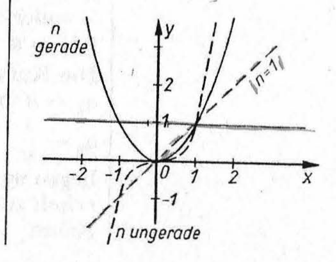
In diesem Büchlein wird diese dem Schüler vertraute Form der Funktionskennzeichnung verwendet. Die $f(x)$ stellen nur die Funktionswerte dar.
Beim **Graph** einer Funktion werden Definitionsbereich und Wertevorrat unmittelbar zeichnerisch dargestellt und die Abbildung durch Pfeile veranschaulicht.
Man begnügt sich gelegentlich mit einer Wertetafel (Wertetabelle), die auszugsweise einige Zuordnungen angibt.
Die graphische Darstellung einer Funktion wird im allgemeinen als **Kurve** bezeichnet. Dabei sind die Koordinaten der Kurvenpunkte zugleich die Wertepaare der Abbildung. In der Schulmathematik ist gegenwärtig statt Kurve auch die Bezeichnung **Bild der Funktion** üblich.
Die geometrischen Eigenschaften der Kurve sind wesentlich durch die Koeffizienten der Funktionsgleichung bestimmt. Eine Übersicht über besonders häufig vorkommende Funktionen und ihre Kurven finden Sie auf den folgenden Seiten.
Die hier gegebenen Erläuterungen zum Funktionsbegriff entheben Sie nicht der Notwendigkeit, sich ausführlich und eingehend an Hand eines Lehrbuchs mit den theoretischen Grundlagen der Mengen- und Funktionslehre auseinanderzusetzen!

1) Statt f wird zuweilen auch F verwendet. R ist hier die Menge der reellen Zahlen. Das Zeichen $\wedge$ fordert die gleichzeitige Berücksichtigung beider Forderungen.

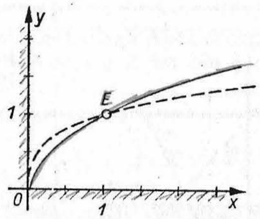
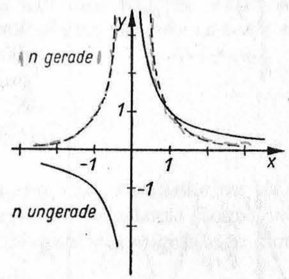
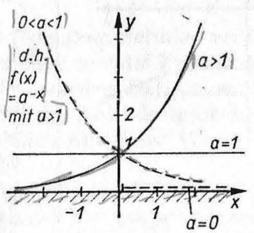
Übersicht über einige Funktionen und deren Bilder

Zu den Abschnitten: Mengenlehre und Kurvendiskussion

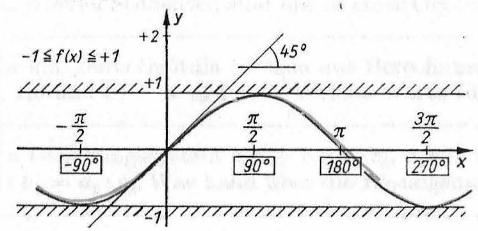
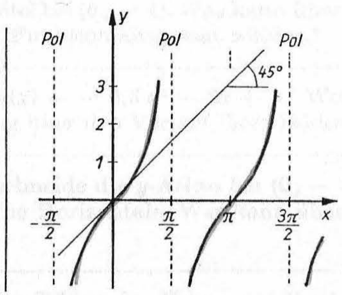
1

$y = f(x)$ Name der Funktion Name der Kurve	Beschränkungen	Bild der Funktion (Kurve)	Bemerkungen	Nullstellen	y-Werte des Schnittpunkts mit der y-Achse
$f(x) = mx + b$ **Lineare Funktion** Geraden	$m, b, x \in P$ (reell)		m kennzeichnet den Anstieg $m < 0$ fallend $m > 0$ steigend $m > 1$ stärker als 45° ansteigend $m = \tan\alpha$ b kennzeichnet den Schnittpunkt $S_y\ (0; b)$ mit der y-Achse	→ lin. Gleich.	b
$f(x) = Ax^2 + Bx + C$ **Quadratische Funktion** Parabeln	$A \neq 0$ $A, B, C, x \in P$		A kennzeichnet die Öffnung $A > 0$ nach oben $A < 0$ nach unten $\vert A \vert < 1$ „flach" B kennzeichnet die Rechts- bzw. Linkslage d. Scheitels C kennzeichnet den Schnittpunkt mit der y-Achse	→ quadr. Gleich.	C
$f(x) = x^n$ (reine) **Potenzfunktion** parabelähnlich	$n \in N$ (für $n = 0$ an $x = 0$ nicht definiert)		Gemeinsame Punkte 0 (0; 0) (außer $n = 0$) E (1; 1)	0 außer für $n = 0$	0 außer für $n = 0$

Fortsetzung:

$= f(x)$ Name der Funktion Name der Kurve	Beschränkungen	Bild der Funktion (Kurve)	Bemerkungen	Nullstellen	y-Werte des Schnittpunkts mit der y-Achse
$(x) = \sqrt[n]{x}$ **Wurzelfunktion** |Parabelähnlich, nur ein Ast!|	$n \in N \setminus \{0\}$ für $x < 0$ nicht definiert $n = 1$ uninteressant		Gemeinsame Punkte 0 (0; 0) E (1; 1) Kurve verläuft nur im ersten Quadranten	0	0
$(x) = \frac{1}{x^n}$ **Reziproke Funktion** einfache gebrochenrationale Funktion) |Hyperbeln|	$n \in N \setminus \{0\}$ für $x = 0$ nicht definiert (Pol) $n = 0$ uninteressant		Annäherung an die Koordinatenachsen (Asymptoten) Gemeinsame Punkte E (1; 1)	keine	keine
$(x) = a^x$ **Exponentialfunktion** |Exponentialkurven|	$a \geqq 0$ Für $a = 0$ an $x \leqq 0$ nicht definiert		Technik: Dämpfung Biologie: Entwicklung Physik: radioaktiver Zerfall $f(0) = 1$ außer $a = 0$ $f(1) = a$ Die Kurven zu $a_1 = a$ und $a_2 = \frac{1}{a}$ liegen symmetrisch zur y-Achse	keine (außer $a = 0$)	1 (außer $a = 0$)

Fortsetzung:

$= f(x)$ Name der Funktion Name der Kurve	Beschränkungen	Bild der Funktion (Kurve)	Bemerkungen	Nullstellen	y-Werte des Schnittpunkts mit der y-Achse
$(x) = \sin x$ **Sinusfunktion** |Sinuskurve|	$-1 \leqq f(x) \leqq +1$		Periodizität 2π $f(x) = f(x + 2k\pi)$ Anstieg im Ursprung 45° Maxima bei $x = \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi$ Minima bei $x = \frac{3\pi}{2} \pm 2k\pi$	$0 \pm k\pi$	0
$(x) = \tan x$ **Tangensfunktion** Tangenskurve|	nicht definiert (Pol) für $x = \frac{(2k-1)\pi}{2}$		Periodizität 2π Pole bei $x = \frac{(2k-1)\pi}{2}$ $f(x) = 1$ für $x = \frac{\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$; ...	$0 \pm k\pi$	0

2.1. Die Menge A bestehe aus den Produktivkräften, die Menge B aus den Produktionsinstrumenten einer bestimmten gesellschaftlichen Epoche. Welche Relation besteht zwischen beiden Mengen?

2.2. Gegeben seien Pr Menge der Primzahlen und U Menge der ungeraden positiven Zahlen. Bestimmen Sie $Pr \cup U$; $Pr \cap U$; $Pr \setminus U$ und $U \setminus Pr$.

2.3. In einer Fernstudiengruppe von 39 Studenten gehören 11 der FDJ, 19 dem FDGB und 23 der DSF an. Ein Student ist Mitglied aller drei Organisationen, 4 weitere sind gleichzeitig in der FDJ und der DSF organisiert, 7 sind im FDGB und in der DSF, aber nicht in der FDJ, 2 gehören nur dem FDGB und der FDJ an. Wieviel Studenten sind nur in einer Organisation, wie viele in keiner?

2.4. Für ein Teilverhältnis λ folgen aus Berechnungen zwei Bedingungen: a) $|\lambda| \geqq 1{,}5$ und b) $-4 \leqq \lambda < 2$. Welche Werte für λ sind möglich?

2.5. Ein Gleichungssystem $a_1x + b_1y = c_1$, $a_2x + b_2y = c_2$ hat die Eigenschaft $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$. Was kann über die Lösungsmenge ausgesagt werden?

2.6. Eine Parabel verlaufe sehr „flach“, sei nach oben geöffnet und schneide die y-Achse im Scheitel bei $(0; -4)$. Was kann über die Koeffizienten der zugehörigen quadratischen Funktion ausgesagt werden?

2.7. Gegeben ist $f(x) = -0{,}5\,x^2 - 2x + 3$. Welche qualitativen Aussagen sind ohne Rechnung über den Verlauf ihres Bildes möglich?

2.8. Eine Gerade schneide die y-Achse bei $(0; -3{,}5)$ und falle unter einem Winkel $< 45°$ gegen die Horizontale. Was kann über die Koeffizienten m und b ausgesagt werden?

2.9. Der Verlauf der Bilder der Exponentialfunktionen $f(x) = 2^x$, $g(x) = 0{,}5^x$ und $h(x) = 2^{-x}$ ist zu vergleichen.

2.10. Geben Sie die Intervalle I_1; I_2 und I_3 an, für die mit $x \in P$ gilt: $x + 2 > 3$; $x + 7 \geqq 10$; $3 < x - 2 \leqq 4$.

B

2.1. Die Produktionsinstrumente sind bekanntlich ein Teil der Produktivkräfte. Überlegen Sie auch, was noch zu den Produktivkräften gehört.

2.2. Man notiert sich zunächst die ersten Glieder der vorkommenden Mengen
$Pr = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; \cdots\}$
$U = \{1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; \cdots\}$ und stellt ferner fest: 2 ist die einzige gerade Primzahl.

2.3. In der FDJ sind 11, davon 4 auch in DSF, 2 auch im FDGB und 1 weiterer auch in DSF und FDGB.
Im FDGB sind 19, davon 7 auch in DSF, 2 auch in FDJ, 1 weiterer auch in DSF und FDJ.
In DSF sind 23, davon 4 auch in FDJ, 7 auch im FDGB, 1 weiterer auch in FDJ und FDGB.
Nur in der FDJ sind also 4, nur im FDGB 9, und nur in der DSF sind 11.

2.4. Die Bedingungen lauten a) $\lambda \leqq -1{,}5$ und $\lambda \geqq 1{,}5$; b) $-4 \leqq \lambda < 2$.

2.5. Man löst beide Gleichungen nach y auf:

$$g_1\colon y = -\frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1} \qquad g_2\colon y = -\frac{a_2}{b_2}x + \frac{c_2}{b_2}.$$

2.6. Kennzeichen:

a) sehr flacher Verlauf
b) Öffnung nach oben
c) der Scheitel liegt auf der y-Achse
d) Schnittpunkt mit der y-Achse im Punkt $(0; -4)$.

2.7. Aus $A = -0{,}5$ kann man sofort auf einen „flachen" Verlauf der Parabel und Öffnung nach unten schließen.

2.8. Aussagen über den Verlauf der Geraden:

a) die Gerade fällt
b) die Gerade verläuft flach
c) die Gerade schneidet die y-Achse unterhalb der x-Achse.

2.9. Wegen der Potenzgesetze stimmen die Funktionen g und h überein: $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$, d. h., für alle $x \in P$ ist $g(x) = h(x)$.

2.10. Nach Umformung
$x > 1$ bzw. $x \geqq 3$ bzw. $5 < x \leqq 6$.

C

2.1. Die Produktionsinstrumente bilden eine Teilmenge der Produktivkräfte. Die letzteren enthalten noch einige Elemente mehr, z. B. den arbeitenden Menschen selbst!

2.2. $Pr \cup U$ wird alle ungeraden Zahlen einschließlich der 2 enthalten.
$Pr \cap U$ enthält nur die Primzahlen außer der 2.
$Pr \setminus U$ kann nur die 2 enthalten, weil diese nicht Element von U.
$U \setminus Pr$ enthält nur einen Teil der ungeraden Zahlen.

2.3.

Nur in der FDJ:	4
nur in der DSF:	11
nur im FDGB:	9
nur in einer:	24

Menge der FDJ-Mitglieder: J
Menge der DSF-Mitglieder: D
Menge der FDGB-Mitglieder: F
Menge der Studenten in nur einer Organisation (24)
$M = J\setminus(D \cup F) \cup D\setminus(J \cup F) \cup F\setminus(J \cup D)$

Menge der Studenten in keiner der Organisationen, wenn A die Menge aller Studenten: $N = A\setminus(F \cup D \cup J)$.

2.4. Die beiden Intervalle lauten: a) $I_1 = (-\infty; -1{,}5]$; $I_2 = [1{,}5; \infty)$;
b) $I_3 = [-4; 2)$.
Gesucht: $I = (I_1 \cap I_3) \cup (I_2 \cap I_3)$.

2.5. Auf Grund der Bedingung $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$ sind die „Anstiege" gleich. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:
$c_1 : b_1$ gleich (1) oder ungleich (2) $c_2 : b_2$.

2.6. Aussagen über die Koeffizienten
a) $|A| < 1$
b) $A > 0$
c) $B = 0$
d) $C = -4$.

2.7. Die $+3$ (absolutes Glied) bedeutet: Schnittpunkt mit der y-Achse oberhalb der x-Achse.
Wegen $B < 0$ und $A < 0$ liegt der Scheitel links der y-Achse.

2.8. Aussagen über m und b:
a) m ist negativ
b) $|m| < \tan 45°$; $|m| < 1$
c) b ist negativ.

2.9. Das Bild von $f(x)$ steigt monoton, das von $g(x)$ fällt. Das Ersetzen von x durch $(-x)$ überführt f und g ineinander.

2.10. Die entsprechenden Intervalle sind:

beidseitig offen	links geschlossen rechts offen	links offen rechts geschlossen

D

2.1. Es gilt $B \subset A$. Es handelt sich um eine **echte** Teilmenge. Die Fälle $B = \emptyset$ und $B = A$ kommen nicht in Frage!

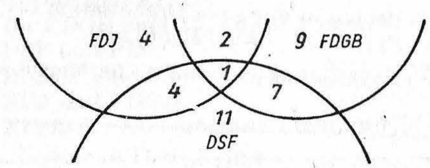
2.2. Es ergibt sich:

$Pr \cup U = \{1; 2; 3; 5; 7; 9; 11; \cdots\}$
$Pr \cap U = \{3; 5; 7; 11; 13; 17; \cdots\}$
$Pr \setminus U = \{2\}$
$U \setminus Pr = \{1; 9; 15; 21; 25; \cdots\}$

Eleganter geschrieben:

$Pr \cup U = U \cup \{2\}$
$Pr \cap U = Pr \setminus \{2\}$

2.3. 24 Studenten sind in nur einer Organisation.
In keiner der drei Organisationen ist 1 Student!



2.4. Für die möglichen λ gibt es zwei Intervalle:

$[-4; -1{,}5]$ und $[1{,}5; 2)$.

2.5. (1) $\left(\begin{array}{l}\text{Die beiden Geraden}\\ \text{fallen zusammen.}\end{array}\right)$ Die Gleichungen sind linear abhängig, $g_1 \cap g_2 = g_1 = g_2$.

(2) $\left(\begin{array}{l}\text{Die beiden Geraden}\\ \text{laufen parallel.}\end{array}\right)$ Es ergibt sich ein Widerspruch, $g_1 \cap g_2 = \emptyset$.

2.6. Es ist $0 < A < 1, \quad B = 0, \quad C = -4$.

2.7. Es handelt sich um eine flach verlaufende, nach unten geöffnete Parabel mit zwei Schnittpunkten mit der x-Achse. Die Symmetrieachse liegt links der y-Achse.

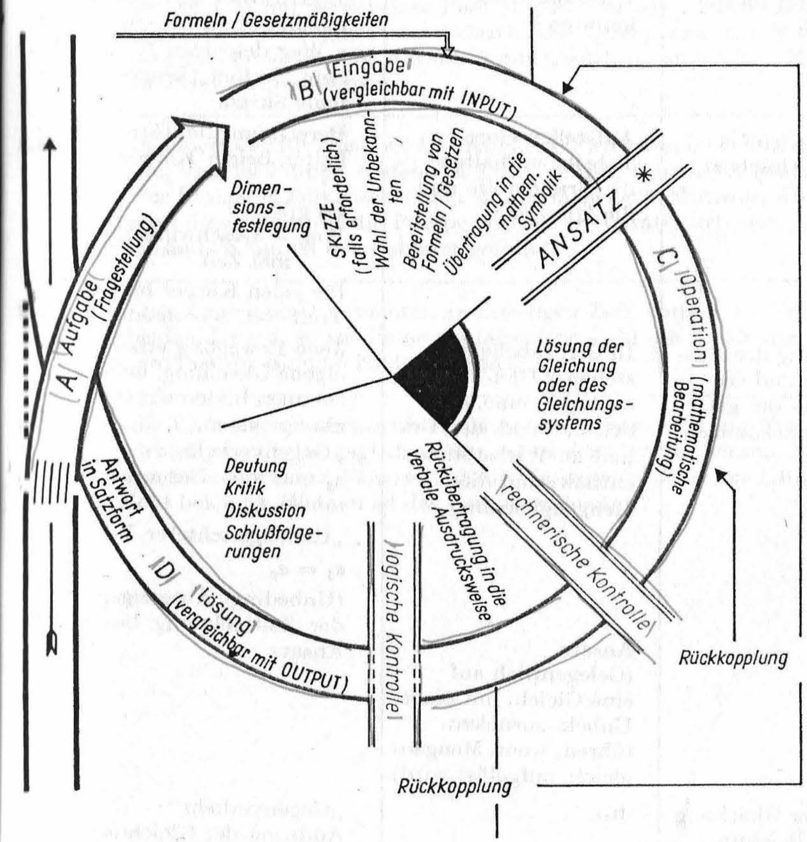
2.8. m: $\; -1 < m < 0$
b: $\; b = -3{,}5$.

2.9. Die Bilder der beiden Funktionen verlaufen symmetrisch zueinander, gespiegelt an der y-Achse, die im Punkt $(0; 1)$ geschnitten wird.

2.10. $I_1 = (1; \infty); \quad I_2 = [3; \infty); \quad I_3 = (5; 6]$.

3. Anwendungsaufgaben zu linearen Gleichungssystemen mit zwei unbekannten Variablen

Das Lösen von Anwendungsaufgaben (eingekleideten Aufgaben, Textgleichungen) bereitet dem Anfänger im allgemeinen erhebliche Schwierigkeiten. Das „Finden des Ansatzes" (d. h. der mathematischen Formulierung des Problems) darf nicht dem Zufall überlassen werden. Gibt es schon kein festes „Rezept" zum Lösen solcher Aufgaben, so helfen doch systematisches Vorgehen und die Beachtung bestimmter Regeln neben dem häufigen Üben weiter. Die Verfahrensweise entspricht im Grunde dem Vorgehen bei allen mathematischen Untersuchungen.



Bei einigen Textaufgaben lassen sich speziellere Regeln für das Vorgehen angeben, so z. B. bei **Mischungsaufgaben** und **Bewegungsaufgaben**.

	Allgemeine Textaufgaben	Mischungsaufgaben	Bewegungsaufgaben
A	Aufgabenstellung (mehrfach lesen, unklare Begriffe klären)	dto.	dto.
B	Dimensionsfestlegung	dto.	Festlegen der Einheiten für Längen und Zeiten. Wahl eines geeigneten Anfangszeitpunkts (Standpunktwahl)
	Skizze, Wahl der Unbekannten (Wonach ist gefragt?)	meist ohne Skizze Wahl der Unbekannten	In der Regel: t Zeit bis zum Eintritt des Ereignisses, gerechnet ab Anfangszeitpunkt, s Weg des einen Körpers bis zum Treffen (Einholen), formale Skizze
	Bereitstellen von Formeln u. Gesetzen	Aufstellen einer Tabelle, enthaltend die Grundstoffe und die Mischung	Berechnung der Geschwindigkeiten beider Körper Es gilt: Weg = Geschwindigkeit mal Zeit für jeden Körper bis zum Treff- od. Überholungspunkt
	Formulierung der Aussageformen und Gesetze mittels der gewählten Unbekannten	In der Tabelle entstehen 2 Gleichungen: eine, die den Preis od. den Gehalt an Wirkstoffen enthält, und die Mengengleichung	Jede Bewegung erhält eine eigene Gleichung, beide zusammen bilden ein Gleichungssystem. „Gegenverkehr“: s_1 und s_2 = Gesamtstrecke minus s_1 „Gleichgerichteter Verkehr“: $s_1 = s_2$ (Unbedingt Ausgangspunkt der Zeitrechnung beachten!)
	Ansatz	Ansatz (Gelegentlich auf eine Gleich. mit einer Unbek. zurückzuführen, wenn Mengengleich. aufgelöst wird)	Ansatz
C	Lösung der Gleichung oder des Gleichungssystems	dto.	„Gegenverkehr“: Addition der Gleichungen „Gleichgericht. Verkehr“: Gleichsetzungsverfahren
	Probe	Probe	Probe
D	Logische Kontrolle Verbale Formulierung	dto.	Deutung der Zeitangabe. Feststellen, ob das Treffen auf der Verbindungsstrecke geschieht.

3.1. Für ein elektrisches Aggregat stehen zwei Arten von Rheostaten A und B zur Verfügung. Zur Feststellung der Widerstandswerte der beiden Rheostatentypen werden folgende Feststellungen durch Experimente getroffen:

Schaltet man vier Rheostaten vom Typ A und vier vom Typ B hintereinander, so beträgt der Gesamtwiderstand der Leitung 12 Ω.
Schaltet man aber fünf vom Typ A und einen vom Typ B in Reihe, so beträgt der Gesamtwiderstand 13 Ω. Welche Widerstände haben die Rheostatentypen?

3.2. Ein VEB plant eine Monatsproduktion von 4500 Erzeugnissen, die in verschiedener Stückzahl von den Teilwerken M und N hergestellt werden. Wenn aber das Teilwerk M nur 80 % seines Plansolls, N aber das 1,2fache produziert, verlassen nur 4400 Erzeugnisse den Betrieb. Die Erzeugnisse von M bringen einen Reingewinn von je 40,– M, die von N einen solchen von je 60,– M. Vergleichen Sie die Produktionsvolumen.

3.3. Ein Großbehälter für chemische Flüssigkeiten wird von einer Pumpe K allein in 80 Min., von der Pumpe B allein in 2 Std. gefüllt. Eine halbe Stunde nach Einsatz der Pumpe K fällt diese wegen Motorschadens 20 Min. aus. Als Ersatz läuft während dieser Zeit nur die Pumpe B. Nach Reparatur arbeiten beide Pumpen gemeinsam. Wann ist der Behälter gefüllt?

3.4. Die Quersumme einer gesuchten zweistelligen Zahl beträgt 15. Vertauscht man die beiden Ziffern, so ist die neu entstandene Zahl um 27 kleiner als die erste. Wie groß ist die Summe beider Zahlen?

3.5. Um die Tiefe eines Feuerlöschbeckens zu bestimmen, wird eine Stange senkrecht auf Grund gestellt. Sie ragt dann 80 cm aus dem Wasser heraus. Neigt man die Stange, so berührt sie 2,40 m seitlich die Wasseroberfläche. Die Länge der Stange ist nicht bekannt. Wie tief ist das Feuerlöschbecken?

3.1. Einheit: Ω Skizze: —

Widerstandswert von $A : x\Omega$
Widerstandswert von $B : y\Omega$
(KIRCHHOFF): $R = R_1 + R_2 + \cdots$

$$\begin{aligned} 4x + 4y &= 12 \\ 5x + y &= 13 \end{aligned}$$

3.2. Einheit: St./Monat

Skizze: —

Teilwerk M produziert nach Plan		x St.,
	nach Veränderung	$0{,}8x$ St.
Teilwerk N produziert nach Plan		y St.,
	nach Veränderung	$1{,}2y$ St.

Der Reingewinn bleibt zunächst unberücksichtigt.

Ges.:
$$\begin{aligned} x + \phantom{1{,}2}y &= 4500 \\ 0{,}8x + 1{,}2y &= 4400 \end{aligned}$$

3.3. Einheit: Minuten Skizze: —

Es ist nur eine unbekannte Variable erforderlich.

Die Gesamtzeit für das Füllen beträgt x Min.

K füllt in einer Min. $\frac{1}{80}$ des Behälters.

B füllt in einer Min. $\frac{1}{120}$ des Behälters.

Füllung durch K dauert $(x - 20)$ Min.
Füllung durch B dauert $(x - 30)$ Min.

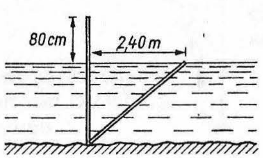
$$\frac{x-20}{80} + \frac{x-30}{120} = 1 \text{ (Behälterinhalt)}$$

3.4. Einheit: — Skizze: — Gesetze: —

Die Zahl heißt $(10x + y)$,
Die neue Zahl $(10y + x)$.

$$\begin{aligned} x + y &= 15 && \text{(Quersumme)} \\ (10x + y) - (10y + x) &= 27 && \text{(Differenz der Zahlen)} \end{aligned}$$

3.5. Skizze: Einheit: cm Gesetz: PYTHAGORAS



Es ist nur eine unbekannte Variable erforderlich.

Tiefe des Beckens : x cm,
Stangenlänge : $(x + 80)$ cm.
PYTHAGORAS $(x + 80)^2 = 240^2 + x^2$
(scheinbar quadratische Gleichung!)

3.1. Erste Gleichung wird durch 4 dividiert, die zweite wird mit (— 1) multipliziert.

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ -5x - y &= -13 \\ \hline -4x &= -10 \qquad x = 2{,}5 \\ 2{,}5 + y &= 3 \qquad y = 0{,}5 \end{aligned}$$

3.2. Die erste Gleichung wird mit (— 1,2) multipliziert.

$$\begin{aligned} -1{,}2x - 1{,}2y &= -5400 \\ 0{,}8x + 1{,}2y &= 4400 \\ \hline -0{,}4x \phantom{+ 1{,}2y} &= -1000 \\ x = 2500 \qquad y &= 2000 \end{aligned}$$

3.3. Die gesamte Gleichung wird zur Beseitigung der Brüche mit dem Hauptnenner 240 multipliziert. (Achtung! Rechte Seite bei der Multiplikation nicht vergessen.)

$$\begin{aligned} 3(x - 20) + 2(x - 30) &= 240 \\ 5x - 120 &= 240 \\ x &= 72 \end{aligned}$$

3.4. Die zweite Gleichung wird durch 9 dividiert.

$$\begin{aligned} x + y &= 15 \\ 9x - 9y &= 27 \\ \hline x + y &= 15 \\ x - y &= 3 \qquad x = 9 \qquad y = 6 \end{aligned}$$

3.5. Beim Auflösen der Quadrate zeigt sich, daß die Glieder mit x^2 sich aufheben. Es entsteht also eine lineare Gleichung.

$$\begin{aligned} x^2 + 160x + 6400 &= 57600 + x^2 \\ 160x &= 51200 \\ x &= 320 \end{aligned}$$

3.1. Es wurden Rheostaten mit den Widerstandswerten 2,5 Ω und 0,5 Ω verwendet. Führen Sie beide Proben selbst durch! (Berechnen Sie dazu die Gesamtwiderstände in beiden Reihenschaltungen.)

3.2. Nach dem Plan produzieren die Teilwerke
M 2500 und N 2000 St.
mit einem Gesamt-Reingewinn von 220000,— M.
Nach der Veränderung produzieren
M 2000 und N 2400 St.
mit einem Gesamt-Reingewinn von 224000,— M.

Trotz der geringeren Stückzahl erhöht sich also hier der Gewinn, was durch die unterschiedlichen Gewinnsätze der Erzeugnisse bedingt ist. Überzeugen Sie sich, daß keine brauchbare Lösung (logische Kontrolle!) entsteht, wenn die in der Aufgabe genannten Stückzahlen 3500 (Plan) und 4400 (nach Veränderung) betragen sollen.

3.3. Das Füllen des Behälters dauert insgesamt 72 Minuten. (Nach 30 Minuten ist der Behälter zu 37,5 % gefüllt. Dann arbeitet B allein, so daß nach weiteren 20 Min. $54\frac{1}{6}$ % gefüllt sind. Beide Pumpen zusammen füllen nun noch 22 Minuten lang $\frac{5}{240} \cdot 22 = \frac{11}{24}$ des Behälters.)

3.4. Die beiden Zahlen heißen 96 und 69.
Beide haben tatsächlich die Quersumme 15. Ihre Differenz beträgt 27. Die Summe beider ist 165.
Beim Lösen mehrerer ähnlicher Aufgaben für zweistellige Zahlen werden Sie feststellen, daß die Differenzen immer Vielfache der 9 sind.

3.5. Die Tiefe des Bassins beträgt etwa 3,20 m.
Die verwendete Stange ist etwa 4 m lang.
Für eine genaue Tiefenbestimmung reicht das verwendete Prinzip nicht aus. Überzeugen Sie sich davon, daß Veränderungen der Angabe 2,40 m erhebliche Unterschiede in der berechneten Tiefe hervorrufen würden.
Wäre mit zwei unbekannten Variablen (Beckentiefe x cm, Stangenlänge y cm) gerechnet worden, entstünde als Ansatz das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} y^2 &= 240^2 + x^2 \\ y &= \ \ 80 + x \end{aligned}$$

Mischungsaufgaben

3.6. Die Teesorten INDIA (51 M/kg) und GRUSINIA (36 M/kg) sollen so gemischt werden, daß 10 kg der Mischung ORIENTA ohne Verlust für 400,— M verkauft werden können. Wieviel Kilogramm jeder Sorte werden für die Mischung verwendet?

3.7. Für ein Gartenfest soll 20 %iger Kirschlikör aus 125 ml alkoholfreier Kirschsirup-Essenz und 1 Liter 95 %igem Primasprit durch Wasserzugabe hergestellt werden. Wieviel Wasser wird zugegeben? Wieviel Milliliter Kirschlikör erhält jeder der 24 Teilnehmer des Gartenfestes?

Bewegungsaufgaben

3.8. Die Eisenbahnstrecke BERLIN-Ostb. — BRATISLAVA ist 780 km lang und führt über DRESDEN (km 189), Bad SCHANDAU (km 229), DECIN (km 251), PRAHA (km 383). Der „METROPOL" fährt ab Berlin 15^{06} und trifft in Bratislava 4^{50} ein. Der „HUNGARIA" startet dort 11^{17} und trifft in Berlin 22^{56} ein. Wo und wann begegnen sich die Züge?

3.9. Ein Pkw durchfährt an einer Kontrollstelle das VP-Haltezeichen und hat eine Geschwindigkeit von etwa 80 $\mathrm{kmh^{-1}}$. 5 Minuten später fährt dem Flüchtenden ein VP-Krad mit 100 $\mathrm{kmh^{-1}}$ nach. Wo und wann wird der Pkw eingeholt? (Es wird vorausgesetzt, daß er die eingeschlagene Autobahnstrecke nicht verläßt.)

3.10. Durch einen Berg soll ein Tunnel getrieben werden. Die beiden Ausgänge A und B liegen in gleicher Höhe und haben eine horizontale Entfernung von 2 km voneinander. Der Vortrieb erfolgt gleich schnell, von A aus mit einem Anstieg 1 : 150, von B aus mit einem solchen von 1 : 60. Wo wird die Verbindung hergestellt werden?

3.11. Eine FDJ-Gruppe unternimmt eine Radtour von Leipzig nach dem 40 km entfernten Halle/S. Sie fahren mit einem nahezu gleichbleibendem Tempo von 15 $\mathrm{kmh^{-1}}$ und starten um 11^{00}. Eineinhalb Stunden später fährt ihnen ein Motorradfahrer mit 55 $\mathrm{kmh^{-1}}$ nach. Wo und wann holt er die Gruppe ein?

3.6. Einheit: M und kg
Es werden x kg INDIA
und y kg GRUSINIA
verwendet
Skizze: —

Sorte	Preis je kg	Menge in kg	Wert in M
INDIA	51	x	$51x$
GRUSINIA	36	y	$36y$
ORIENTA	(40)	$x + y$	$51x + 36y$

Preisgleichung: $51x + 36y = 400$ Mengengleichung: $x + y = 10$

3.7. Einheit: ml od. cm³   Skizze: — Es ist nur eine unbekannte Variable erforderlich.
Es werden
x ml Wasser
zugegeben.

Art	Menge (ml)	Alkohol (ml)	%
Primasprit	1000	950	95
Kirschsirup-Essenz	125	—	—
Wasser	x	—	—
Likör	$1125 + x$	950	20

$950 : (1125 + x) = 20 : 100$

3.8. Einheit: (z. B. km, Min.) Beginn der „Zeitrechnung": 11^{00}
Geschwindigkeiten: METROPOL $780 : 824 = 0{,}947$
HUNGARIA $780 : 699 = 1{,}116$
„Gegenverkehr" y: Entfernung Berlin bis zum Treffpunkt in km
x: Zeit bis zum Treffen in Min. nach 11^{00}
Bewegungsgleichungen: METROPOL: $y = 0{,}947 \cdot (x - 246)$
HUNGARIA: $780 - y = 1{,}116 \cdot (x - 17)$

3.9. Einheit: (z. B. km, Min.) Beginn der „Zeitrechnung": Durchfahrt des Pkw
Geschwindigkeiten: Pkw $80\ \text{kmh}^{-1} \triangleq 1{,}333\ \text{kmmin}^{-1}$
VP $100\ \text{kmh}^{-1} \triangleq 1{,}667\ \text{kmmin}^{-1}$
„Gleichgerichteter Verkehr"
y: Entfernung vom Haltezeichen bis zum Einholpunkt in km
x: Zeit von der Durchfahrt des Pkw bis zum Einholpunkt in Min.
Bewegungsgleichungen: Pkw: $y = 1{,}333 \cdot x$
VP-Krad: $y = 1{,}667 \cdot (x - 5)$

3.10. Einheit: m
Vortrieb: von A aus 1 m Höhe auf 150 m   von B aus 1 m Höhe auf 60 m
Verbindungs-(Treff-)Stelle in x m Höhe über AB und in y m Entfernung von A aus. Diese Stelle ist $(2000 - y)$ m von B – horizontal gemessen – entfernt.

Von A aus: $\frac{1}{150} \cdot y$

von B aus: $x = \frac{1}{60} \cdot (2000 - y)$

3.11. Einheit: km, Std. Zeit wird gemessen nach 11^{00}.
Geschwindigkeiten: Gruppe $15\ \text{kmh}^{-1}$, Motorrad $55\ \text{kmh}^{-1}$
Der Motorradfahrer holt die Gruppe x Stunden nach 11^{00} y km hinter Leipzig ein.
Bewegungsgleichungen: „Gleichgerichteter Verkehr"
Gruppe: $y = 15 \cdot x$
Motorradfahrer: $y = 55 \cdot (x - 1{,}5)$

3.6.
$$\begin{aligned} 51x + 36y &= 400 \\ x + y &= 10 \\ 51x + 36y &= 400 \\ -36x - 36y &= -360 \end{aligned}$$
Zweite Gleichung mit (— 36) multipliziert:
$15x = 40$ $x = 2{,}667$
$2{,}667 + y = 10$
$y = 7{,}333$

3.7. $950 : (1125 + x) = 20 : 100$
$950 : (1125 + x) = 1 : 5 \rightarrow 4750 = 1125 + x$
$x = 3625$

3.8. Nach Ausmultiplikation der Klammern bietet sich das Additionsverfahren an:
$$\begin{aligned} y &= 0{,}947x - 233{,}0 \\ 780 - y &= 1{,}116x - 19{,}0 \\ 780 &= 2{,}063x - 252{,}0 \\ 2{,}063x &= 1032 \\ x &= 500 \end{aligned}$$
$y = 0{,}947 \cdot 500 - 233 = 240{,}5$

3.9. Hier führt – wie überhaupt bei Aufgaben des „gleichgerichteten Verkehrs" – das Gleichsetzungsverfahren zum Ziel:
$1{,}333x = 1{,}667x - 8{,}333$
$0{,}333x = 8{,}333$
$x = 25$
$y = 1{,}333 \cdot 25 = 33{,}333$

3.10. Die erste Gleichung wird zunächst mit 150, die zweite mit 60 multipliziert:
$150x = y$
$60x = 2000 - y$
nach Addition: $210x = 2000$ $x = 9{,}52$
$y = 150 \cdot 9{,}52 = 1428$

3.11. Nach Gleichsetzungsverfahren:
$15x = 55x - 82{,}5$
$40x = 82{,}5$
$x = 82{,}5 : 40 = 2{,}0625$
$y = 15 \cdot 2{,}0625 = 30{,}94$

3.6. Für die Mischung werden $2^2/_3$ kg INDIA und $7^1/_3$ kg GRUSINIA verwendet.
Dafür werden 136,– M (INDIA-Anteil) und 264,– M (GRUSINIA-Anteil) ausgegeben und 400,– M für die 10 kg Mischung eingenommen.
Von der billigeren Teesorte ist etwa dreimal soviel enthalten wie von der teureren.

3.7. Es werden 3,625 l Wasser zugeschüttet. Von der Gesamtmenge 4,75 Liter sind – wie gefordert – 20 %, d. h. 950 ml Alkohol.
Jeder der 24 Teilnehmer des Gartenfestes erhält – bei gleicher Verteilung – fast 200 ml „Kirschlikör“ mit je insgesamt etwa 40 ml Alkohol.

3.8. Die beiden Züge begegnen sich etwa 240 km von Berlin entfernt, und zwar findet das Treffen etwa 500 Min. nach 11^{00} statt.
Die beiden Expreßzüge fahren etwa gegen 19^{20} in der Nähe der Grenze DDR–ČSSR aneinander vorbei.
(Nach dem Internationalen Fahrplanbuch / Strecke B 1, Ausgabe Sommer 1970, verläßt der Metropol 19^{28} Bad Schandau, während der Hungaria 19^{32} eintrifft. Die Ungenauigkeit des Ergebnisses ist durch die Aufenthaltszeiten zu erklären.)

3.9. Der Pkw-Fahrer wird 25 Minuten nach dem Durchfahren des Haltesignals in etwa 33 km Entfernung überholt werden.
Es wird allerdings dabei vorausgesetzt, daß er seine Geschwindigkeit zwischenzeitlich nicht erhöht.

3.10. Der Durchstoß erfolgt 9 bis 10 m über der Höhenlinie AB, und zwar in einer horizontal gemessenen Entfernung von etwa 1430 m von A aus.
Daraus folgt, daß bei gleich schnellem Vortrieb der Tunnelbau von B auswesentlich später begonnen werden muß. Bei gleichzeitigem Baubeginn würde der Stollen von A aus ein Zwischenstück des anderen treffen.

3.11. Der Motorradfahrer holt die FDJ-Gruppe nach etwa 31 km gegen 13^{05} ein.

4. Quadratische Gleichungen und Gleichungen höheren Grades

Einige Bemerkungen zu den quadratischen Gleichungen

In jedem Fall muß zunächst die „Normalform“ hergestellt werden: Es wird die gesamte Gleichung durch den Koeffizienten des quadratischen Gliedes (einschließlich seines Vorzeichens) dividiert.
Liegt eine quadratische Gleichung mit bestimmten Zahlen vor, wende man die Lösungsformel an.
Sind die Koeffizienten unbestimmte Variablen (Buchstaben), so empfiehlt sich die Anwendung der „Methode der quadratischen Ergänzung“.
Fehlt das „absolute Glied“ (d. h., ist dieses 0), so ist x „abzuspalten“ (auszuklammern).
Entweder sind zwei Proben durch Einsetzen der Lösungen in die erste (!) Zeile vorzunehmen, oder es wird der Satz von VIETA angewendet, wobei dann aber zusätzlich die Lösungsschritte bis zur Herstellung der Normalform kontrolliert werden müssen.

Übersicht über typische Fälle

$x^2 - 7x = -12$	(Lösungsformel)	$L = \{3; 4\}$
$7x^2 = 28$	(„reinquadratisch“) (Elemente der Lösungsmenge unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen)	$L = \{-2; 2\}$
$-2x^2 + 5x = 2$	(Division durch -2)	$L = \{0{,}5; 2\}$
$3x^2 - 10x + 9 = 0$		$L = \emptyset$ keine reellen Lösungen
$x^2 - 8x = -16$	bzw. $(x - 4)^2 = 0$	$L = \{4\}$ (Doppellösung)
$-x^2 + 2{,}42x = 1{,}19$	(Koeffizienten sind Dezimalzahlen)	$L = \{0{,}6935; 1{,}73355\}$
$5x^2 - 4x = 0$	(absolutes Glied ist 0) $x \cdot (5x - 4) = 0$	s. o. $L = \{0; 0{,}8\}$
$0{,}5x^2 - 3x = -8$	(Division durch 0,5 oder Multiplikation mit 2)	$L = \emptyset$
$Ax^2 - x = A + 1$	(Methode der quadratischen Ergänzung)	

$$x^2 - \frac{1}{A}x = \frac{A+1}{A} \qquad \left(x - \frac{1}{2A}\right)^2 = \frac{1}{4A^2} + \frac{4A^2 + 4A}{4A^2}$$

$$x = \frac{1}{2A} \pm \frac{2A+1}{2A} \qquad L = \left\{-1; \frac{1+A}{A}\right\}$$

$x^2 - qx = p$ (Die Anwendung der Lösungsformel bringt die Gefahr von Fehlern mit sich!)

$$\left(x - \frac{q}{2}\right)^2 = p + \frac{q^2}{4}$$

$$x \text{ hier}: = 0{,}5\left(q \pm \sqrt{4p + q^2}\right)$$

nicht mit allgemeiner Lösungsformel verwechseln!

Vor der Bearbeitung von Gleichungen höheren Grades sollten Sie unbedingt Sicherheit im Lösen quadratischer Gleichungen erwerben!

Gleichungen höheren Grades:

Stellen Sie zunächst den Grad n (höchster auftretender Exponent von x) fest. Die Lösungsmenge kann höchstens n reelle Elemente aufweisen.
Bei der Lösung von Gleichungen von höherem als dem 2. Grad können Sie folgende Verfahren anwenden:

1. *Wenn das absolute Glied 0 ist,* so ist eine Lösung $x_1 = 0$. Sie können dann durch x dividieren und anschließend die übrigen Lösungen suchen.
2. *Wenn Ihnen eine Lösung $x_1 = a$ bekannt ist oder Sie haben diese durch Probieren gefunden* (man probiere vor allem $x = \pm 1$ und $x = \pm 2$), dann dividieren Sie die Gleichung durch $(x - a)$. Nach dieser Partial- oder Polynomendivision entsteht eine Gleichung niederen Grades, die Sie weiter bearbeiten müssen.
3. *Wenn die Gleichung nur Glieder geraden Grades (durch 2 teilbare Exponenten) oder nur Glieder mit durch 3 teilbaren Exponenten enthält,* so führt eine Substitution $x^2 = z$ bzw. $x^3 = z$ weiter. Man erhält zunächst die Lösungen für z. Anschließend werden aus der Substitutionsgleichung die Lösungen von x ermittelt.
4. *Wenn die Gleichung als ein Produkt zweier Ausdrücke gegeben ist, welches gleich 0 ist,* so wird jeder Faktor gleich 0 gesetzt und so die Gleichung „aufgespalten".
5. *Im übrigen besteht immer die Möglichkeit,* mittels des HORNERschen Schemas die Lösungen zu finden (siehe folgende Seite).

Die hier genannten Verfahren können auch miteinander gekoppelt werden.

Das Schema von HORNER

Die Vorteile der Verwendung des HORNERschen Schemas:
Bequeme Rechnung (nur Addition und Multiplikation; Einsatz des Rechenstabs möglich)
Schnelles Erkennen des Bereiches, in dem die zugehörige Funktion ihre charakteristischen Eigenschaften hat.
Bei der Lösung der betreffenden Gleichung erhält man im interessierenden Bereich zusätzlich genügend viele Werte für eine Wertetafel der zugehörigen Funktion.
Nachteile bestehen bezüglich der Beschränkung auf ganzrationale Funktionen und im Hinblick auf den seltenen Fall, daß mehrere Lösungen zwischen zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen liegen.

Beispiel:

$3\,x^5 + x^4 - 48\,x = 16$

Alle Koeffizienten – auch die nicht geschriebene „1" und „0" für nichtvorhandene Glieder mit einem Exponenten $< n$ – sind in der Kopfzeile einzutragen. Für jedes „zu probende" x ist eine Doppelzeile zu verwenden. Die Zahlen der unteren Reihe dieser Doppelzeile werden mit dem x-Wert multipliziert und nach Notieren in der oberen Zeile zum Wert in der Kopfzeile addiert. * gibt y-Wert an.

x	3	1	0	0	−48	−16	y	Bem.
0	↓	...	...	...	...	−16	*	ohne Berechnung
		3	4	4	4	−44		
1	3 ↗	4	4	4	−44	−60	*	
		6	14	28	56	16		
2	3 ↗	7	14	28	8	0	*	Nullstelle $x_1 = +2$

„Vorzeichengleichheit" (d. h. in der unteren Zeile überall gleiches Vorzeichen.) „Oberhalb 2" liegen ($x > 0$) keine weiteren Lösungen.

0	...	...	...	...	...	−16		
		−3	2	−2	2	46		
−1	3 ↗	−2	2	−2	−46	30	*	Zwischen 0 und −1 liegt eine Lösung

Die Lösung muß näher an 0 als an −1 liegen. Man probiere mit −0,3 oder −0,4. Man findet, daß die Lösung zwischen −0,3 und −0,4 liegen muß. Nach weiterem Interpolieren findet man Lösung $x_2 = -\frac{1}{3}$.

x	3	1	0	0	−48	−16		Bem.
		−6	+10	−20	40	16		
−2	3	−5	+10	−20	−8	0	*	

Die dritte Lösung $x_3 = -2$ ist gefunden. Es können nun höchstens noch zwei weitere Lösungen vorhanden sein.

		−9	24	−72	216	−504	
−3	3	−8	24	−72	168	−520	*

Die Vorzeichen der unteren Zeile wechseln ab. Man spricht vom „Vorzeichenwechsel". „Unterhalb" −3 liegen keine weiteren Lösungen ($x < 0$).
Das Intervall $(-3; +2)$ ist auch gleichzeitig das „interessante" Intervall der Funktion $f(x) = 3\,x^5 + x^4 - 48\,x - 16$.
Außerhalb dieses x-Bereiches ist der Verlauf des Bildes der Funktion „gewöhnlich". Besonderheiten des Kurvenbilds sind nicht zu erwarten.
Es liegen nur drei (von möglichen fünf) reelle Lösungen vor. Davon kann man sich wie folgt überzeugen:
Der Ausdruck $(3\,x^5 + x^4 - 48\,x - 16)$ wird nacheinander durch $(x + 2)$, $(x - 2)$ und $\left(x + \frac{1}{3}\right)$ dividiert.
Zweckmäßigerweise dividiert man gleich durch

$$(x+2)\cdot(x-2)\cdot\left(x+\frac{1}{3}\right) = \left(x^3 + \frac{1}{3}\,x^2 - 4x - \frac{4}{3}\right)$$

$$(3x^5 + x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 48x - 16) : \left(x^3 + \frac{1}{3}\,x^2 - 4x - \frac{4}{3}\right) = 3x^2 + 12$$

$$\underline{3x^5 + x^4 - 12x^3 - 4x^2}$$

$$+12x^3 + 4x^2 - 48x - 16$$

$$12x^3 + 4x^2 - 48x - 16$$

Man erhält einen (quadratischen) Ausdruck, den man nun gleich 0 setzt, um eventuelle weitere Lösungen zu finden. Diese quadratische Gleichung hat aber keine reellen Lösungen mehr: $3\,x^2 + 12 = 0$

$\to x^2 + 4 = 0 \qquad L = \emptyset$.

Die Lösungsmenge der oben angeführten Gleichung 5. Grades lautet:

$L = \{2; -\frac{1}{3}; -2\}$.

4.1. $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 2x + 4 = 0$

(maximal vier reelle Lösungselemente)

4.2. $x^4 - 7x^3 - 6x^2 + 24x = 0$

(bis zu vier reelle Lösungselemente)

4.3. $3x^3 - 18x^2 - 59x + 258 = 0$

(kubische Gleichung, höchstens 3 reelle Lösungselemente, mindestens ein reelles Lösungselement)

4.4. $x^7 - 7x^4 - 8x = 0$

(Gleichung 7. Grades, es können bis zu 7 reelle Lösungselemente auftreten, mindestens existiert ein reelles Lösungselement)

4.5. $y = f(x) = 6x^4 + 37x^3 + 47x^2 + 21x$

Es handelt sich um eine Funktion 4. Grades. Diese kann bis zu 4 Nullstellen haben. Außer den Nullstellen der Funktion (Lösungen der entsprechenden Gleichung) soll auch im „interessanten Bereich" der Funktion eine Wertetafel aufgestellt werden.

4.6. $2x^6 - 7x^4 - 14x^2 + 40 = 0$

(Bei dieser Gleichung 6. Grades sind bis zu 6 reelle Lösungselemente möglich)

*4.7. $48x^5 + 256x^4 - 1875x = 10000$

(Es liegt eine Gleichung 5. Grades vor, die maximal 5 reelle Lösungselemente haben kann, mindestens aber eines. Beachten Sie bitte, daß Glieder mit x^3 und x^2 fehlen.)

4.1. Es sind nicht sofort Lösungen erkennbar. Das HORNERsche Schema liefert für $x = 0$ den Wert 4. Für $x = 1$ ergibt sich:

	1	3	8	10
1	3	8	10	14

mit Vorzeichengleichheit.

4.2. Das absolute Glied ist 0. Folglich ist eine Lösung $x_1 = 0$. Nach Division durch x bleibt $x^3 - 7x^2 - 6x + 24 = 0$. Durch Probieren mit $x = +2; +1; -1; -2$ findet man schnell $x_2 = -2$ als zweite Lösung.

4.3. Das HORNERsche Schema liefert für

$x = 0$ den Wert 258, für $x = 1$ den Wert 184,
$x = 2$ 92 und für $x = 3$ 0.

Also ist eine Lösung $x_1 = 3$.

4.4. Das absolute Glied ist 0. Also ist eine Lösung $x_1 = 0$. Nach Division durch x bleibt $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$. Hier bietet sich die Substitution $x^3 = z$ an, die zu $z^2 - 7z - 8 = 0$ führt.

4.5. Da eine Wertetafel gewünscht wird, verfahre man sofort nach dem HORNERschen Schema. Eine Nullstelle $x_1 = 0$ wird sofort erkannt.

Bereits $x = 1$ führt zu „Vorzeichengleichheit":

	6	43	90	111
6	43	90	111	111

4.6. Es wird zunächst substituiert $x^2 = z$, was zu einer Gleichung 3. Grades in z führt:

$$2z^3 - 7z^2 - 14z + 40 = 0.$$

Durch Probieren findet man schnell $z_1 = 2$.

4.7. Das HORNERsche Schema sieht für positive x wie folgt aus:

$x =$	48	256	0	0	-1875	-10000
0						-10000
		48	304	304	304	-1571
1	48	304	304	304	-1571	-11571
		96	704	1408	2816	1882
2	48	352	704	1408	941	-8118
		144	1200	3600	10800	26775
3	48	400	1200	3600	8925	$+16775$

probiert mit 2,3, dann mit: Vorzeichengleichheit

		120	940	2350	5875	10000
2,5	48	376	940	2350	4000	0

4.1. Das HORNERsche Schema liefert für $x = -1$ den Wert 6.
Für $x = -2$ ergibt sich:

	-2	0	-10	16
1	0	5	-8	20

Vorzeichenwechsel, denn 0 ist „nichtpositiv".

4.2. Die Partialdivision durch $(x + 2)$ führt auf eine quadratische Gleichung

$$x^2 - 9x + 12 = 0$$

mit den Lösungen $x_{3,4} = 4{,}5 \pm 2{,}872$.

4.3. Die Partialdivision durch $(x - 3)$ führt zu einer quadratischen Gleichung:
$3x^2 - 9x - 86 = 0$;
in der Normalform dazu: $x^2 - 3x - 28\frac{2}{3} = 0$ mit den Lösungen
$x_{2,3} = 1{,}5 \pm 5{,}56$.

4.4. Die Lösungen der quadratischen Gleichung in z
$z^2 - 7z = 8$ sind $z_I = -1$ und $z_{II} = 8$.

4.5.

		-24	-52	20	-164	
$x = -4$	6	13	-5	41	-164	dazwischen
		-30	-35	-60	$+195$	Nullstelle
$x = -5$	6	7	12	-39	$+195$	
$x = -4{,}63$		$-27{,}8$	$-42{,}6$	$-20{,}4$	$-2{,}14$	
	6	9,2	4,4	0,6	$-2{,}14$	

$x = -7$ liefert Vorzeichenwechsel.

4.6. Nach Partialdivision durch $(z - 2)$ kommt man zu $2z^2 - 3z - 20 = 0$ bzw. $z^2 - 1{,}5z - 10 = 0$ mit den Lösungen $z_{II} = 4$ und $z_{III} = -2{,}5$.

4.7. Die Fortführung des HORNERschen Schemas liefert für $x = -1$ den Wert -7917, für $x = -2$ den Wert -3690 und für $x = -3$ den Wert $+4697$.

Eine weitere Lösung liegt also zwischen -3 und -2.

		-120	-340	$+850$	-2125	10000
$-2{,}5$	48	136	-340	$+850$	-4000	0
		-240	-80	$+400$	-2000	19375
-5	48	16	-80	$+400$	-3875	9375
		-288	192	-1152	6912	-30222
-6	48	-32	192	-1152	5037	-40222

mit Vorzeichenwechsel. Eine letzte Lösung liegt also zwischen -6 und -5, zweifellos näher an -5. Man probiere mit $x = -5{,}3$ (Wert $+1500$) und dann mit:

		-256	0	0	0	10000
$-5{,}55$	48	0	0	0	-1875	0

D

4.1. Diese Gleichung 4. Grades hat keine reellen Lösungen. Die Lösungsmenge ist leer: $L = \emptyset$.

4.2. Alle vier möglichen Lösungen existieren:

$L = \{-2; 0; 1{,}628; 7{,}372\}$.

4.3. Diese Gleichung 3. Grades hat 3 reelle Lösungen:

$L = \{-4{,}06; 3; 7{,}06\}$.

4.4. $z_I = x^3 = -1$ liefert $x_2 = -1$

$z_{II} = x^3 = 8$ liefert $x_3 = 2$

Die Lösungsmenge ist $L = \{-1; 0; 2\}$.

4.5. Es liegen zwei Nullstellen vor: $x_1 = 0$ und $x_2 = -4{,}63$.

Die Wertetafel für den interessanten Bereich der Funktion $-7 \leqq x \leqq 1$ lautet:

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	$+1$
y	3871	1350	195	-164	-153	-54	-5	0	111

4.6. Die Auflösung der Substitution $x^2 = z$ liefert nur für $z_I = 2$ die Lösungen $x_1 = \sqrt{2}$ und $x_2 = -\sqrt{2}$ und für $z_{II} = 4$ die Lösungen $x_3 = 2$ und $x_4 = -2$, keine weiteren folgen dagegen aus $z_{III} = -2{,}5$.

$L = \{-2; -1{,}414; 1{,}414; 2\}$.

4.7. Es liegen insgesamt 3 Lösungen vor:

$$x_1 = -5\frac{1}{3} \qquad x_2 = -2\frac{1}{2} \qquad \text{und } x_3 = +2\frac{1}{2}.$$

Bemerkung: Mit etwas Geschick kommt man recht schnell zur Interpolation der Lösungen zwischen ± 2 und ± 3 bzw. zwischen -5 und -6. Es sieht zwar zunächst so aus, als ob die Lösungen näher an 2 bzw. -2 lägen. Die Krümmung der zugehörigen Funktionskurve läßt es aber ratsam erscheinen, zunächst mit $\pm 2{,}4$ oder $\pm 2{,}5$ zu probieren.

5. Ungleichungen, Wurzelgleichungen, goniometrische Gleichungen

Für das Lösen der Aufgaben dieses Abschnittes ist die Einhaltung bestimmter Regeln unerläßlich. Das Vorgehen richtet sich jeweils nach dem Typ der betreffenden Aufgabe. Gerade dem Anfänger sei dringend empfohlen, in jedem Falle die notwendigen Proben durchzuführen. Bei den Wurzelgleichungen sind sie ohnehin Bestandteil der Lösung.

Ungleichungen

Für das Rechnen mit Ungleichungen gelten folgende Regeln:

a)

$$\boxed{\begin{aligned} x \cdot a &< b \\ x \cdot a \pm c &< b \pm c \end{aligned}}$$

a) Auf beiden Seiten der Ungleichung kann – wie bei Gleichungen – ein beliebiger Term addiert oder subtrahiert werden, ohne daß die Lösungsmenge sich ändert.

b)

$$\boxed{\begin{aligned} x \cdot a &< b \\ x \cdot a \cdot c &< b \cdot c \\ \text{wenn } c &> 0 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x \cdot a &< b \\ x \cdot a : c &< b : c \\ \text{wenn } c &> 0 \end{aligned}}$$

b) Auf beiden Seiten einer Ungleichung kann – ebenfalls wie bei Gleichungen – mit einem beliebigen **positiven** Term multipliziert oder dividiert werden.

c)

$$\boxed{\begin{aligned} x \cdot a &< b \\ x \cdot a : c &> b : c \\ \text{wenn } c &< 0 \end{aligned}}$$

c) Die beidseitige Multiplikation oder Division der Ungleichung mit einem **negativen** Term ist möglich, **es muß aber dann das Ungleichheitszeichen gewechselt werden.**
Eine Multiplikation oder Division mit **0** ist **unzulässig.**

d)

$$\boxed{\begin{aligned} x \cdot a &< b \\ b &> x \cdot a \end{aligned}}$$

d) Werden die beiden Seiten einer Ungleichung ausgewechselt (vertauscht), so ist auch das Ungleichheitszeichen zu wechseln.

e)

$$\boxed{\begin{aligned} x \cdot a &< b \\ \frac{1}{x \cdot a} &> \frac{1}{b} \end{aligned}}$$

e) Wird auf beiden Seiten einer Ungleichung der Kehrwert gebildet, so muß, wenn die **Vorzeichen gleich** sind, das **Ungleichheitszeichen gewechselt** werden.

f)

$$\boxed{\begin{aligned} x \cdot a &< b \\ x \cdot c &< d \\ \hline x \cdot a + x \cdot c &< b + d \end{aligned}}$$

f) Ungleichungen mit gleichem Ungleichheitszeichen dürfen addiert oder subtrahiert werden.

g)

$$\boxed{\begin{array}{ll} x \cdot a & < b \\ x;\, a;\, b > 0 & \\ x^2a^2 & < b^2 \\ \sqrt{xa} & < \sqrt{b} \end{array}}$$

g) Das Quadrieren und Radizieren kann beidseitig ausgeführt werden, wenn es sich um **positive** Ausdrücke handelt.

h)

$$\boxed{\begin{array}{l} x \cdot a < |b| \\ 1.\ x \cdot a < b \\ \text{wenn } b > 0 \\ 2.\ x \cdot a < -b \\ \text{wenn } b < 0 \\ 3.\ x \cdot a < 0 \\ \text{wenn } b = 0 \end{array}}$$

h) Bei Ungleichungen mit Absolutbeträgen ist besondere Vorsicht geboten. In der Regel sollte dann mit Fallunterscheidungen gearbeitet werden.

Beachten Sie dabei: $|\,a\,| = a,$ wenn $a > 0$
$= 0,$ wenn $a = 0$
$= -a,$ wenn $a < 0.$

(Dem Anfänger fällt es oft schwer zu begreifen, daß $+z$ auch eine negative Zahl, $-z$ dagegen eventuell auch eine positive Zahl sein kann.)

Die einzelnen Schritte beim Lösen einer Ungleichung folgen im allgemeinen in der gleichen Weise aufeinander (Vereinfachen, Ausklammern, Isolieren usw.) wie bei Gleichungen.

Beispiel:

A: $(x + 3)(x - 4) > (x - 5)(x + 2)$

B: Ausmultiplizieren der Klammern

$x^2 - x - 12 > x^2 - 3x - 10$

Beidseitig: Addition von $3x + 12$
Subtraktion von x^2

$2x \quad > \quad 2$

C: Division durch die positive Zahl 2

$x \quad > \quad 1$

D: x kann jede beliebige (reelle) Zahl größer als 1 sein, um die Ungleichung zu erfüllen.
Die Lösungsmenge L ist ein beidseitig offenes Intervall L: $x = (1; \infty)$, d. h., $1 < x < \infty$.

Probe für

$x = -1$ (nicht Lösung)	$x = 2$ (Lösung)
$2 \cdot (-5) \mid (-6) \cdot 1$	$5 \cdot (-2) \mid (-3) \cdot 4$
$-10 \quad < -6$	$10 \quad > -12$
nicht erfüllt	erfüllt

(Recht komplizierte Ungleichungen lassen sich zuweilen etwas bequemer lösen, wenn man vorübergehend statt des Ungleichheitszeichens ein Gleichheitszeichen setzt und für die durch die Lösung der „Gleichung“ abgetrennten Bereiche Gültigkeit oder Nichtgültigkeit der Ungleichung mittels geeigneter Repräsentanten des Bereichs untersucht. Für Anfänger kann dieses Vorgehen nicht empfohlen werden, da es wesentliche Gefahren in sich birgt, andererseits aber für einfache Ungleichungen einen zu großen Aufwand erfordert.)

Wurzelgleichungen

Wir unterscheiden zwei Grundtypen:

I Wenn in der gesamten Gleichung **nur eine Wurzel,** die die gesuchte Variable enthält, **auftritt, so ist die Wurzel zu isolieren** und anschließend die Gleichung (einmal) **zu quadrieren.**

II Sind **zwei Wurzeln** vorhanden, so sollte dafür gesorgt werden, daß **beide Wurzeln auf einer Seite der Gleichung** stehen. Beim Vorhandensein von **zwei oder mehr Wurzeln** ist ein **mehrfaches Quadrieren** erforderlich. Dazwischen ist sinnvoll zu ordnen und zu vereinfachen (Kürzen).

Die Proben sind bei Wurzelgleichungen unerläßlich, da durch das Quadrieren eine Gleichung entsteht, die u. U. mehr Lösungen als die Lösungsmenge der Wurzelgleichung enthält.
Man überzeuge sich an Hand der einfachen Wurzelgleichungen $\sqrt{x} = 3$ und $\sqrt{x} = -3$ davon, die nach dem Quadrieren *beide* in $x = 9$ übergehen. $x = 9$ ist aber nur Lösung der Wurzelgleichung $\sqrt{x} = 3$, da nach Definition die Wurzel einer (positiven) Zahl immer positiv ist!

Beispiel:

A: $2 + \sqrt{7 - 2x} = x \qquad x \in P$

Beachten Sie: Der Radikand muß positiv sein, woraus auf alle Fälle folgt: $x < 3{,}5$

B: Ordnen/Isolieren:

$\sqrt{7 - 2x} = x - 2$

Quadrieren: $7 - 2x = x^2 - 4x + 4$

C: Entstandene quadratische Gleichung lösen:

$x^2 - 2x = 3$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = -1$

D: Beide Lösungen erfüllen die Bedingung $x < 3{,}5$.

Durch die Proben $\quad \sqrt{1} + 2 \mid 3$
$\qquad 3 = 3$

und $\quad \sqrt{9} + 2 \mid -1$
$\qquad 5 \neq -1$

muß x_2 ausgeschieden werden.

Die Lösungsmenge ist $L = \{3\}$.

Goniometrische Gleichungen

Wir unterscheiden folgende Typen goniometrischer Gleichungen:

I Die Gleichung enthält nur lineare Terme *einer* trigonometrischen Funktion.

II Die Gleichung enthält nur Terme *einer* trigonometrischen Funktion, aber in mehreren Gliedern oder in quadratischer Form (nichtlinearer Form), zuweilen auch Terme trigonometrischer Funktionen von unterschiedlichen Argumenten.

III Die Gleichung enthält Terme verschiedener trigonometrischer Funktionen mit dem gleichen Argument.

IV Die Gleichung enthält Terme verschiedener trigonometrischer Funktionen mit unterschiedlichen Argumenten.

Die Lösungen goniometrischer Gleichungen können im Winkelmaß oder Bogenmaß $\widehat{x} = \pi \frac{\alpha}{180^\circ}$ angegeben werden. Beachten Sie die Periodizität der trigonometrischen Funktionen bei der Angabe der Lösungsmenge. (Zuweilen beschränkt man sich auch bewußt auf die Angabe der „Hauptwerte" der Lösungen zwischen 0° und 360° bzw. zwischen 0 und 2π.)
Für die einzelnen Typen gibt es unterschiedliche Lösungsverfahren, zuweilen führt aber auch eine von der Norm abweichende Methode schneller zum Ziel.

Typ I: Hier ist nur ein Isolieren des trigonometrischen Terms erforderlich.

Typ II: Man führt eine **Substitution** aus: z. B. $\sin x = z$. Es ist dann zunächst die nichtgoniometrische Gleichung in z zu lösen.
Kommen Ausdrücke von **mehrfachen Winkeln** $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\tan 2x$, $\sin 3x$ usw. vor, so werden diese zunächst entsprechend den Formeln des Tafelwerks umgeformt:

z. B. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x \qquad \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$
$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \text{ usw.}$$

Typ III: Man führt für alle Terme die vorkommenden trigonometrischen Funktionen auf **eine** zurück. Dabei verwendet man die Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen im Tafelwerk, z. B. $\sin x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x}$. Man beachte hierbei aber, daß die entstehenden Funktionswerte auch negativ sein können. Nach dem notwendigen Quadrieren sind Lösungen auszuscheiden, die die Wurzelgleichung nicht erfüllen.
Bei den goniometrischen Gleichungen der Form

$$\boldsymbol{a \sin x + b \cos x + c = 0}$$

ist der Weg über den **Hilfswinkel** (siehe Beispiel) meist vorteilhafter.

Typ IV: Man führe die Gleichung zunächst auf eine solche vom Typ II oder III zurück. Dazu werden vor allem die Additionstheoreme verwendet.

Beachten Sie:

Beim Dividieren durch einen trigonometrischen Term muß gesichert sein, daß dieser nicht 0 sein kann! Vielfach erfüllen mögliche Lösungen nicht die Ausgangsgleichung, sie sind auszuscheiden. Deshalb ist eine Kontrolle (Proben) unerläßlich.

Beispiel zum Typ III:

$3 \sin x - \sqrt{3} \cos x - 2 = 0$

Hilfswinkelverfahren:

Man formt um zu $\sin x - \frac{\sqrt{3}}{3} \cos x = \frac{2}{3}$.

Man setzt $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$ mit $0 \leqq \varphi < 90°$; hier ist $\varphi = 30°$.

$\sin x - \tan \varphi \cos x = \frac{2}{3}$

Nach Multiplikation mit $\cos \varphi$:

$\sin x \cos \varphi - \cos x \sin \varphi = \frac{2}{3} \cos \varphi$.

Nach Additionstheorem:

$\sin (x - 30°) = \frac{2}{3} \cos 30° = 0{,}5773$
$x - 30° = 35{,}26° \quad \text{bzw.} \quad 144{,}74°$
$x_1 = 65{,}26° \qquad x_2 = 174{,}74°$.

Gewöhnliches Verfahren:

$3 \sin x \pm \sqrt{3 - \sin^2 x} = 2$
$\sin x = z$
$3z - 2 = \pm\sqrt{3 - 3z^2}$

Nach dem Quadrieren ergibt sich $z^2 - z = -\frac{1}{12}$
mit den Lösungen $z_1 = \sin x = 0{,}908$
$z_2 = \sin x = 0{,}092$.

Aus den so formal möglichen Lösungen

$x_1 = \mathbf{65{,}25°}$, $x_2 = [\mathbf{114{,}75°}]$, $x_3 = [\mathbf{5{,}25°}]$, $x_4 = \mathbf{174{,}75°}$ [1])

sind zwei auszuscheiden, da sie die ursprüngliche goniometrische Gleichung nicht erfüllen. (Proben!)

Es bleibt $x_1 = \mathbf{65{,}25°}$ und $x_4 = \mathbf{174{,}75°}$.

Angabe der Lösungsmenge (einschließlich Periodizität)

L: $x \in \{(65{,}26° \pm k\, 360°); (174{,}74° \pm k\, 360°)k \mid \in N\}$ oder
L: $x \in \{1{,}1390 \pm 2k\pi; 3{,}0498 \pm 2\, k\pi \mid k \in N\}$.

[1]) In den hier angeführten Beispielen werden zur Verdeutlichung die Hauptwerte (im Bereich also von 0° bis 360°) der Winkel halbfett gekennzeichnet, also z. B.: **51,8°**. Winkelwerte, die auszuscheiden sind, weil sie die goniometrische Gleichung nicht erfüllen, werden in eckigen Klammern angegeben.

Ungleichungen

5.1. $0{,}5 + 2x \leqq 5$

5.2. $(4 + x)(4x - 5) \leqq (2x + 1)(2x - 11)$

5.3. $\dfrac{1}{1+x} < \dfrac{1}{1+2x}$, wobei $x \notin (-1; -0{,}5)$

5.4. $\dfrac{1}{2x+1} < \dfrac{2}{x+5}$, wobei $x \notin (-5; -0{,}5)$

* 5.5. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x+1} \leqq 0{,}5$

* 5.6. $\sqrt{x} + x \leqq 6$

* 5.7. Die Beziehung $|a_N - g| < \varepsilon$ (wo ε eine beliebig kleine positive Zahl ist) tritt bei der Grenzwertbestimmung von Zahlenfolgen auf. g ist der Grenzwert. Die Formel ist zur geometrischen Veranschaulichung auf dem Zahlenstrahl nach a_N aufzulösen.

Wurzelgleichungen

5.8. $3 + \sqrt{x+1} = 0$

5.9. $x - \sqrt{-x} + 2 = 0$

5.10. $3x - 8 - 4\sqrt{4x+1} = 0$

5.11. $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1{,}5} = \dfrac{6}{\sqrt{2x-1}}$

B

5.1. Subtraktion von 0,5: $2x \leqq 5 - 0{,}5$
$2x \leqq 4{,}5$

5.2. Klammern ausmultiplizieren: $16x + 4x^2 - 5x - 20 \leqq 4x^2 - 22x + 2x - 11$
Subtraktion von $4x^2$
$11x - 20 \leqq - 20x + 11$

5.3. Vorüberlegung: $x = -1$ und $x = -0{,}5$ sind auszuschließen, da sonst der Nenner 0 wird. Es sind beidseitig die Kehrwerte zu vergleichen, das Ungleichheitszeichen ist zu wechseln.

5.4. Die Fälle $x = -0{,}5$ und $x = -5$ sind auszuschließen. Es werden die Kehrwerte verglichen, das Ungleichheitszeichen ist zu wechseln.

5.5. Zunächst werden $x = 0$ und $x = -1$ ausgeschlossen. Linksseitig wird gleichnamig gemacht: $\frac{3x+1}{x(x+1)} \leqq \frac{1}{2}$. Bei der beiderseitigen Multiplikation mit $x(x+1)$ muß das Ungleichheitszeichen geändert werden, wenn $x(x+1) < 0$.
Man unterscheidet deshalb zwei Fälle:
a) wenn $x(x+1) > 0$, also $x < -1$ oder $x > 0$ gilt: $6x + 2 \leqq x^2 + x$
b) wenn $x(x+1) < 0$, also $-1 < x < 0$ gilt: $6x + 2 \geqq x^2 + x$

5.6. Wegen der Definition der Wurzel (positiv) gilt $x \geqq 0$ und, da die rechte Seite von $\sqrt{x} \leqq 6 - x$ positiv sein muß, $x \leqq 6$. Zusammengefaßt: $0 \leqq x \leqq 6$.
Dann folgt durch Quadrieren: $x \leqq 36 - 12x + x^2$
$x^2 - 13x \geqq - 36.$

5.7. Fallunterscheidung:
a) $a_N - g > 0$ und b) $a_N - g \leqq 0$.

5.8. Es folgt zunächst $x \geqq -1$.
Nach Subtraktion von 3 folgt $\sqrt{x+1} = -3$.

5.9. $\sqrt{-x}$ wäre nur dann Wurzel aus einer negativen Zahl, wenn $x > 0$ wäre. Es muß also gefordert werden: $x \leqq 0$, Isolieren der Wurzel: $-\sqrt{-x} = -x - 2$.
Die Vorzeichen werden gewechselt (Multiplikation mit -1).

5.10. $x \geqq -0{,}25$ $\quad 3x - 8 = 4\sqrt{4x+1}$ wird quadriert
$9x^2 - 48x + 64 = 64x + 16$
$9x^2 - 112x = -48$

5.11. 1. $x > 0{,}5$ $\quad$ 2. $x \geqq 1{,}5$
Dann kann mit der Wurzel multipliziert werden.
$2x - 1 + \sqrt{2x^2 - 4x + 1{,}5} = 6$
Isolieren und quadrieren!
$2x^2 - 4x + 1{,}5 = 49 - 28x + 4x^2$

C

5.1. Division durch 2 (also durch eine positive Zahl): $x \leqq 2{,}25$.

5.2. Addition von $20x + 20$:
$31x \leqq 9$ Division durch 31 (positiv): $x \leqq \frac{9}{31}$.

5.3. $1 + x > 1 + 2x$
Subtraktion von $(1 + x)$: $0 > x$.

5.4. $2x + 1 > 0{,}5x + 2{,}5$
Subtraktion von $(0{,}5x + 1)$:
$1{,}5x > 1{,}5$. Division durch 1,5: $x > 1$.

5.5.
a) $x^2 - 5x \geqq 2$
$(x - 2{,}5)^2 \geqq 8{,}25$
a1) $(x - 2{,}5) \geqq \sqrt{8{,}25} = 2{,}872$
$x \geqq 5{,}372$
a2) $(2{,}5 - x) \geqq 2{,}872$
$x \leqq 2{,}5 - 2{,}872 = -0{,}372$

b) $x^2 - 5x \leqq 2$
$(x - 2{,}5)^2 \leqq 8{,}25$
b1) $(x - 2{,}5) \leqq 2{,}872$
$x \leqq 5{,}372$
b2) $(2{,}5 - x) \leqq 2{,}872$
$x \geqq -0{,}372$

5.6. $(x - 6{,}5)^2 \geqq -36 + 42{,}25 = 6{,}25$
(1) $x \geqq 6{,}5 + 2{,}5 = 9$
(2) $x \leqq 6{,}5 - 2{,}5 = 4$

5.7. a) $a_N - g < \varepsilon$
$a_N < g + \varepsilon$
b) $-a_N + g < \varepsilon$
$-a_N < -g + \varepsilon$
$a_N > g - \varepsilon$

5.8. Ein Quadrieren ist gar nicht erst erforderlich, denn man sieht sofort die Unerfüllbarkeit, da die Wurzel nie negativ sein kann.

5.9. $\sqrt{-x} = x + 2$ wird quadriert: $-x = x^2 + 4x + 4$.
Die Lösung dieser quadratischen Gleichung ist $x = -2{,}5 \pm 1{,}5$.

5.10. In der Normalform lautet die quadratische Gleichung

$$x^2 - \frac{112}{9}x = -\frac{48}{9} \text{ mit den Lösungen } x_1 = 12,\ x_2 = \frac{4}{9}.$$

5.11. $2x^2 - 24x + 47{,}5 = 0$, in der Normalform
$x^2 - 12x = -23{,}75$ mit den Lösungen $x_1 = 9{,}5$; $x_2 = 2{,}5$.

5.1. $x \leqq 2{,}25$ oder:
Die Lösungsmenge ist $L = \{x \mid x \in \Delta;\ (-\infty;\ 2{,}25]\}$.

5.2. $x \leqq \frac{9}{31}$
Lösungsmenge $L = \{x \mid x \in (-\infty;\ 9/31]\}$.

5.3. $x < 0$, aber $x \notin [-1; -0{,}5]$
$L = \{x \mid x \in (-\infty;\ -1) \cup (-0{,}5;\ 0)\}$

5.4. $x > 1$
$L = \{x \mid x \in (1;\ \infty)\}$.

Überlegen Sie bei 5.3 und 5.4, daß sich ohne die in der Aufgabenstellung genannten Einschränkungen andere Lösungsmengen ergeben.

5.5. a) Aus $x \geqq 5{,}372$ od. $x \leqq -0{,}372$ und $x < -1$ od. $x > 0$
b) Aus $x \leqq 5{,}372$ od. $x \geqq -0{,}372$ und $-1 < x < 0$
folgt:
$x \geqq 5{,}372$ und $x < -1$ und $-0{,}372 \leqq x < 0$
Lösungsmenge in Intervallschreibweise:
$L = \{x \mid x \in (-\infty;\ -1) \cup [-0{,}372;\ 0) \cup [5{,}372;\ +\infty)\}$.

5.6. Der Fall (1) scheidet wegen $x \leqq 6$ aus.
Aus dem Fall (2) bleibt
als Lösung: $0 \leqq x \leqq 4$ Beachte: $x \geqq 0$!
Lösungsmenge als Intervall: $L = \{[0;\ 4]\}$.

5.7. Lösungsmenge: L_1: $a_N > g - \varepsilon$; L_2: $a_N < g + \varepsilon$.
Andere Schreibweisen: $g - \varepsilon < a_N < g + \varepsilon$
oder $a_N \in (g - \varepsilon;\ g + \varepsilon)$.
Auf dem Zahlenstrahl handelt es sich um die sogenannte „ε-Umgebung von g".

5.8. Die Lösungsmenge ist leer $L = \emptyset$.
Kein reelles x erfüllt die Gleichung.

5.9. $x_1 = -1$; $x_2 = -4$ (beide übrigens, wie gefordert, negativ).
Trotzdem ist nur (-1) Lösung! Überzeugen Sie sich, daß -4 die Gleichung nicht erfüllt. $L = \{-1\}$.

5.10. Proben (12) $36 - 8 \mid 4 \cdot 7$
(4/9) $\frac{4}{3} - 8 \neq 4 \cdot \frac{5}{3}$ $L = \{12\}$.

5.11. Proben (9,5) führt zu $5\sqrt{2} \neq \sqrt{2}$, also nicht Lösung.
(2,5) $\sqrt{4} + \sqrt{1} \mid 6 : \sqrt{4}$ $L = \{2{,}5\}$.

5.12. $\frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} = 3$

5.13. $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 2$

5.14. $\sqrt{x - a} - \sqrt{b} = 0$

5.15. $\sqrt{a + b} + \sqrt{a - b} = \sqrt{2a}$
sei nach b aufzulösen!

5.16. $\sqrt{2 - x} + \sqrt{x - 3} = 1$

Goniometrische Gleichungen

5.17. $\sin x - 0{,}5 = 0$

5.18. $\sin^2 x - \frac{1}{2} = 0$

5.19. $\sin x \cdot \cos x = 0$

5.20. $\sin^2 x - 2 \sin x - 3 = 0$

5.21. $\sin x \cdot \cos x = 1$

5.22. $3 \sin x = 2 \cos^2 x$

5.12. 1. $x \geqq 0$ 2. $x < 1$ – also $[0; 1)$
$1 + \sqrt{x} = 3 - 3\sqrt{x}$ – also $2\sqrt{x} = 1$

5.13. $x > 0$ $x + 1 = 2\sqrt{x}$ wird quadriert
$x^2 + 2x + 1 = 4x$

5.14. $x \geqq a$ $\sqrt{x - a} = \sqrt{b}$ wird quadriert
$x - a = b$

5.15. Bedingungen: $b \geqq -a$ und $b \leqq +a$, also $b \in [-a; +a]$
$a + b + a - b + 2\sqrt{a^2 - b^2} = 2a$ (nach Quadrieren)
$2\sqrt{a^2 - b^2} = 0$ führt zu $a^2 - b^2 = 0$.

5.16. 1. $x \leqq 2$ und 2. $x \geqq 3$ beide nicht gleichzeitig erfüllbar. Formal ergibt sich:
$2 - x + x - 3 + 2\sqrt{-x^2 + 5x - 6} = 1$.

5.17. $\sin x = 0{,}5$

5.18. $\sin^2 x = 0{,}5$ mit $\sin x = \pm\, 0{,}5\sqrt{2} = \pm\, 0{,}7071$.

5.19. Zweckmäßigerweise spaltet man in zwei Teile auf:
(1) $\sin x = 0$ und (2) $\cos x = 0$.

5.20. Typ II Substitution $\sin x = z$
Es entsteht eine quadratische Gleichung
$z^2 - 2z - 3 = 0$ mit den Lösungen $z_1 = 3$ und $z_2 = -1$.

5.21. Typ III $\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$
$\sin x \sqrt{1 - \sin^2 x} = \pm 1$ wird quadriert, $\sin^2 x = z$ führt zu $z(1 - z) = 1$.

5.22. Typ III $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ führt zu:
$3 \sin x = 2 - 2\sin^2 x$
Substitution $\sin x = z$.

5.12. Beim Quadrieren entsteht $4x = 1$; $x = 0{,}25$.

5.13. $x^2 - 2x + 1$ mit der Doppellösung $x_1 = x_2 = 1$ oder durch Substitution $\sqrt{x} = z$; $z + z^{-1} = 2$; $z = 1$ und damit ebenfalls $x = 1$.

5.14. $x = a + b$

5.15. $a^2 = b^2$ bringt die beiden Lösungen $b = \pm\, a$.

5.16. Nach dem Quadrieren entsteht $-x^2 + 5x - 6 = 4$ oder $x^2 - 5x + 10 = 0$ ohne reelle Lösungen.

5.17. Hauptwerte: $x_1 = \arcsin 0{,}5 = [30°] = \dfrac{\pi}{6}$

$x_2 = \arcsin 0{,}5\ [150°] = \dfrac{5\pi}{6}$

5.18. Hauptwerte $x = \arcsin (\pm\, 0{,}7071)$
$x =$ **45°; 135°; 225°; 315°**

5.19. (1) liefert die Hauptwerte $x =$ **0°; 180°; 360°**,
(2) liefert die Hauptwerte $x =$ **90°; 270°**.

5.20. Auflösung der Substitution:
$z_1 = \sin x = 3$ nicht erfüllbar, da $\sin x \leqq 1$.
$z_2 = \sin x = -1$.
$x =$ **270°**.

5.21. $z^2 - z = -1$.
$z = \sin^2 x = 0{,}5 \pm \sqrt{-0{,}75}$
ohne reelle Lösungen in z.

Bequemer kommt man zum Ziel, wenn man statt $\sin x \cdot \cos x = 1$ schreibt: $\frac{1}{2} \sin 2x = 1$ $\sin 2x = 2$.

5.22. $2z^2 + 3z = 2$
$z^2 + 1{,}5z = 1$ mit den Lösungen
$z_1 = \sin x = -2$ nicht erfüllbar.
$z_2 = \sin x = +0{,}5$ $x =$ **30°; 150°**.

5.12. Probe: $\left.\dfrac{1+0{,}5}{1-0{,}5}\,\right|\,3$

$3 = 3 \qquad L = \{0{,}25\}$

5.13. Probe: $1 + 1 \mid 2$

Lösungsmenge: $\{1\}$

5.14. $L = \{a + b\}$

(Nicht verwechseln mit $\{a;\, b\}$!)

5.15. Beide Werte werden bestätigt, die Lösungen sind übrigens die gerade noch zulässigen Grenzen des Intervalls $[-a;\, +a]$. $\quad L = \{-a;\, +a\}$

5.16. Aus mehrfachen Gründen ist die Lösungsmenge leer.

$L = \emptyset$

5.17. $x \in \{30° + k\, 360°;\ 150° \pm k\, 360° \mid k \in N\}$ oder

$x \in \left\{\dfrac{\pi}{6} \pm 2\,k\,\pi;\ \dfrac{5\,\pi}{6} \pm 2\,k\,\pi \mid k \in N\right\}$

5.18. $x \in \{45°;\ 135°;\ 225°;\ 315°$, sämtlich $\pm\, k\, 360° \mid k \in N\}$

$x \in \left\{\dfrac{\pi}{4};\ \dfrac{3\,\pi}{4};\ \dfrac{5\,\pi}{4};\ \dfrac{7\,\pi}{4}\text{, sämtlich } \pm\, 2k\pi \mid k \in N\right\}$

5.19. $x \in \left\{\pm\, k\,\dfrac{\pi}{2}\,\middle|\, k \in N\right\}$

$x \in \{\pm\, k\, 90° \mid k \in N\}$

5.20. Aus $\sin x = -1$ folgt:

$x \in \{270° \pm k\, 360° \mid k \in N\}$

$x \in \{1{,}5\,\pi \pm 2\,k\,\pi \mid k \in N\}$.

5.21. $L = \emptyset \quad$ Kein reelles x erfüllt die Gleichung.

5.22. $x \in \{30° \pm k\, 360°;\ 150° \pm k\, 360° \mid k \in N\}$

$x \in \left\{\dfrac{\pi}{6} \pm 2\,k\,\pi;\ \dfrac{5\,\pi}{6} \pm 2\,k\,\pi \,\middle|\, k \in N\right\}$

5.23. $\cos 2x + \cos x = 0$

* **5.24.** $\dfrac{4}{3}\sin x + 2\cos x - 1 = 0$

5.25. $\sin 2x = 2 \sin x$

5.26. $\cos x - \sin x = -1$

5.27. $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 2\tan x + 1$

5.28. $\tan x = 2 \sin x$

5.29. $\cos 3x = -0{,}5\sqrt{2}$

5.30. $3\cos^2 x + \sin^2 x + 2 \sin x \cos x \leqq 4$

Die Gültigkeit dieser goniometrischen Ungleichung soll untersucht werden.

5.23. Für $\cos 2x$ kann bekanntlich eingesetzt werden:

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1.$

5.24. Typ III $4\sin x + 6\cos x - 3 = 0$; $\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$
ferner Substitution $\sin x = z$ führt zu
$4z + 6\sqrt{1-z^2} = 3$, also nach Isolieren und Quadrieren $-52z^2 + 24z = -27$
mit den Lösungen $z_1 = \sin x = 0{,}9877$ und $z_2 = \sin x = -0{,}5262$
$x_1 = [80{,}9°]$ $\quad x_2 = \mathbf{99{,}1°}$ $\quad x_3 = [211{,}7°]$ $\quad x_4 = \mathbf{328{,}3°}$.

Nach einer Probe scheiden x_1 und x_3 aus.

5.25. $2\sin x\cos x = 2\sin x$

$$\begin{aligned} \sin x\cos x &= \sin x \\ \sin x(\cos x - 1) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} (1)\ \sin x = 0 \\ (2)\ \sin x \neq 0 \\ \quad\ \cos x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

5.26. $\pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \sin x - 1$
$1 - \sin^2 x = \sin^2 x - 2\sin x + 1$
$2\sin^2 x - 2\sin x = 0 \Rightarrow 2\sin x(\sin x - 1) \Rightarrow 1\cdot \sin x = 0 \quad 2\cdot\sin x = 1$
$x_1 = [0°]$ (erfüllt nicht die Gleichung)
$x_2 = \mathbf{90°}$ $\quad x_3 = \mathbf{180°}$

5.27. Gemäß Formel (überzeugen Sie sich!) ist $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

für $\cos x \neq 0$.
Damit folgt: $1 + \tan^2 x = 2\tan x + 1$
oder $\tan^2 x = 2\tan x$; $\tan x(\tan x - 2) = 0$.

5.28. (1) $\sin x = 0$ ($x = \mathbf{0°; 180°}$)
(2) Für $\sin x \neq 0$;
dividiert durch $\sin x$:

$$\frac{1}{\cos x} = 2.$$

Kommt man nicht auf diesen Weg, so sollte man bei gon. Gln. mit Termen mehrerer trigon. Funkt. $\tan x$, $\cot x$ durch $\sin x$, $\cos x$ ersetzen.

$$\frac{\sin x}{\cos x} = 2\sin x$$

$$\sin x\left(\frac{1}{\cos x} - 2\right) = 0$$

5.29. Der Lösungsweg $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ (Additionstheorem)
$4\cos^3 x - 3\cos x = -0{,}5\sqrt{2}$
führt auf eine Gleichung 3. Grades und ist hier viel zu aufwendig.

5.30. Man subtrahiere zunächst von der Ungleichung $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ und erhält:

$2\cos^2 x + 2\sin x\cos x \leqq 3.$

Statt $\cos^2 x$ wird $1 - \sin^2 x$ geschrieben.

5.23. $2\cos^2 x + \cos x = 1$, Substitution $\cos x, = z$ $\quad z^2 + 0{,}5z = 0{,}5$
mit den Lösungen $z_1 = \cos x = -1$ $\quad x_1 = \mathbf{180°}$
$z_2 = \cos x = 0{,}5$ $\quad x_2 = \mathbf{60°; 300°}$

5.24. Oder: $\sin x + 1{,}5\cos x = 0{,}75$
$\sin x + \tan\varphi\cos x = 0{,}75$ $\quad \varphi = 56{,}32°$
$\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi = 0{,}75\cos\varphi$
$\sin(x + \varphi) = 0{,}4159$ $\quad x_1 + \varphi = 24{,}58°$
$x_2 + \varphi = 155{,}42°$

5.25. Aus (1) folgt $x = \mathbf{0°; 180°; 360°}$
Aus (2) folgt $x = \mathbf{0°; 360°}$

5.26. Oder: $-\sin x + \cos x + 1 = 0$
$\sin x - \tan\varphi\cos x = 1$; $\quad \varphi = 45°$
$\sin(x - \varphi) = \cos 45° = 0{,}5\sqrt{2}$
$x_1 - \varphi = 45°$; $\quad x_2 - \varphi = 135°$.

5.27. (1) $\tan x = 0$ $\quad x = \mathbf{0°; 180°}$
(2) $\tan x = 2$
$x = \mathbf{63{,}43°; 243{,}43°}$

5.28. $\cos x = 0{,}5$
$x = \mathbf{60°, 300°}$

5.29. Substitution $3x = z$ führt viel schneller zum Ziel:
$\cos z = -0{,}5\sqrt{2}$ $\quad z = 135°; 225°$
$x = \mathbf{45°; 75°}$

5.30. $2\cos^2 x - 1 + 2\sin x\cos x \leqq 2$
$\sin 2x + \cos 2x \leqq 2$
Substitution: $2x = z$
$\sin z + \cos z \leqq 2$

ist natürlich immer erfüllt (d. h. für alle Werte von z bzw. x), denn es ist
$\sin z \leqq 1$
$\underline{\cos z \leqq 1}$
addiert: $\sin z + \cos z \leqq 2$.

5.23. $x \in \{60° \pm k\,360°;\ 180° \pm k\,360°;\ 300° \pm k\,360° \mid k \in N\}$

$$x \in \left\{\frac{\pi}{3} \pm 2k\pi\ ;\ \pi \pm 2k\pi;\ \frac{5\,\pi}{3} \pm 2k\pi \,\middle|\, k \in N\right\}$$

5.24. $x \in \begin{cases}\{99{,}1° \pm k\,360°\}\\ \{328{,}3° \pm k\,360°\}\end{cases}$ $\quad x \in \begin{cases}\{1{,}7296 \pm 2k\pi\}\\ \{5{,}7300 \pm 2k\pi\}\end{cases}$

dabei immer: $k \in N$

Die Methode mit dem Hilfswinkel φ ist rentabler.

5.25. $x \in \{\pm k\,180° \mid k \in N\}$

$x \in \{\pm k\pi \mid k \in N\}$

5.26. $x \in \{180° \pm k\,360°;\ 90° \pm k\,360° \mid k \in N\}$

$x \in \{\pi \pm 2k\pi;\ 0{,}5\pi \pm 2k\pi \mid k \in N\}$

5.27. $x = \{0° \pm k\,180°;\ 63{,}43° \pm k\,180° \mid k \in N\}$

$x = \{0 \pm k\pi;\ 1{,}1747 \pm k\pi \mid k \in N\}$

5.28. $x = \{0°;\ 60°;\ 180°;\ 300°$ sämtl. $\pm k\,360° \mid k \in N\}$

$$x = \left\{0;\ \frac{\pi}{3}\ ;\ \pi;\ \frac{5\pi}{3},\ \text{sämtl.} \pm 2k\pi \,\middle|\, k \in N\right\}$$

5.29. $x = \{45° \pm k\,360°;\ 75° \pm k\,360° \mid k \in N\}$

$$x = \left\{\frac{\pi}{4} \pm 2\,k\pi;\ \frac{5\,\pi}{12} \pm 2k\pi \,\middle|\, k \in N\right\}$$

5.30. Nun können aber $\sin z$ und $\cos z$ nicht beide gleichzeitig ihren höchsten Wert 1 einnehmen, so daß man die Ungleichung sogar noch allgemeingültig verschärfen kann.
Es gilt für alle x nicht nur $3\cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x\cos x \leqq 4$,
sondern sogar $3\cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x\cos x \leqq 2 + \sqrt{2}$.
Versuchen Sie nun selbst, noch eine untere Grenze des angegebenen Ausdrucks zu finden.
Untersuchen Sie insbesondere, ob der Ausdruck immer positiv sein muß.
In der Tat finden Sie, daß
$2 - \sqrt{2} \leqq 3\cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x\cos x$ ist.

6. Folgen, Grenzwert, Stetigkeit

Eigenschaften von Folgen

Folgen sind Funktionen, bei denen der Definitionsbereich nur die Menge der natürlichen Zahlen (hier meist ohne die Null) oder eine Teilmenge davon ist:

$(a_n) \mid a_n = f(n) \qquad n \in N.$

Eine solche Folge (hier werden nur Zahlenfolgen betrachtet) kann auf die eine oder andere der folgenden Arten dargestellt werden:

a) **tabellarisch** (Darstellung der ersten Glieder)

n	1.	2.	3.	4.	5.	... [1]
a_n	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	...

b) **verbal** (in Worten)

c) **analytisch-rekursiv** durch eine Verbindungsbeziehung zweier aufeinanderfolgender Glieder einschließlich der Angabe des (oder der) Anfangsgliedes(r).[2]
Vgl. die Folgen (b_n) und (c_n) auf S. 74.

d) **analytisch-independent:** Angabe des allgemeinen n-ten Gliedes a_n durch eine Gleichung in n.

e) **graphische Darstellung:** Dabei entstehen im Koordinatensystem „isolierte", d. h. nicht durch einen Linienzug verbundene, Punkte.

Folgende Eigenschaften von Folgen interessieren vor allem:

I die Monotonie

Dazu ist zu untersuchen, ob $a_{n+1} > a_n$ bzw. $a_{n+1} < a_n$ für alle n gilt.
Bei $a_{n+1} \geqq a_n$ spricht man von monoton steigend,
bei $a_{n+1} \leqq a_n$ spricht man von monoton fallend.
Zuweilen wird auch zwischen „streng monoton steigend" $a_{n+1} > a_n$ und nur (einfach) monoton steigend $a_{n+1} \geqq a_n$ unterschieden.
Die Untersuchung erfolgt durch einen Vergleich zweier aufeinanderfolgender Glieder.

(Die Differenz) $a_{n+1} - a_n$ muß $\begin{cases}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{cases}$ für alle n sein.

II die Art des Steigens oder Fallens

Dazu untersucht man die Differenzen $d = a_{n+1} - a_n$ zweier aufeinanderfolgender Glieder und den Quotienten $q = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.
Mit den Differenzen untersucht man die **absoluten**, mit den Quotienten die **relativen** Zu- bzw. Abnahmen. (Diese Begriffe werden vornehmlich in der Ökonomie verwendet.)

[1]) Bei der tabellarischen Angabe ist die Fortsetzung der Folge immer ungewiß. Je mehr Glieder gegeben sind, desto sicherer kann man eine naheliegende Gesetzmäßigkeit erkennen.

[2]) Der Leser beachte die Analogie zum Beweis durch vollständige Induktion (Schluß von n auf $n + 1$ und Anfangsfall).

5*

Ist d konstant, so liegt eine **arithmetische Folge** vor:

Formel für das n-te Glied

$$a_n = a_1 + (n-1)\, d$$

Summe der Glieder der Folge (Reihe) oder n-tes Glied der Partialsummenfolge

$$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\, n$$

Übersicht über den absoluten und den relativen Verlauf von Folgen

(Beschreibung statistischer Entwicklungsreihen)
Gültig für Zahlenfolgen, bei denen alle $a_n > 0$

d	mit zunehmendem $n \cdots$	q	Mit zunehmendem $n \cdots$	Entwicklung
> 0 Zunahmen ↑	$\lvert d \rvert$ wird größer (progressiv) wachsende abs. Zunahmen	> 1	q wird größer wachsende rel. Zunahmen	stärker als exponentiell
			q bleibt gleich gleichbleib. rel. Zunahmen	exponentiell (geometrische Folge,
			q wird kleiner fallende rel. Zunahmen	
	$\lvert d \rvert$ bleibt gleich gleichbleib. abs. Zunahmen	> 1	q wird kleiner fallende rel. Zunahmen	linear (arithmetische Folge)
	$\lvert d \rvert$ wird kleiner (degressiv) fallende abs. Zunahmen	> 1	q wird kleiner fallende rel. Zunahmen	
< 0 Abnahmen ↓	$\lvert d \rvert$ wird größer wachsende abs. Abnahmen	$0 < q < 1$	q wird kleiner wachsende rel. Abnahmen	
	$\lvert d \rvert$ bleibt gleich gleichbleib. abs. Abnahmen	$0 < q < 1$	q wird kleiner wachsende rel. Abnahmen	arithmet. linear
	$\lvert d \rvert$ wird kleiner fallende abs. Abnahmen (auch: abnehmende abs. Abnahmen)	$0 < q < 1$	q wird kleiner wachsende rel. Abnahmen	
			q bleibt gleich gleichbleib. rel. Abnahmen	exponentiell gedämpft
			q wird größer fallende rel. Abnahmen	

Ist q konstant, so liegt eine **geometrische Folge** vor:

n-tes Glied

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

Summe . . .

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Bei einer arithmetischen Folge liegt ein linearer (geradliniger, gleichmäßiger) Anstieg vor, bei einer geometrischen Folge ein exponentieller. In Wirtschaft und Technik wird in der Regel eine geometrische Folge angenommen, wenn nur Randwerte vorliegen.

III Grenzen und Grenzwert

Informieren Sie sich zunächst an Hand eines Lehrbuchs über die Definition des Grenzwerts, und machen Sie sich mit der anschaulichen Erläuterung desselben vertraut!

Kann festgestellt werden, daß eine Folge gewisse Werte mit keinem Glied unterschreitet, so heißt der höchste dieser Werte untere Grenze, die obere Grenze ist der kleinste der Werte, die nicht überschritten werden.
$\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ heißt Grenzwert der Folge g und braucht weder mit unterer noch oberer Grenze übereinzustimmen. Grenzwert der Folge (a_n) und Grenzwert der Partialsummenfolge (s_n) stimmen in der Regel nicht überein. Konvergenz der Folge (a_n) nach 0 (also Existenz des Grenzwertes $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$) ist aber eine Voraussetzung für die eventuelle Konvergenz der Partialsummenfolge $\lim\limits_{n \to \infty} s_n$.

Nullfolgen

sind Zahlenfolgen mit dem Grenzwert Null. Dazu gehören u. a.

$$\left(\frac{1}{n}\right);\ \left(\frac{1}{n^2}\right);\ \left(\frac{1}{n+1}\right);\ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right);\ (q^n) \text{ für } |q| < 1;\ \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right);\ \left(\sqrt[n]{n} - 1\right);\ \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right);$$

(na^n) für $|a| < 1$

Möglichkeiten zum Vermuten des Grenzwertes

(1) auf Grund der tabellarischen Aufstellung genügend vieler Glieder

(2) auf Grund des Vergleiches mit anderen Folgen oder des Zurückführens auf Nullfolgen

(3) Liegt ein Bruch vor, in dessen Zähler und Nenner Potenzen von n auftreten, so vernachlässigt man im Zähler und Nenner alle Glieder mit Ausnahme jeweils desjenigen mit dem höchsten Exponenten von n.

(3a) Ist der (höchste) Exponent von n im Nenner größer als der (höchste) im Zähler, so liegt eine Nullfolge vor.

(3b) Entsteht bei der Division ein von n unabhängiger Wert, so konvergiert die Zahlenfolge gegen diesen.

(3c) Ist der (höchste) Exponent von n im Nenner kleiner als der (höchste) im Zähler, so existiert kein endlicher Grenzwert, die Folge ist divergent.

Nachweis des Grenzwertes

Er kann erfolgen, indem man zeigt, daß die Folge $(a_n - g)$ Nullfolge ist, daß also $| a_N - g |$ für alle $n > N$ kleiner als eine beliebige positive (sehr kleine) Zahl ε ist.

Arithmetische Folgen und geometrische Folgen mit $| q | > 1$ sind immer divergent, geometrische Folgen mit $| q | < 1$ konvergieren gegen Null.

Musterbeispiele

$$(u_n) = \left(\frac{n}{2n-11}\right)$$

Weitere Darstellungsmöglichkeiten

tabellarisch:

1.	2.	3.	4.	5.	6.
$-1/9$	$-2/7$	$-3/5$	$-4/3$	-5	$+6$

7.	8.	9.
$+7/3$	$+8/5$	$+9/7 \ldots$

rekursiv:

$$u_{n+1} = u_n - \frac{11}{99 + 4n^2 - 40n}$$

$$u_{n+1} = u_n\left(1 - \frac{11}{2n^2 - 9n}\right)$$

verbal: wenig sinnvoll

Monotonie

Nicht monoton, da $u_5 < u_4$, aber $u_6 > u_5$; allerdings ab 6. Glied streng monoton fallend.

Art des Fallens

(ab 6. Glied)

$$d = u_{n+1} - n_n$$

$$= \frac{n+1}{2n-9} - \frac{n}{2n-11}$$

$$= \frac{-11}{99 + 4n^2 - 40n} < 0$$

für $n \geqq 6$.

$$(v_n) = (243; 162; 108; 72; \ldots)$$

independent:

$$v_n = 243 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

rekursiv:

$$v_{n+1} = \frac{2}{3} \cdot v_n$$

und $v_1 = 243$

verbal: Folge der mit 243 multiplizierten Potenzen von $\frac{2}{3}$.

streng monoton fallend, denn

$$v_{n+1} - v_n = -81\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} < 0$$

nämlich

$$= 243\left(\frac{2}{3}\right)^n - 243\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$= 243\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{2}{3} - 1\right)$$

$$d = v_{n+1} - v_n = -81\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

d wird mit wachsendem n kleiner, also fallende absolute Abnahmen

$$q = v_{n+1} : v_n = \frac{243\left(\frac{2}{3}\right)^n}{243\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}} = \frac{2}{3}.$$

$| d |$ wird mit wachsendem n kleiner, also fallende absolute Abnahmen

$$q = u_{n+1} : u_n$$

$$= \frac{n+1}{2n-9} \cdot \frac{2n-11}{n}$$

$$= \frac{2n^2 - 9n - 11}{2n^2 - 9n}$$

$$= 1 - \frac{11}{2n^2 - 9n}$$

< 1 für $n \geqq 6$

Mit wachsendem n nähert sich q wachsend der 1:

fallende relative Abnahmen

also gleichbleibende relative Abnahmen, gleichbleibende Quotienten q.

Es liegt eine geometrische Folge vor (exponentielle Dämpfung).

Grenzen, Grenzwert

o. G. $= u_6 = 6$

u. G. $= u_5 = 5$

Wegen (3b) Grenzwert vermutet bei $g = 0{,}5$. Zum Nachweis wird

$$(u_n - 0{,}5) = \left(\frac{n}{2n-11} - 0{,}5\right) = \left(\frac{11}{4n-22}\right)$$

gebildet, das ist aber eine Nullfolge. Die Partialsummenfolge divergiert.

o. G. $= v_1 = 243$

u. G. $=$ Grenzwert 0

Da eine geometrische Folge mit $| q | < 1$ vorliegt, ist der Grenzwert 0.

Grenzwert der Partialsummenfolge:

$$s_n = 243 \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = 729\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right).$$

$$\lim_{n \to \infty} s_n = 729\,(1 - 0) = 729$$

Grenzwerte von Funktionen, Unstetigkeitsarten

Da bei Funktionen der Definitionsbereich nicht nur auf die natürlichen Zahlen beschränkt bleibt, kann auch ein Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ (auch für ein $x_0 \notin N$) neben $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ interessieren.

Gebrochen rationale Funktionen bestehen aus Zähler- und Nennerfunktion:

$$g(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

Es können folgende Fälle auftreten:

a) $Z(x_1) \neq 0$	$N(x_1) \neq 0$	Normaler Funktionswert
b) $Z(x_1) = 0$	$N(x_1) \neq 0$	**Nullstelle**
c) $Z(x_1) \neq 0$	$N(x_1) = 0$	Uneigentlicher oder unendlicher „Grenzwert", **Pol**
d) $Z(x_1) = 0$	$N(x_1) = 0$	**Unstetigkeit**, Lücke, Grenzwert untersuchen!

Im letzten Fall ist das Bild der Funktion an dieser Stelle unterbrochen. Gegebenenfalls muß ein „Ersatzwert" definiert werden.

Weitere Möglichkeiten der Unstetigkeit:

... an nicht definierten („nicht erklärten") Stellen, z. B. $f(x) = \sqrt{x}$ für $x < 0$, kann keine Stetigkeit vorliegen.

... an „Sprungstellen", z. B. bei $f(x) = \frac{|x|}{x}$ an $x = 0$, mit unterschiedlichen „Grenzwerten"

... und vor allem bei trigonometrischen Funktionen, z. B. bei $f(x) = \tan x$ an $x = [90°] = 0{,}5\,\pi$.

Für die **Stetigkeit** an einer bestimmten Stelle ist erforderlich:

I die Definiertheit der Funktion an dieser Stelle $f(x_0)$

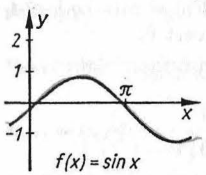
II die Existenz des Grenzwerts an dieser Stelle $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

III die Übereinstimmung beider $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

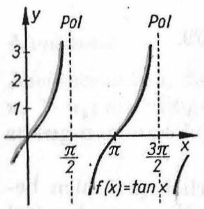
(Vergleichen Sie hierzu auch Aufg. 6.7. bis 6.9.)

Für die **Differenzierbarkeit** an einer Stelle ist die Stetigkeit dort unbedingte Voraussetzung, außerdem die Existenz eines eindeutigen Differentialquotienten!

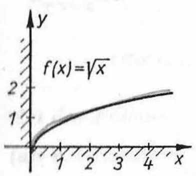
Übersicht über besondere Fälle der Stetigkeit und Differenzierbarkeit



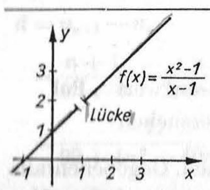
Funktion überall stetig, Verlauf periodisch, Nullstellen bei $x = \pm k\pi,\ k \in N$
Maxima bzw. Minima $f(x_M) = +1$ bzw. -1
$-1 \leqq f(x) \leqq +1$, überall differenzierbar



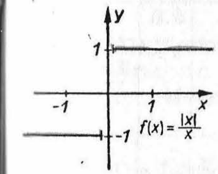
Verlauf der Funktion periodisch, an $x = \pm 0{,}5\,\pi;\ \pm 1{,}5\,\pi$ usw. nichtstetig und nicht differenzierbar, Nullstellen bei $x = \pm k\pi$, $k \in N$, keine Extrema, an den Polen nicht differenzierbar



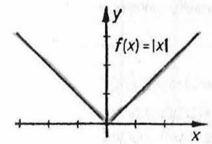
Für $x < 0$ nicht stetig, da dort nicht definiert. In der Umgebung von $x = 0$ nicht überall definiert, nämlich nicht für $x < 0$.
An $x \leqq 0$ nicht differenzierbar.



$x = 1$ ist eine Lücke, dort zunächst weder stetig noch differenzierbar. Existierender Grenzwert an $x = 1$ ermöglicht die zusätzliche Definition $f(1) = 2$, womit Unstetigkeit behoben. Berechnung des Grenzwerts kann nach DE L'HOSPITAL erfolgen.



An $x = 0$ unstetig, da dort nicht definiert. Kurve nähert sich von links und rechts zwei verschiedenen Punkten an. Unstetigkeit nicht hebbar. Obwohl Tangente dort vorhanden, nicht differenzierbar, da nicht stetig.



Überall stetig.
Aber an $x = 0$ nicht differenzierbar, dort liegen verschiedene Tangentenanstiege für die Kurve vor.

Folge	Tabellarische Darstellungen 1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	...	Verbale Darstellung	Rekursionsformel	Independente analytische Darstellung $n \in N \setminus \{0\}$	Monotonie	Art	Untere Grenze	Obere Grenze	Grenzwert $n \to \infty$
(a_n)	1	2	3	4	5	6	7	...	Folge d. natürlichen Zahlen	$a_{n+1} = a_n + 1$	$a_n = n$	mon.stg.	arith. $d = 1$	1		
(b_n)	1	3	5	7	9	11	13	...	Folge d. ungeraden pos. Zahlen ab 1	$b_{n+1} = b_n + 2$	$b_n = 2n - 1$	mon.stg.	arith. $d = 2$	1		
(c_n)	3	5	7	9	11	13	15	...	Folge d. ungeraden pos. Zahlen ab 3	$c_{n+1} = c_n + 2$	$c_n = 2n + 1$	mon.stg.	arith. $d = 2$	3		
(d_n)	2	3	5	7	11	13	17	...	Folge d. Primzahlen	nicht möglich	nicht möglich	mon.stg.		2		
(e_n)	3	3	3	3	3	3	3	...	....	$e_{n+1} = e_n$	$e_n = 3$	konstant	arith. $d = 0$ geom. $q = 1$	3	3	3
(f_n)	1	2	4	8	16	32	64	...	Folge der Potenzen der 2 ab $2^0 = 1$	$f_{n+1} = 2 \cdot f_n$	$f_n = 2^{n-1}$	mon.stg.	geom. $q = 2$	1		
(g_n)	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	...	Folge der reziproken Werte der natürlichen Zahlen		$g_n = \frac{1}{n}$	mon.fall.		0	1	0
(h_n)	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$	...	Folge der Quadratwurzeln d. nat. Zahlen		$h_n = \sqrt{n}$	mon.stg.		1		
(i_n)	108	36	12	4	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{27}$	...	...	$i_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot i_n$	$i_n = 108\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$	mon.fall.	geom. $q = \frac{1}{3}$	0	108	0
(j_n)	24	15	8	3	0	-1	0	...	...		$j_n = 35 - 12n + n^2$		arith. 2. Ordnung	-1		
(k_n)	$\frac{48}{23}$	$\frac{23}{13}$	$\frac{44}{29}$	$\frac{21}{16}$	$\frac{8}{7}$	1	$\frac{36}{41}$	...	...		$k_n = \frac{50 - 2n}{3n + 20}$			$-\frac{2}{3}$	$\frac{48}{23}$	$-\frac{2}{3}$
(l_n)	34	18	$\frac{118}{9}$	11	10	$\frac{86}{9}$	$\frac{198}{21}$	...	...		$l_n = \frac{2n^2 + 100}{3n}$			$\frac{198}{21}$		∞
(p_n)	$\frac{11}{7}$	-6	$-\frac{13}{17}$	$-\frac{7}{19}$	$-\frac{3}{13}$	$-\frac{8}{49}$	$-\frac{17}{137}$	...	...		$p_n = \frac{n + 10}{10 - 3n^2}$			-6	$\frac{11}{7}$	0

6.1. Als Werbung für den Zoo einer Großstadt will die Deutsche Post eine Tiermotivserie von 7 Postwertzeichen mit dem kleinsten Wert 5 Pfg. und dem größten 2,— M herausgeben. Die Werte sollen annähernd eine geometrische Folge bilden.

6.2. Die Jahresproduktion eines Betriebes betrug 1965 230000 M und 1971 345000 M. Welche Produktion ist für 1972 zu erwarten? Wie groß ist annehmbar das gesamte Produktionsvolumen von 1965 bis 1972 (einschließlich)?

6.3. Ein Sortiment Nägel für eine Haushaltspackung soll 9 verschiedene Sorten (in einer geometrischen Folge der Längen) enthalten. Der kleinste Nagel ist 8 mm lang, der größte 8 cm.

6.4. Untersuchen Sie die Eigenschaften der Folge

$$(a_n) = \left(\frac{10n}{n^2 - 20}\right).$$

6.5. Untersuchen Sie die Eigenschaften der Folge

$$(a_n) = \left(\frac{n^2 + 100}{2n^2 - 50}\right).$$

6.6. Untersuchen Sie die Eigenschaften der Folge

$(a_n) = ((-1)^n)$ und der Folge

$(b_n') = ((-0{,}5)^n)$.

6.7. Die Stetigkeit der Funktion

$f(x) = \frac{|x|}{x}$ für alle $x \in P \setminus \{0\}$ und $f(0) = 1$

ist an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ zu untersuchen.

6.8. Die Stetigkeit der Funktion

$g(x) = \frac{x^2 - 2x}{x}$ für alle $x \in P \setminus \{0\}$ und $g(0) = -1$

ist an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ zu untersuchen.

6.9. Die Stetigkeit der Funktion

$h(x) = \frac{x + \sqrt{-x}}{\sqrt{-x}}$ für alle reellen $x < 0$ und $h(0) = 1$ ist an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ zu untersuchen.

6.1. $a_1 = 5$ $\qquad a_n = a_1 q^{n-1}$

$a_7 = 5\,q^6 = 200$

$q^6 = 200 : 5 = 40 \qquad q = 1{,}848$

6.2. Eine geometrische Folge darf angenommen werden.

$a_1\,(1965) = 230$ TM
$a_7\,(1971) = 345$ TM $\qquad a_7 = 230\,q^6 = 345$
$q^6 = 1{,}500 \qquad q = 1{,}070$

6.3. $a_1 = 8 \qquad a_n = a_1 q^{n-1}$
$a_9 = 8 \cdot q^8 = 80$
$q^8 = 10 \qquad q = 1{,}335$

6.4.

n	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
a_n	− 0,53	− 1,25	− 2,73	− 10	+ 10	+ 3,75	2,42	1,82

9.	10.	12.	15.
1,49	1,25	0,97	0,74

6.5.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
− 2,1	− 2,5	− 3,4	− 6,4	—	+ 6,2	3,0	2,2

9.	10.	20.
1,62	1,3	0,67

5. Glied nicht definiert, ab 6. Glied streng monoton fallend.

Obere Grenze 6,2 und untere Grenze − 2,1.

6.6.

a_n	$-1;$	$1;$	$-1;$	$1;$	$-$	$\ldots$
b_n	$-0{,}5;$	$0{,}25;$	$-\frac{1}{8};$	$\frac{1}{16};$	$+$	$\ldots$

Die erste Folge ist nicht konvergent, sie ist nicht monoton.
Die zweite Folge ist auch nicht monoton, aber konvergiert gegen 0.

6.7. An beiden Stellen ist die Funktion definiert:

$f(0) = 1$ und $f(2) = 1$.

6.8. An beiden Stellen ist die Funktion definiert:

$g(0) = -1$ und $g(2) = 0$.

6.9. An der Stelle x_1 ist die Funktion definiert mit $h(0) = 1$.
An der Stelle $x_2 = 2$ und in der Umgebung ist die Funktion nicht definiert ($x < 0$).

6.1. $a_1 = 5;\ a_2 = 5 \cdot 1{,}848 = 9{,}24;$
$a_3 = 5 \cdot 3{,}420 = 17{,}10;\ a_4 = 5 \cdot 6{,}325 = 31{,}63;$
$a_5 = 5 \cdot 11{,}70 = 58{,}50;\ a_6 = 5 \cdot 21{,}65 = 108{,}25;\ a_7 = 200$

6.2. $a_8\,(1972) = 345 \cdot 1{,}070$
oder $\qquad = 230 \cdot 1{,}070^7 = 369{,}1$

$$s_8 = 230 \cdot \frac{1{,}070^8 - 1}{0{,}070} = 2349$$

6.3. $a_1 = 8;\ a_2 = 8 \cdot 1{,}335 = 10{,}7;\ a_3 = 8 \cdot 1{,}335^2 = 14{,}2$
$a_4 = 19{,}0;\ a_5 = 25{,}3;\ a_6 = 33{,}7;$
$a_7 = 45{,}0;\ a_8 = 59{,}9;\ a_9 = 80.$
Die logarithmische Berechnung ist empfehlenswert.

6.4. Ab 5. Glied streng monoton fallend.

d (ab 5. Glied)	− 6,25;	− 1,33;	− 0,60;	− 0,32;	...
q (ab 5. Glied)	0,38;	0,65;	0,75;	0,82;	...

$d < 0,\ q < 1$ unt. Grenze $a_4 = -10$, ob. Grenze $a_5 = 10$.
Grenzwert nach (3a) vermutet zu 0.

6.5. Nach (3b) Grenzwert vermutet zu 0,5. Zum Nachweis bildet man $(a_n - g) =$

$$= \left(\frac{n^2 + 100}{2n^2 - 50} - 0{,}5\right) = \left(\frac{62{,}5}{n^2 - 25}\right).$$

Das ist aber eine Nullfolge.

d (ab 6. Glied) $-3{,}2;\ -0{,}9;\ -0{,}48;\ \ldots$
q (ab 6. Glied) $0{,}48;\ 0{,}7;\ 0{,}77;\ \ldots$.

Die Partialsummenfolge kann nicht konvergieren.

6.6. Die Partialsummenfolge von (a_n) wurde von einem Mönch Guido Grandi 1750 in Paris fehlerhaft gedeutet mit

(1) $\quad -1 + (1-1) + (1-1) + \cdots \quad = -1$
(2) $\quad (-1+1) + (-1+1) + \cdots \quad = 0.$ Sie kann gar nicht konvergent sein.

Der Grenzwert der zweiten Folge ist 0, da es sich um eine geometrische Folge mit $|q| < 1$ handelt.

6.7. An $x_2 = 2$ existiert ein endlicher Grenzwert $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$.

An $x_1 = 0$ existiert kein einheitlicher Grenzwert.
Von rechts her (pos. x) strebt die Funktion der 1 zu, von links her der − 1.

6.8. An x_1 und x_2 existiert je ein endlicher Grenzwert. $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -2$

6.9. An $x_1 = 0$ existiert ein endlicher Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 1$.

6.1. Die Serie besteht aus den Markenwerten (in Pfg.)

5 / 10 / 15 / 30 / 60 / 110 / 200.

Der Wert 1,10 M wird aus praktischen Gründen besser durch 1,20 M ersetzt werden. Der gesamte Satz kostet 4,30 M bzw. 4,40 M.

6.2. Für 1972 ist eine Produktion von 369100 M zu erwarten.
Das durchschnittliche Wachstumstempo beträgt 107 %. Von 1965 bis 1972 wurde ein Gesamtproduktionsvolumen von etwa $2{,}35 \cdot 10^6$ Mark errechnet. Beachten Sie: Im Bereich des Anfangs- und Endwertes (also um 1965 und um 1971) werden die berechneten Werte den wahren am nächsten kommen.

6.3. Die Sortimentsauswahl sollte so gestaltet werden, daß vor allem viele Sorten kleinerer Nägel angeboten werden.

Die Längen betragen zweckmäßig (in mm):

8 / 11 / 14 / 19 / 25 / 34 / 45 / 60 / 80.

Eine arithmetische Folge hätte die Werte 8 / 17 / 26 / 35 / 44 / 53 / 62 / 71 / 80 ergeben, was ungünstiger ist.

6.4. Es handelt sich um eine ab 5. Glied (streng) monoton fallende Folge mit fallenden absoluten Abnahmen und fallenden relativen Abnahmen. Der Quotient aufeinanderfolgender Glieder nähert sich der 1. Untere Grenze ist -10, obere Grenze $+10$, der Grenzwert ist 0. Die Konvergenz erfolgt sehr langsam.

6.5. Es handelt sich ab dem 6. Glied um eine streng monoton fallende Folge mit fallenden abs. und rel. Abnahmen. Untere Grenze ist $-6{,}4$, ob. Grenze ist 6,2. Der Wert für $n = 5$ ist nicht definiert. Grenzwert ist 0,5. Die Partialsummenfolge divergiert.

6.6. Beide Folgen nicht monoton. Die erste ist divergent, die zweite konvergiert als geom. Folge gegen 0, auch ihre Partialsummenfolge ist konvergent mit dem Grenzwert $-\,^1/_3$.

6.7. An $x_1 = 0$ scheitert die Stetigkeit an dem Nichtvorhandensein eines einheitlichen Grenzwerts.
Wegen $f(2) = \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1$ ist die Funktion an $x_2 = 2$ stetig.

6.8. An $x_1 = 0$ scheitert die Stetigkeit an der Nichtübereinstimmung von $g(0) = -1 \neq \lim\limits_{x\to 0} g(x) = -2$.

An $x_2 = 2$ liegt Stetigkeit vor: $g(2) = \lim\limits_{x\to 2} g(x) = 0$ (Nullstelle).

6.9. An $x_1 = 0$ liegt wegen $h(0) = \lim\limits_{x\to 0} h(x) = 1$ Stetigkeit vor. An $x_2 = 2$ liegt keine Stetigkeit vor, weil diese Stelle außerhalb des Definitionsbereichs liegt.

6.10. Ein Arbeiter verdiente 1963 6420,— M, im Jahre 1970 dagegen 7764,— M. Der Verdienst erhöhte sich jährlich um den gleichen Betrag. Wieviel hat der Arbeiter insgesamt vom 1. 1. 1963 bis zum 31. 12. 1970 verdient?

6.11. Für die Entwicklung der Weltbevölkerung (in Mrd. Menschen) liegen folgende Angaben vor:

1910	1925	1940	1955	1970
1,62	1,86	2,20	2,73	3,62

Des weiteren wird der Energiebedarf in der Welt in Mrd. t Steinkohleneinheiten (SKT) angegeben

1900	1920	1940	1960
1,1	1,4	2,0	3,6

Untersuchen Sie die Eigenschaften beider Entwicklungen, und ziehen Sie Schlußfolgerungen!

(Angaben z. T. entnommen: URANIA 10/1966, S. 16)

6.12. Die Amplituden der Schwingungen eines Fadenpendels wurden für jede Periode (volle Schwingung) gemessen (in cm) und ergaben:

1.	2.	3.	4.	5.	6.
100	82	67	55	45	37

Beschreiben Sie diese Entwicklung.

Versuchen Sie, eine entsprechende Gesetzmäßigkeit analytisch anzugeben.

6.13. Beim radioaktiven Zerfall versteht man unter der Halbwertszeit die Zeit, in der eine bestimmte Menge eines radioakt. Isotops durch Strahlung auf die Hälfte reduziert wurde. Sie beträgt für das Isotop ^{211}Pb (β-Strahlung) 36 Minuten. Untersuchen Sie die Zerfallsfolge, und stellen Sie fest, wieviel von dem Stoff nach 4 Stunden noch vorhanden ist.

6.14. In der DDR gab es 1971 Münzen mit den Werten 1; 5; 10; 20; 50 Pfg. und 1,— M, 2,— M; 5,— M.[1])
Untersuchen Sie die Eigenschaften der Münzfolge, und ziehen Sie Schlußfolgerungen.

Seit 1972 werden auch 10-M- und 20-M-Münzen verwendet.

6.10. Es liegt eine arithmetische Folge vor.

$a_1\,(1963) = 6420,-$
$a_8\,(1970) = 6420 + 7d = 7764$
$7d = 1344 \qquad d = 192$

6.11. Energiebedarf und Bevölkerungszahl entwickelt sich annehmbar monoton steigend.

Energiebedarf:	d	0,3	0,6	1,6		
	q	1,27	1,43	1,80		
Bevölkerungszahl:	d	0,24	0,34	0,53	0,89	
	q	1,15	1,19	1,24	1,33	....

6.12. Es handelt sich um eine fallende Folge.

d	-18	-15	-12	-10	-8	....
q	0,82	0,82	0,82	0,82		

Also liegen fallende absolute Abnahmen und gleichbleibende relative Abnahmen vor.

6.13. Der Zerfall erfolgt nach einem exponentiellen Gesetz bzw. einer geometrischen Folge.

Man setze an: $a_1 = 100\ (\%) \qquad a_{37} = 50\ (\%)$

$a_{37} = a_1\,q^{36} \qquad q^{36} = 0{,}5 \qquad q = \sqrt[36]{0{,}5} = 0{,}981$
$\lg q = 0{,}9917-1$

6.14. Man könnte natürlich zunächst die absoluten und relativen Veränderungen (Zunahmen) untersuchen:

d	4	5	10	30	50	100	300
q	5,0	2,0	2,0	2,5	2,0	2,0	2,5

Es liegen also wachsende absolute und wechselnde relative Zunahmen vor. Schon hier wird deutlich, daß der Schritt von 1 Pfg. auf 5 Pfg. gegenüber den anderen zu groß ist! Überlegen Sie, was das bedeutet!

6.10. $s_8 = \dfrac{6420 + 7764}{2} \cdot 8 = 7092 \cdot 8 = 56736$

6.11. Beide Folgen weisen eindeutig steigende absolute und relative Zunahmen auf. Die Entwicklung erfolgt also stärker als exponentiell. (Es ist empfehlenswert, die Entwicklungen in einer Graphik darzustellen.) Man erkennt sofort, daß die Quotienten $\dfrac{\text{Weltenergiebedarf}}{\text{Weltbevölkerungszahl}} = Q$ ständig steigen.

Die Quotienten Q betragen etwa:	1910	1940	1970
	0,77	0,91	1,22

Man erkennt, daß Q etwa um 1945 den Wert 1 annimmt. Zu diesem Zeitpunkt wären also etwa je Weltbewohner 1 t SKE bereitzustellen gewesen.

6.12. Es handelt sich – wie physikalisch verständlich – um eine exponentiell gedämpfte Entwicklung!

Man kann also ansetzen: $A_n = A_0 e^{nx}$
$x = \ln (A_1 : A_0) = \ln 0{,}82 = -0{,}201 \approx -0{,}2;$

oder man setzt eine geometrische Folge an:
$A_n = A_0 q^n$ mit $q = A_1 : A_0 = 0{,}82.$

6.13. Die Zerfallsfolge (in Minutenabständen) gehorcht dem Gesetz:

$a_n = 100 \cdot 0{,}981^{n-1}.$

Nach 4 Stunden sind 240 Minuten vergangen.

$a_{241} \quad 100 \cdot 0{,}981^{240} \qquad \lg a_{241} = 0{,}0080$
$a_{241} \quad 1{,}02$

6.14. Um die Unterschiede besser beurteilen zu können, ist es zweckmäßig, eine (zwangsweise) geometrische Folge mit $a_1 = 1$ und $a_8 = 500$ anzusetzen.

$a_8 = a_1\,q^7;\ q^7 = 500;\ q = 2{,}43.$

Danach würden sich folgende Glieder (und gerundete Werte) für die Münzfolge ergeben:

Glieder	1	2,4	5,9	14,3	34,9	84,7	205,9	500
gerundet	1	2	6	14	35	85	206	500
Ist-Wert	1	5	10	20	50	100	200	500

Die Abweichungen sind im Anfangsbereich besonders stark.

6.10. Der Verdienst erhöht sich jährlich um 192,— M (das entspricht monatlich 16,— M), beginnend mit monatlich 535,— M (1963). Insgesamt wurden in den 8 Jahren 56736,— M verdient.

6.11. Auf Grund einer graphischen Darstellung kann für das Jahr 2000 abgeschätzt werden:

Weltenergiebedarf über 20 Mrd. (man rechnet mit 29 Mrd. t SKE).
Weltbevölkerung über 5 Mrd. (man rechnet mit 7 Mrd. Menschen).

Der Bedarf je Weltbewohner dürfte sich bis dahin auf den fünffachen Wert vom Beginn des Jahrhunderts gesteigert haben. Bei einer genaueren Abschätzung der Weltbevölkerungszahl müßte die unterschiedliche Entwicklung des Bevölkerungszuwachses in den einzelnen Erdteilen berücksichtigt werden (Asien!).

6.12. Die Entwicklung kann dargestellt werden entweder durch $A_n = 100\ e^{-0{,}2n}$ (wie in der Physik und Technik üblich)

oder durch $A_n = 100 \cdot 0{,}82^{n-1}$ (wie in der Mathematik üblich).

6.13. Die Zerfallsfolge gehorcht dem exponentiellen Gesetz $a_n = 100 \cdot 0{,}981^{\ n-1}$ oder $a_n = 100 \cdot e^{-0{,}0191n+0{,}0191}$.
Für die Zeit nach 4 Std. ergibt sich (nach beiden Formeln), daß noch 1,02 % des Stoffes vorhanden sind.

6.14. Es fällt auf, daß zwischen den Werten 1 Pfg. und 5 Pfg. eigentlich ein Zwischenwert fehlt. Deswegen ist kaum von einer guten geometrischen Staffelung zu sprechen. Überzeugen Sie sich davon, daß die Einführung der 20-Pfg.-Stücke vorteilhaft war und die Einführung von 2-Pfg.-Münzen eine bessere Angleichung an eine geometrische Folge brächte.

Zum Vergleich seien die Münzsysteme von 2 anderen Ländern angegeben:

SU	1	2	3	5	10	15	20	(50) Kopeken
ČSSR	5	10	25	50	100 Heller			

6.15. Eine aus 10 Gliedern bestehende Folge hat das Anfangsglied $a_1 = 1$ und das 10. Glied $a_{10} = 38{,}44$. Bestimmen Sie die Summe der 10 Glieder für den Fall, daß es sich a) um eine arithmetische, b) um eine geometrische Folge handelt!

6.16. Jemandem werden zwei Angebote zum Sparen gemacht:

a) Je 1000,— M sollen pro Jahr 50,— M als Zinsen gutgeschrieben werden. Die Zinsen werden nicht weiter verzinst.

b) 1000,— M Einlage sollen sich jährlich auf 103 % des vorherigen Standes erhöhen.

Beurteilen Sie die beiden Angebote.

***6.17.** Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2}$$

sind zu untersuchen.

6.18. Vergleichen Sie die Folge $(a_n) = \left(\frac{n+1}{n}\right)$ mit der Funktion $f(x) = \frac{x+1}{x}$.

6.19. Untersuchen Sie die Funktionen $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ und $g(x) = 2\frac{1}{x-2}$ auf Unstetigkeiten. (Hinweis: Erörtern Sie vor allem die Verhältnisse an $x = 2$.)

6.20. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x(x+2) \quad x \in P$.
Vergleichen Sie die Eigenschaften der Funktion $f(x)$ mit denen der Funktionen

$$g(x) = \frac{x^3 - 4x}{x-2} \text{ für } x \in P \setminus \{2\} \text{ und } g(2) = 8$$

sowie

$$h(x) = x\,\frac{x^2-4}{x-2} \text{ für } x \in P \setminus \{2\} \text{ und } h(2) = 6.$$

6.21. Gegeben ist eine Folge (a_n) durch $a_1 = 3$ und $a_{k+1} = a_k + (4k+3)$. Weisen Sie die Monotonie der Folge nach. Weisen Sie nach, daß die Folge auch dargestellt werden kann durch $b_n = 2n^2 + n$. Weisen Sie nach, daß es sich weder um eine arithmetische noch geometrische Folge handeln kann.

6.15. $a_1 = 1 \qquad a_{10} = 38{,}44$

arithmetisch: $38{,}44 = 1 + 9d$
$9d = 37{,}44 \qquad d = 4{,}16$

geometrisch: $38{,}44 = 1 \cdot q^9 \qquad q = \sqrt[9]{38{,}44} = 1{,}50$

6.16. Beim ersten Angebot handelt es sich um eine arithmetische Folge mit $a_1 = 1000$ und $d = 50$.
Beim zweiten Angebot liegt eine geometrische Folge mit $a_1 = 1000$ und $q = 1{,}03$ vor.

6.17. Die Nennerfunktion $N(x) = x^2 - 3x + 2$ hat Nullstellen an $x = 1$ und $x = 2$ und kann dargestellt werden als $N(x) = (x-1)(x-2)$. Die Zählerfunktion $Z(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ hat Nullstellen an $x = 1$, $x = -1$ und $x = -2$ und kann dargestellt werden als $Z(x) = (x+1)(x-1)(x+2)$.

6.18. Zunächst werden Wertetabellen aufgestellt:

n	1.	2.	3.	4.	...
a_n	2	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{4}$	...

x	$-3 \cdots -1$	0		$\cdots 0{,}5 \cdots 1$	2
y	$\frac{2}{3} \cdots$	0	nicht defin.	$\cdots 3 \cdots 2$	$1\frac{1}{2}$

Für alle $x \in N \setminus \{0\}$ stimmt die Wertetabelle der Funktion mit der der Folge überein. Die Folge fällt monoton. Untere Grenze der Folge ist 1, obere Grenze 2.

6.19. Unstetigkeiten liegen bei beiden Funktionen nur für $x = 2$ vor.

$f(2) = \frac{0}{0}$ unbestimmt; $\qquad g(2) = 2^{\frac{1}{0}}$ nicht definiert.

6.20. $f(x)$ ist überall stetig. $g(x)$ und $h(x)$ sind an der Stelle $x = 2$ beide unstetig. Es ergibt sich dort formal ein Wert $0 : 0$.
Eine weitere Untersuchung an dieser Stelle ist unter Zuhilfenahme der zusätzlich definierten Werte $g(2)$ und $h(2)$ erforderlich.

6.21. a) Es muß nachgewiesen werden $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in N$.
b) Es ist zu zeigen, daß (b_n) die gleiche Rekursionsformel und das gleiche Anfangsglied wie (a_n) hat.
c) Es muß an (a_n) oder (b_n) nachgewiesen werden, daß $a_{n+1} - a_n$ und $a_{n+1} : a_n$ beide nicht unabhängig von n sind.

6.15. arithmetisch: $s_{10} = \frac{1 + 38{,}44}{2} \cdot 10 = 197{,}2$

geometrisch: $s_{10} = 1 \cdot \frac{1{,}5^{10} - 1}{1{,}5 - 1} = 113{,}32$

Der Wert bei der arithmetischen Folge ist auch ohne vorherige Bestimmung von d berechenbar.

6.16. $a_p = 1000 + (n-1)\,50 = 950 + 50n$ (nach $n-1$ Jahren) bzw. (geometrisch)
$a_n = 1000 \cdot 1{,}03^{n-1}$

nach Jahren	arithm.	geom.	nach Jahren	arithm.	geom.
1	1050	1030	15	1750	1558
2	1100	1061	20	2000	1806
5	1250	1159	25	2250	2095
8	1400	1266	30	2500	2429
10	1500	1344	35	2750	2815
12	1600	1426	50	3500	4385

6.17. $x = 2;\ Z(2) \neq 0;\ N(2) = 0$
$x = 1;\ Z(1) = 0;\ N(1) = 0$
$x = -1;\ Z(-1) = 0;\ N(-1) \neq 0$
$x = -2;\ Z(-2) = 0;\ N(-2) \neq 0$

Der Differentialquotient lautet:

$$f'(x) = \frac{x^4 - 6x^3 + x^2 + 12x - 8}{(x^2 - 3x + 2)^2}$$

6.18. Der Grenzwert der Folge ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. Für die Funktion ergibt sich der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$. Im Gegensatz zur Folge ist hier auch $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ bildbar. Die Folge hat keine Nullstelle, die Funktion die Nullstelle $x_N = -1$. Einen Pol findet man für die Funktion: $x_P = 0$. Kurvenbild der Funktion ist eine Hyperbel. Die Asymptoten sind die y-Achse und die Gerade $g(x) = 1$.

6.19. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ existiert mit $f(2) = 4$. Die Unstetigkeit von $f(x)$ ist hebbar.
Man vergleiche $f(1{,}9) = 3{,}9$ und $f(2{,}1) = 4{,}1$.
Dagegen ist $g(1{,}9) \approx 0{,}001$ und $g(2{,}1) \approx 1000$.
Hier liegt offenbar eine Sprungstelle vor. (Vergleichen Sie das Bild auf Seite 107).

6.20. Mit Ausnahme des zusätzlich definierten Wertes stimmen die Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ miteinander überein. Beide stimmen, wenn $x \neq 2$, auch mit $f(x)$ in jeder Weise überein. Als Grenzwert ergibt sich $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = \lim\limits_{x\to 2} h(x) = 8$, übrigens gleich $f(2)$.

6.21. a) $a_{n+1} > a_n$ gilt, wenn $4n + 3 > 0$, also $n > -0{,}75$
b) $b_{n+1} - b_n = 2(n+1)^2 + n + 1 - 2n^2 - n = 4n + 3 = a_{n+1} - a_n$ und
$b_1 = 2 + 1 = 3$
c) $a_{n+1} - a_n = 4n + 3 = h(n)$
$a_{n+1} : a_n = (2n^2 + 5n + 3) : (2n^2 + n) = k(n)$

Der **Quotient** hat den Grenzwert 1.

6.15. Die Summe der ersten zehn Glieder unterscheidet sich wesentlich, je nachdem es sich um eine arithmetische (197,2) oder eine geometrische (113,32) Folge/Reihe handelt. Zum Vergleich einige Glieder:

	2.	5.	8.	10.
arithm.	5,16	17,64	30,12	38,44
geom.	1,5	5,06	17,08	38,44

6.16. Bis zu 33 Jahren Laufzeit ist das erste Angebot günstiger. Bei etwa 17 Jahren ist der Unterschied am größten. Bei 33 Jahren unterscheiden sich beide Angebote im aufgelaufenen Kapital nur um 3,— M; a) 2650,— M, b) 2653,— M. Bereits nach 50 Jahren ist Vorschlag b) um 25 % überlegen. Die vergleichende Beziehung $10000 \cdot 1{,}03^{n-1} = 950 + 50n$ ist nur graphisch oder durch systematisches Probieren zu lösen.

6.17. Es liegt überall außer $x = 1$ und $x = 2$ Stetigkeit und Differenzierbarkeit vor. An $x = 2$ liegt ein Pol. An $x = 1$ liegt eine hebbare Unstetigkeit. Dort müßte der Funktionswert $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = -6$ zusätzlich definiert werden. Die Differenzierbarkeit könnte durch $f'(1) = -11$ zusätzlich gewährleistet werden.

6.18. Jede Folge ist eine Funktion, der Definitionsbereich der Funktion ist aber größer. Der Pol bei $x = 0$ tritt bei der Folge wegen $0 \notin N \setminus \{0\}$ nicht in Erscheinung. Der Grenzwert für n bzw. x nach ∞ ist der gleiche, nämlich 1. Obere und untere Grenze existieren bei der Funktion nicht, wohl aber bei der Folge.

6.19. Zur Untersuchung der Unstetigkeit ist das Verhalten in der Nähe von $x = 2$ zu überprüfen:
$f(1{,}9) = 3{,}9$; $f(2{,}1) = 4{,}1$; aber $g(1{,}9) \approx 0{,}001$; $g(2{,}1) \approx 1000$. Die Unstetigkeit an $x = 2$ ist bei $f(x)$ hebbar, bei $g(x)$ liegt dort ein Pol vor.

6.20. In allen Punkten außer $x = 2$ stimmen die drei Funktionen überein. Die Stetigkeit an $x = 2$ wäre noch gegeben, wenn

a) $g(2) = 8$ bzw. $h(2) = 6$ definiert ist,

b) $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 8$ bzw. $\lim\limits_{x\to 2} h(x) = 8$ existiert und

c) der definierte Wert mit dem Grenzwert übereinstimmt. Das ist bei $g(x)$ der Fall, nicht aber bei $h(x)$.

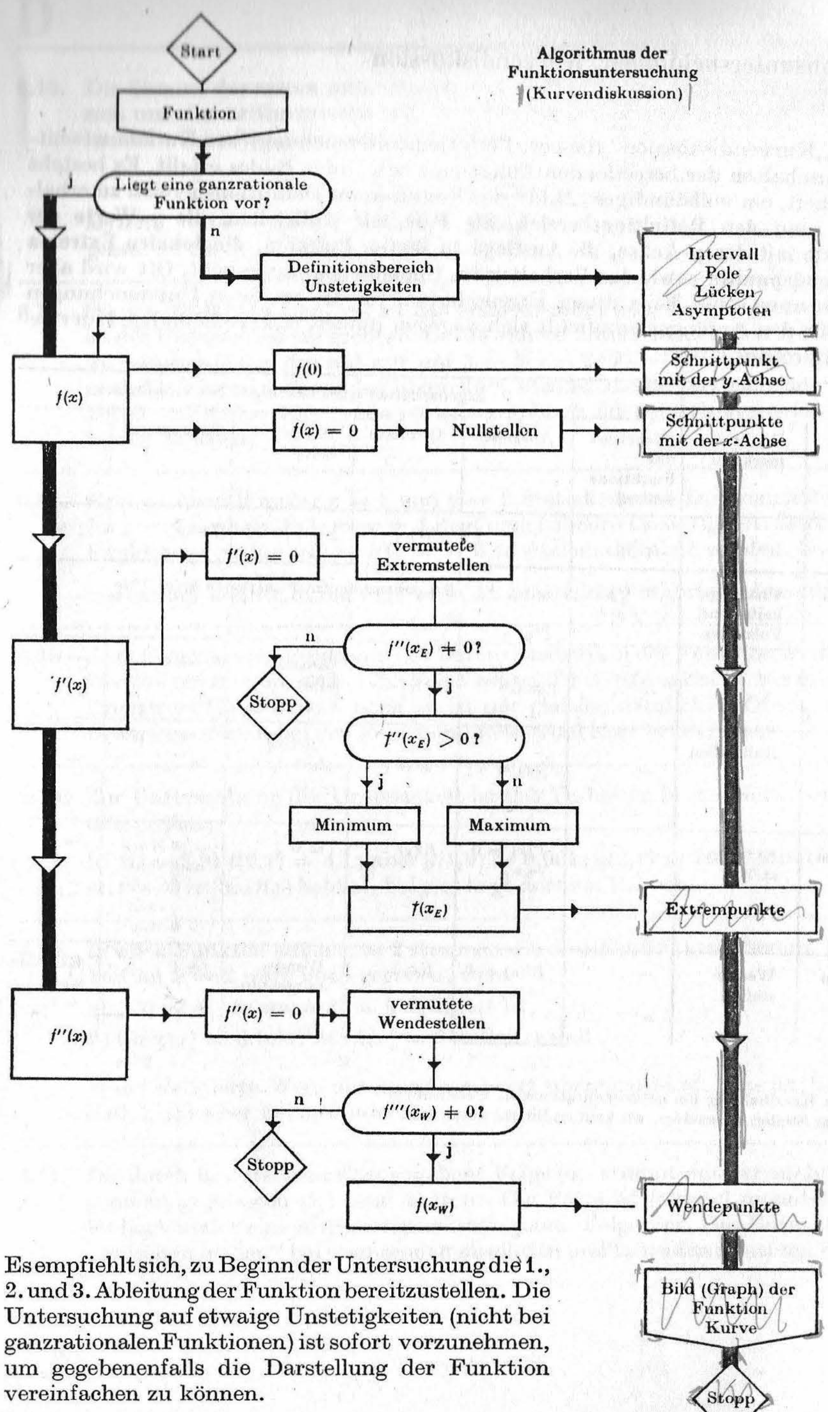
6.21. Die durch Rekursionsformel gegebene Folge (a_n) stimmt mit der analytisch-independent gegebenen (b_n) total überein. Die Folge ist (streng) monoton steigend. Es liegt weder eine arithmetische noch geom. Folge vor. Die Entwicklung liegt „zwischen beiden“ bei wachsenden absoluten und fallenden relativen Zunahmen.

7. Funktionsuntersuchungen, Kurvendiskussion

Durch eine „Kurvendiskussion“ (besser: Funktionsuntersuchung) werden alle wesentlichen Eigenschaften der betreffenden Funktion f bzw. ihres Bildes erfaßt. Es besteht die Möglichkeit, ein vollständiges „Bild“ der Funktion im Definitionsbereich zu erhalten, indem man **den Definitionsbereich, die Pole, die Nullstellen, die y-Werte der Schnittpunkte mit der y-Achse, die Anstiege in diesen Punkten, die lokalen Extrema und die Wendepunkte sowie das Verhalten im Unendlichen** untersucht. Oft wird aber nur das Erkennen eines Teils dieser Eigenschaften für die weiteren Untersuchungen benötigt. Für den Anfänger empfiehlt sich dagegen immer, eine vollständige Kurvendiskussion durchzuführen:

			Eigenschaften eines beliebigen Kurvenpunktes				
Kurveneigenschaft	Funktionsmerkmal	(Kehrwert des Funktionswertes)	Abszisse	Ordinate	Anstieg $\tan\varphi$	Krümmung	
		$\frac{1}{f(x)}$	x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$
Unstetigkeiten und Pole	Unstetigkeits- und Polstellen	$= 0$[1] $\to x_U$	$[x_U]$ *Bei ganzrationalen Funktionen keine Pole*	—	—	—	—
Schnittpunkt mit der y-Achse	—	—	$= 0$	$f(0)$	Anstieg dort $f'(0)$	—	—
Schnittpunkt(e) mit der x-Achse	Nullstellen	—	$f(x) = 0$ $\to x_N$	$= 0$	Anstieg dort $f'(x_N)$	—	—
Extrempunkte	Extremstellen	—	$f'(x) = 0$ $\to x_E$	$f(x_E)$	$= 0$	< 0 Max. $= 0$ kein Nachweis > 0 Min.	—
Wendepunkte	Wendestellen	—	$f''(x) = 0$ $\to x_W$	$f(x_W)$	Wendetangentenanstieg $f'(x_W)$	$= 0$	Existenz, wenn $\neq 0$

[1]) Praktische Handhabung bei gebrochenrationalen Funktionen.
Es sind die Stellen zu suchen, wo kein endlicher Grenzwert existiert.



Es empfiehlt sich, zu Beginn der Untersuchung die 1., 2. und 3. Ableitung der Funktion bereitzustellen. Die Untersuchung auf etwaige Unstetigkeiten (nicht bei ganzrationalen Funktionen) ist sofort vorzunehmen, um gegebenenfalls die Darstellung der Funktion vereinfachen zu können.

Beispiel: Kurvendiskussion der ganzrationalen Funktion

$$y = f(x) = 0{,}04\,x^4 - x^2 + 0{,}96$$

Ableitungen:
$$y' = f'(x) = 0{,}16x^3 - 2x$$
$$y'' = f''(x) = 0{,}48x^2 - 2$$
$$y''' = f'''(x) = 0{,}96x$$

Schnittpunkte mit den Achsen

S_x: $y = 0$ — $x^2 = z$ substituieren

$$0{,}04x^4 - x^2 + 0{,}96 = 0$$
$$0{,}04z^2 - z + 0{,}96 = 0$$
$$\frac{1}{25}z^2 - z + \frac{24}{25} = 0$$
$$z^2 - 25z + 24 = 0$$
$$z_{1,2} = \frac{25}{2} \pm \sqrt{\frac{625}{4} - \frac{96}{4}} = \frac{25}{2} \pm \frac{23}{2}$$

$z_1 = x^2 = 24$ $\quad z_2 = x^2 = 1$

$x_1 = \sqrt{24}$; $\quad x_2 = -\sqrt{24}$; $\quad x_3 = 1$; $\quad x_4 = -1$

$S_{x1}(4{,}899; 0)$; $\quad S_{x2}(-4{,}899; 0)$; $\quad S_{x3}(1; 0)$; $\quad S_{x4}(-1; 0)$

S_y: $\quad x = 0$; $\quad f(0) = 0{,}96$; $\quad S_y(0;\ 0{,}96)$

Lokale Extrempunkte

$y' = 0$
$$0{,}16x^3 - 2x = 0$$
$$x(0{,}16x^2 - 2) = 0 \qquad x_{E1} = 0$$
$$x^2 = \frac{25}{2} \qquad x_{E2} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$$
$$x_{E3} = -\frac{5}{2}\sqrt{2}$$

$y'' \neq 0$
$$f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$$
$$f''\left(\frac{5}{2}\sqrt{2}\right) = 4 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$$
$$f''\left(-\frac{5}{2}\sqrt{2}\right) = 4 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$$

$H(0;0{,}96)$; $\quad T_1(3{,}54; -5{,}29)$; $\quad T_2(-3{,}54; -5{,}29)$

Wendepunkte

$y'' = 0$
$$0{,}48\,x^2 - 2 = 0$$
$$x^2 = \frac{50}{12} \qquad x_{W1} = \frac{5}{6}\sqrt{6}$$
$$x_{W2} = \frac{-5}{6}\sqrt{6}$$

$y''' \neq 0$
$$f'''\left(\frac{5}{6}\sqrt{6}\right) \neq 0$$
$$f'''\left(\frac{-5}{6}\sqrt{6}\right) \neq 0$$

$W_1(2{,}041; -2{,}51)$; $\quad W_2(-2{,}041; -2{,}51)$

Anstiegswinkel in den Wendepunkten

$f'(2{,}041) = -2{,}72 = \tan\alpha_{W1}$; $\quad \alpha_{W1} = 110{,}19°$

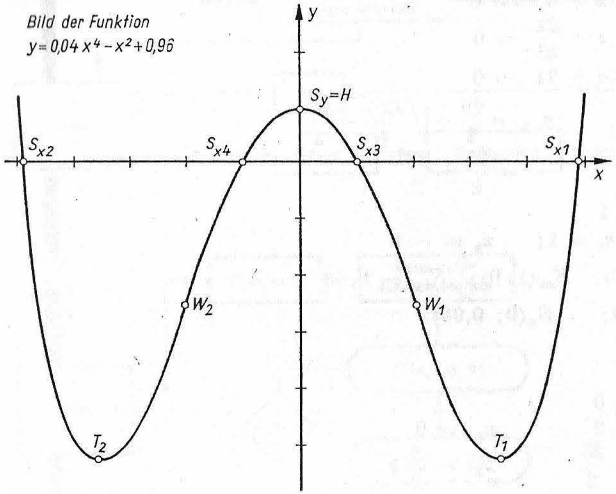
$f'(-2{,}041) = 2{,}72 = \tan\alpha_{W2}$; $\quad \alpha_{W2} = 69{,}81°$

Verhalten im Unendlichen

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty}(0{,}04x^4 - x^2 + 0{,}96)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(0{,}04 - \frac{1}{x^2} + \frac{0{,}96}{x^4}\right)\cdot \lim_{x\to\pm\infty} x^4$$

$$= 0{,}04 \cdot \lim_{x\to\pm\infty} x^4 = \pm\infty$$



Beispiel: Kurvendiskussion der gebrochenrationalen Funktion

$$\boldsymbol{y = f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{x^2 - 4}{2x^2 - 2}}$$

$N(x) = 2x^2 - 2 = 0$

$x_1 = +1;\ x_2 = -1$ Pole

Definitionsbereich:

$x \in P \setminus \{-1; +1\}$

Ableitungen

$$y' = f'(x) = \frac{2x\,(2x^2-2) - (x^2-4)\,4x}{(2x^2-2)^2} = \frac{12x}{(2x^2-2)^2}$$

$$y'' = f''(x) = \frac{12\,(2x^2-2)^2 - 12x\cdot 2\,(2x^2-2)\boxed{4x}}{(2x^2-2)^4}$$

Kettenregel beachten

$$= -\frac{72x^2+24}{(2x^2-2)^3}$$

$$y''' = f'''(x) = -\frac{144x\,(2x^2-2)^3 - (72x^2+24)\,3\,(2x^2-2)^2\boxed{4x}}{(2x^2-2)^6}$$

Kettenregel beachten

$$= \frac{576x^3+576x}{(2x^2-2)^4}$$

Schnittpunkte mit den Achsen

S_x: $Z(x_0) = x^2 - 4 = 0 \qquad x^2 = 4$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$

$N(x_0) = 2x^2 - 2 \neq 0 \qquad N(2) = 6 - 2 \neq 0$

$N(-2) = 6 - 2 \neq 0 \qquad S_{x1}(2;0),\ S_{x2}(-2;0)$

$$S_y: x_S = 0,\ y_S = \frac{x_S^2 - 4}{2x_S^2 - 2} = \frac{-4}{-2} = 2 \quad S_y\,(0;2)$$

Extrempunkte

$$y' = f'(x_E) = \frac{12x_E}{(2x_E^2-2)^2} = 0 \quad x_E = 0 \quad y_E = f(x_E) = 2$$

und $N(0) = 4 \neq 0$

$y'' = f''(0) = 3 > 0$ (Min.) $\qquad T(0;2)$

Wendepunkte keine, denn $f''(x) = 0$ ohne reelle Lösungen.

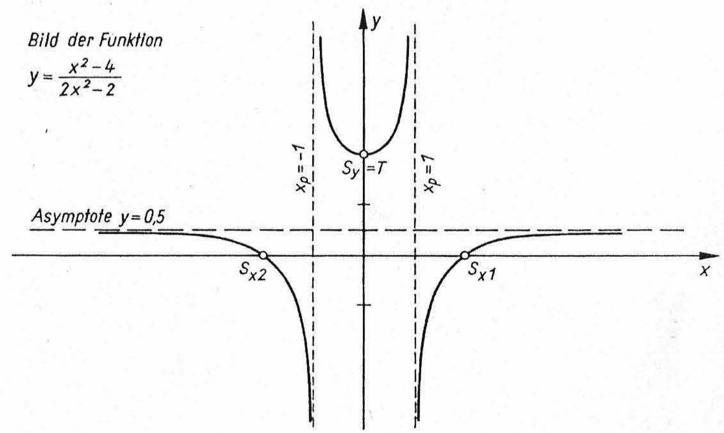
Asymptotengleichung Nebenrechnung

$$y = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{x^2-4}{2x^2-2} \qquad (x^2-4):(2x^2-2) = \frac{1}{2} + \frac{-3}{2x^2-2}$$

$$\frac{-(x^2-1)}{-3}$$

$$y = g(x) + r(x) = \frac{1}{2} + \frac{-3}{2x^2-2}$$

$y = g(x) = \frac{1}{2}$ (Asymptotengleichung)



7.1. Untersuchen Sie den Verlauf des Bildes der Funktion

$$y = f(x) = x^3 - 2.$$

7.2. Untersuchen Sie die Eigenschaften der gebrochenrationalen Funktion

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 9}{3x^2 - 3},$$ und skizzieren Sie den Verlauf ihres Bildes.

7.3. Die Funktion $f(x) = x^3 + x^2 + ax$ mit $a > 0$ soll einen Horizontalwendepunkt haben. Bestimmen Sie den Anstieg der Funktion in ihrer größten Nullstelle.

7.4. Charakterisieren Sie die Eigenschaften des Bildes der Funktion

$$y = f(x) = \frac{x^3 - 8}{x}.$$

7.5. Untersuchen Sie die Eigenschaften der Funktion

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4},$$

und beschreiben Sie den Verlauf ihres Bildes.

7.6. Führen Sie eine Kurvendiskussion zur gebrochenrationalen Funktion

$$s = s(t) = \frac{t}{t^2 + 4}$$

durch.

7.1. Es liegt eine ganzrationale Funktion 3. Grades vor.

$f'(x) = 3x^2 \qquad f''(x) = 6x \qquad f'''(x) = 6$

$f(0) = -2$

$f(x) = 0$ führt zu $x^3 = 2$; $\quad x_N = 1{,}26$.

7.2. Es liegt eine gebrochenrationale Funktion vor.

$N(x) = 3x^2 - 3 = 3\,(x^2 - 1)$.

Durch $N(x) = 0$ erhält man Polstellen für $x = \pm 1$

$$f'(x) = \frac{48x}{(3x^2-3)^2} = \frac{16x}{3\,(x^2-1)^2} \qquad f''(x) = \frac{-432x^2 - 144}{(3x^2-3)^3}$$

Dritte Ableitung nicht erforderlich, $f(0) = 3$.

7.3. Es liegt eine ganzrationale Funktion dritten Grades vor.

$f'(x) = 3x^2 + 2x + a \qquad f''(x) = 6x + 2$

$f'''(x) = 6 \qquad f(0) = 0$

$f(x) = 0$ führt zu $x^3 + x^2 + ax = 0$. $x_{N1} = 0$; $x_{N2,3} = -0{,}5 \pm 0{,}5\sqrt{1 - 4a}$.

7.4. An der Stelle $x = 0$ erkennt man sofort einen Pol. Nullstelle wird durch $Z(x) = 0$; $x^3 = 8$; $x_N = 2$ gefunden.

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 8}{x^2}; \quad f''(x) = \frac{-16x + 2x^4}{x^4} \text{ oder } f''(x) = \frac{-16 + 2x^3}{x^3}.$$

7.5. $Z(x) = 0$ führt zu $x^2 = 4$; $x_{N1,2} = \pm 2$.
$N(x) = 0$ führt zu $x^2 = -4$ ohne reelle Lösungen, also keine Pole. $f(0) = -1$.

$$f'(x) = \frac{16x}{(x^2+4)^2}; \quad f''(x) = \frac{-48x^2 + 64}{(x^2+4)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{192x^3 - 768x}{(x^2+4)^4}.$$

7.6. Da die Nennerfunktion den Wert 0 nicht annehmen kann, liegen keine Pole vor. Einzige Nullstelle ist $t_N = 0$. $s(0) = 0$.

$$s'(t) = \frac{-t^2 + 4}{(t^2+4)^2}; \quad s''(t) = \frac{2t^3 - 24t}{(t^2+4)^3};$$

$$s'''(t) = \frac{-6t^4 + 96t^2 - 96}{(t^2+4)^4}.$$

7.1. $f'(x) = 0$ führt zu $3x^2 = 0$, also $x = 0$.
$f''(0) = 0$, also kein *echtes* Extremum.
$f''(x) = 0$ führt zu $6x = 0$, $x_W = 0$.
$f'''(0)$ ungleich 0, $f(0) = -2$, $f'(0) = 0$, also Horizontalwendepunkt.

7.2. $f'(x) = 0$ führt zu $48x = 0$, $x = 0$.

$$f''(0) = \frac{-144}{-27} = 16/3 > 0; \text{ Minimum.}$$

$f''(x) = 0$ führt zu $432x^2 = -144$ ohne reelle Lösungen.

7.3. $f'(x) = 0$ führt zu $3x^2 + 2x + a = 0$,

$$x = -\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{1-3a}}{3}$$

$f''(x) = 0$ führt zu $6x = -2$, $x = -1/3$.

$$f'''\left(-\frac{1}{3}\right) = 6 \neq 0$$

$$f'\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} + a \text{ soll gleich 0 sein,}$$

also $a = 1/3$, $f(-1/3) = -1/27$.

7.4. $f'(x) = 0$ führt zu $x^3 = -4$; $x = -1{,}59$.
$f''(x) = 0$ liefert
Wendepunkt für $x_W = 2$.

7.5. $f'(x) = 0$ führt zu $x = 0$ $(y = -1)$, Minimum.

$f''(x) = 0$ führt zu $x = \pm\frac{2}{3}\sqrt{3}$

$$f\left(+\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = -0{,}5$$

$$f\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = -0{,}5 \text{ aus Symmetriegründen.}$$

7.6. $s'(t) = 0$ führt zu $t = \pm 2$

$s''(t_E) = \pm 1/16$

$s(t_E) = \pm\frac{1}{4}$

$s''(t) = 0$ führt zu $t_{W1} = 0$ und $t^2 = 12$, also

$t_{W2} = +3{,}46$; $t_{W3} = -3{,}46$.

7.1. Das Bild der Funktion ist ständig steigend. Im Punkt $(0; -2)$ liegt ein Horizontalwendepunkt. Der Schnittpunkt mit der x-Achse hat die Koordinaten $(1{,}26; 0)$. Es handelt sich um das 2 Einheiten nach unten verschobene Bild der allgemeinen kubischen Normalparabel.

7.2. Es liegen zwei Polstellen $x_P = \pm 1$ vor, ferner zwei Nullstellen $x_N = \pm 3$. Die y-Achse wird vom Bild in $(0; 3)$ geschnitten. Dort liegt ein Minimum. Eine Asymptote ergibt sich durch $(x^2 - 9) : (3x^2 - 3) = \frac{1}{3} + \frac{-8}{(3x^2 - 3)}$
Asymptotengleichung: $y = \frac{1}{3}$ (Bild: siehe S. 107).

7.3. Die Forderung nach dem Horizontalwendepunkt verlangt $a = 1/3$. Dann befindet sich im Punkt $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{27}\right)$ ein Horizontalwendepunkt, was man auch an der Doppellösung der quadratischen Gleichung für vermutete Extremstellen erkennt. Extrema liegen nicht vor. Die Kurve verläuft durch den Ursprung.

7.4. Polstelle $x_P = 0$. Die Kurve nähert sich asymptotisch dem Bild der Funktion $y = x^2$ (Asymptotengleichung). Ein Minimum liegt im Punkt $(-1{,}59; 7{,}55)$. Der Wendepunkt liegt auf der x-Achse $(2; 0)$.
(Bild: siehe S. 107.)

7.5. Das Bild der Funktion hat als obere Begrenzungsgerade die Asymptote $y = 1$. Schnittpunkte mit der x-Achse liegen bei $x = \pm 2$, die y-Achse wird im Minimum $(0; -1)$ geschnitten. Wendestellen liegen bei $x = \pm 1{,}155$; $y_W = 0{,}5$. Die Kurve ist symmetrisch zur y-Achse (Bild: siehe S. 107).

7.6. Das Bild der Funktion ist zentralsymmetrisch zum Ursprung. Es steigt nicht über den Maximalwert $\frac{1}{4}$ und sinkt nicht unter das Minimum $(-2; -0{,}25)$. Ein Wendepunkt ist der Ursprung. Zwei weitere Wendepunkte existieren für $x = \pm 3{,}46$. Die Kurve nähert sich beidseitig der t-Achse (Bild auf S. 107).

7.7. Diskutieren Sie den Verlauf des Bildes der Funktion
$f(x) = 0{,}75\,x^4 + x^3 - 3x^2 + 1{,}25$.

7.8. Eine gebrochenrationale Funktion ist gegeben durch
$$y = f(x) = \frac{24\,x}{(x+3)^2}.$$
Untersuchen Sie den Verlauf des Bildes dieser Funktion.

***7.9.** Untersuchen Sie die Eigenschaften der Funktion $y = f(x) = \frac{ax}{(bx+c)^2}$.
$a, b, c \in P$;
b und c nicht beide gleich 0, $a \neq 0$.

7.10. Gegeben ist die trigonometrische Funktion $y = f(x) = \sin x + \cos x$ im Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$.
Untersuchen Sie ihre Eigenschaften.

7.11. Ein technisch-physikalischer Vorgang wird durch die Funktion $(t \geqq 0)$
$y = f(t) = e^{-0{,}1t} \cos t$
beschrieben.
Untersuchen Sie die Eigenschaften des Verlaufs des Bildes dieser Funktion.

7.12. Untersuchen Sie die Eigenschaften der Funktion $y = f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{0{,}5} + x^{-0{,}5}$ für $x > 0$.

7.7. $f(0) = 1{,}25$ $\quad f'(x) = 3x^3 + 3x^2 - 6x$

$f''(x) = 9x^2 + 6x - 6$

$f'''(x) = 18x + 6$

Lösungen von $f(x) = 0$: $x_1 = 1$ (durch Probieren), ebenfalls $x_2 = 1$; $x_3 = -0{,}61$; $x_4 = -2{,}72$.

7.8. $f'(x) = 24\,\dfrac{3-x}{(x+3)^3}$ $\qquad f''(x) = 48\,\dfrac{x-6}{(x+3)^4}$

$f'''(x) = 144\,\dfrac{9-x}{(x+3)^5}$ $\qquad f(0) = 0$

Nullstelle $x_N = 0$

Pol bei $x = -3$

7.9. $f'(x) = a\,\dfrac{c-bx}{(c+bx)^3}$ $\qquad f''(x) = 2ab\,\dfrac{bx-2c}{(c+bx)^4}$

$f'''(x) = 6ab^2\,\dfrac{3c-bx}{(c+bx)^5}$ $\qquad f(0) = 0$

Nullstelle $x_N = 0$

Pol bei $x = -\dfrac{c}{b}$

7.10. $f'(x) = \cos x - \sin x$

$f''(x) = -\sin x - \cos x$

$f'''(x) = -\cos x + \sin x$

$f(0) = 1$ $\quad f(x) = 0 \Rightarrow \sin x + \cos x = 0$ (dividiert durch $\cos x$)

$\tan x = -1$ ($\cos x \neq 0$) (s. Abschn. 5.)

führt zu den Nullstellen $x_{N1} = 0{,}75\pi$ (135°) und $x_{N2} = 1{,}75\,\pi$ (315°) im angegebenen Intervall.

7.11. $f'(t) = -e^{-0{,}1t}(0{,}1\cos t + \sin t)$

$f''(t) = e^{-0{,}1t}(-0{,}99\cos t + 0{,}2\sin t)$

$f'''(t) = e^{-0{,}1t}(0{,}299\cos t + 0{,}97\sin t)$

$f(t) = 0$ an allen Stellen, wo $\cos t = 0$

$f(0) = 1$

7.12. $f'(x) = 0{,}5x^{-1{,}5} - 0{,}5x^{-1{,}5}$

$f''(x) = -0{,}25\,x^{-1{,}5} + 0{,}75x^{-2{,}5}$

$f'''(x) = 0{,}375x^{-2{,}5} - 1{,}875x^{-3{,}5}$

$f(0)$ nicht definiert [$f(x)$ nur definiert für $x > 0$]

$f(x) = 0$ nicht reell lösbar.

7.7. $f'(x) = 0 \Rightarrow x_{E1} = 0$ $\qquad x_{E2} = 1$ $\qquad x_{E3} = -2$

$f(0) = 1{,}25$ $\qquad f(1) = 0$ $\qquad f(-2) = -6{,}75$

Max., weil $f''(0) < 0$. Min., weil $f''(1) > 0$. Min., weil $f''(-2) > 0$.

$f''(x) = 0 \Rightarrow x_{W1} = 0{,}55$; $\quad x_{W2} = -1{,}22$.

7.8. $f'(x) = 0 \Rightarrow x_E = 3$; $y_E = 2$; $f''(3) = -1/9$; Max.

$f''(x) = 0 \Rightarrow x_W = 6$; $f(6) = 16/9$

$f'(6) = -8/81$

7.9. $f'(x) = 0 \Rightarrow x_E = \dfrac{c}{b}$; $\quad y_E = \dfrac{a}{4bc}$ $\qquad$ Max., weil $f''\left(\dfrac{c}{b}\right) < 0$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x_W = \dfrac{2c}{b}$; $\quad y_W = \dfrac{2a}{9bc}$

$f'(x_W) = -\dfrac{a}{27c^2}$

7.10. $f'(x) = 0 \Rightarrow \sin x = \cos x$ $\qquad x_{E1} = 0{,}25\,\pi$ (45°)

$\Rightarrow \tan x = 1$ $\qquad x_{E2} = 1{,}25\,\pi$ (225°)

$f''(x_{E1}) < 0$ Max. $\; y_{E1} = \sqrt{2}$

$f''(x_{E2}) > 0$ Min. $\; y_{E2} = -\sqrt{2}$

$f''(x) = 0 \Rightarrow \sin x = -\cos x \Rightarrow \tan x = -1$.

Die Nullstellen sind also gleichzeitig Wendestellen.

7.11. Der erste Faktor kann wegen $e^z \neq 0$ für endliche z nicht gleich Null werden, deshalb keine weiteren Nullstellen.

Extrema:

$f'(t) = 0$ $\qquad 0{,}1\cos t = -\sin t$

$t = (174{,}29°) \approx 3{,}04$

Minimum bei $t = 3{,}04 + 2\,k\pi$

Maximum dagegen für $6{,}18 + 2k\pi$

unter Berücksichtigung der Periodizität.

Aus $f''(t) = 0$ ergibt sich $0{,}99\cos t = 0{,}2\sin t$ mit Lösungen für (78,6°) $1{,}371 + k\pi$.

7.12. $f'(x) = 0$ $\quad$ führt zu $x = x\sqrt{x}$ $\quad x_E = 1$

$f''(1) = 0{,}5 > 0$ Minimum

$f(1) = 2$

$f''(x) = 0$ führt zu $x = 3$

$f(3) = \dfrac{4}{3}\sqrt{3}$.

D

7.7. Das Bild der Funktion $f(x)$ schneidet die y-Achse bei 1,25. Nullstellen liegen bei 1 (doppelt), $-0{,}61$ und $-2{,}72$. In der Doppelnullstelle liegt eine Extremstelle (Minimum). Ein Maximum liegt bei $x = 0$, ein Minimum bei $x = -2$. Wendepunkte existieren für $x = 0{,}55$ und $x = -1{,}22$ (Bild s. S. 107).

7.8. Die zugehörige Kurve besteht aus zwei Teilen, die durch den Pol bei $x = -3$ getrennt sind. Die Kurve geht durch den Ursprung, hat bei $x = 3$ ein Maximum und bei $x = 6$ einen Wendepunkt. Für x nach $\pm\infty$ nähert sich die Kurve der x-Achse (Bild s. S. 107).

7.9. Es liegen qualitativ dieselben Erscheinungen wie bei der Funktion Aufgabe 7.8. vor.

7.10. Es entsteht eine Überlagerung zweier sinusartiger Kurven. Schnittpunkt mit der y-Achse (0; 1). Schnittpunkte mit der x-Achse bei $0{,}75\,\pi$ und $1{,}75\,\pi$, das sind gleichzeitig Wendepunkte. Extrema liegen bei $(0{,}25\,\pi;\ \sqrt{2})$ und $(1{,}25\,\pi;\ -\sqrt{2})$ (Bild s. S. 107).

7.11. Die cos-Kurve liegt innerhalb der durch das Exponentialgesetz gegebenen Begrenzung.
Die Schnittpunkte mit der x-Achse sind die gleichen wie bei der cos-Funktion. Extrema liegen bei 3,04 und $6{,}18 + 2\,k\pi$ (Bild s. S. 107).

7.12. Ein Schnitt mit der x-Achse liegt nicht vor. Die Kurve hat bei $x = 1$, $y = 2$ ein Minimum und an der Stelle $x = 3$ einen Wendepunkt (Bild s. S. 107).

8. Schnittprobleme – Methode der unbestimmten Koeffizienten

I Zu untersuchen sind die Verhältnisse **beim Schnitt zweier Kurven** miteinander. An diesen Stellen müssen die Ordinaten beider Kurven, die Funktionswerte, und damit die Wertepaare beider Funktionen übereinstimmen. $S = K_1 \cap K_2$.[1]). Zu diesem Zwecke wird gleichgesetzt:
$f(x) = g(x)$. Das führt zu einer Gleichung, deren Lösung(en) die x-Koordinate(n) des Schnitts liefert.[2])
Gilt **außerdem** $f'(x_S) = g'(x_S)$, so liegt eine Berührung vor, was man oft auch an der „Doppellösung" der obigen Gleichung erkennen kann. [$f'(x_1) = g'(x_1)$ allein sagt nur etwas aus über die Parallelität der Tangenten.] Der **Schnittwinkel** der beiden Kurven ist definiert als Winkel zwischen den Tangenten an die beiden Kurven im Schnittpunkt. Er kann berechnet werden nach Bestimmung der Anstiege $f'(x_S)$ und $g'(x_S)$ nach der Formel:

$$\tan\varphi = \frac{f'(x_S) - g'(x_S)}{1 + f'(x_S)\cdot g'(x_S)}$$

II Oft ist in der Praxis zwar der Charakter (Typ) der Funktion oder Kurve bekannt, gesucht sind aber die Koeffizienten innerhalb der Kurvengleichung. Dazu sind nur die Koordinaten einiger Kurvenpunkte gegeben.
In diesem Falle setzt man die Funktionsgleichung allgemein mit unbestimmten Koeffizienten der Glieder an und findet **für jeden Punkt,** der gegeben ist, eine Gleichung. Alle diese Gleichungen bilden ein System, das **nach den unbestimmten (unbekannten) Koeffizienten** aufzulösen ist.[3])

Musterbeispiel zur Schnittpunktuntersuchung:

A Gegeben sind die Funktionen

$$\boxed{\begin{array}{ll} y = f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 6x + 2 & x \in P \\ y = g(x) = 3(x+1)^2 - 1 & x \in P \end{array}}$$

Berechnen Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte beider zugehöriger Kurven, und bestimmen Sie den Schnittwinkel.

B Aus $f(x) = g(x)$ ergibt sich $2x^3 = -3x^2$ mit den Lösungen $x_1 = x_2 = 0$; $f(0) = 2$; $x_3 = -1{,}5$; $f(-1{,}5) = -0{,}25$. Die Doppellösung $x_1 = x_2$ läßt eine Berührung vermuten.

C $f'(x) = 6x^2 + 12x + 6$; $g'(x) = 6x + 6$.
Es folgt $f'(0) = 6$; $g'(0) = 6$; $f'(-1{,}5) = 1{,}5$; $g'(-1{,}5) = -3$. Die Gleichung $f'(x) = g'(x)$ liefert $x_1 = 0$ und $x_4 = -1$.

---

[1]) Exakt bedeutet hier $S = K_1 \cap K_2$:
$\{(x_S; y_S)\} = \{(x; y) \mid y = f(x)\} \cap \{(x; y) \mid y = g(x)\}$

[2]) Grundsätzlich werden die beiden Kurvengleichungen zu einem Gleichungssystem zusammengefaßt. Dieses Gleichungssystem muß dann gelöst werden. Hier wird das dabei am häufigsten verwendete Verfahren angeführt.

[3]) In der Statistik gibt es übrigens auch Methoden, nach denen die ungefähren Koeffizienten ermittelt werden können, wenn mehr als genügend viele Punkte bzw. Wertepaare gegeben sind. Auf diese Methoden wird hier nicht eingegangen.

D Die Schnittwinkel betragen 0° bei $x = 0$ – ohne Verwendung der Formel – (Berührung) und (nach der Formel) 127,9° bei $x = -1{,}5$. Bei $x = -1$ laufen die Tangenten der Kurven parallel! Skizzieren Sie jetzt selbst die von beiden Kurven eingeschlossene „nierenförmige" Fläche (vgl. das Bild auf S. 107 rechts unten).

Musterbeispiel für die Anwendung der Methode der unbestimmten Koeffizienten:

A Eine Parabel (mit der Symmetrieachse parallel zur y-Achse) verläuft durch die Punkte

$$\boxed{P_1(-2;\,-1);\;P_2(2;\,3)\text{ und }P_3(4;\,2)}$$

B Ansatz einer quadratischen Funktion:

$f(x) = A\,x^2 + Bx + C$

$$\begin{array}{ll} P_1 & 4A - 2B + C = -1 \\ P_2 & 4A + 2B + C = 3 \\ P_3 & 16A + 4B + C = 2. \end{array}$$

C Lösung dieses Gleichungssystems für A, B und C:

$A = -0{,}25 \qquad B = 1 \qquad C = 2.$

D Die zugehörige Funktion lautet:

$f(x) = -0{,}25\,x^2 + x + 2.$

Die Parabel ist relativ flach, nach unten geöffnet, schneidet die y-Achse im Punkt $P_4\,(0;\,2)$ und hat den Scheitelpunkt im Punkt P_2.
Es liegen 2 Nullstellen der Funktion (zwei Schnittpunkte der Kurve mit der x-Achse) vor, die durch $f(x) = 0$, also durch $-0{,}25\,x^2 + x = -2$ zu finden sind: $P_{N1}\,(-1{,}464;\,(0$ und $P_{N2}\,(5{,}464;\,0)$.

8.1. Die Bilder der Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sqrt{x}$ schneiden sich im Intervall $[0;\,1]$ genau zweimal. Untersuchen Sie die Schnittwinkel. Wo laufen die Tangenten beider Kurven parallel?

8.2. Die durch die Gleichungen $x^2 + y^2 = 25$ und $(x-2)^2 + y^2 = 65$ gegebenen Kreise sind bezüglich ihrer gegenseitigen Lage zu untersuchen.

8.3. Bestimmen Sie die Winkel, unter denen sich die Kreise mit den Gleichungen $x^2 + y^2 = 100$ und $(x-14)^2 + (y-2)^2 = 100$ schneiden.

8.4. Unter welchen Winkeln schneiden sich die Parabel mit der Gleichung $f(x) = 0{,}1x^2 - 2x + 1{,}5$ und die Gerade mit der Gleichung $g(x) = -x - 1$?

8.5. Die Kurve einer Exponentialfunktion nach dem Gesetz $f(x) = e^{Ax}$ gehe durch den Punkt mit den Koordinaten $P\,(4;\,7{,}39)$. Untersuchen Sie den Tangentenanstieg in diesem Punkt.

8.6. Gegeben ist eine Funktion durch die Gleichung

$y = f(x) = ax^3 + cx + d \quad (x,a,c,d$ reell).

Das Bild der Funktion schneidet die y-Achse im Punkt $P_1\,(0;\,4)$. Die Kurve hat in diesem Punkt P_1 den Anstieg $m_1 = -3$. Der Punkt $P_E\,(1;\,y_E)$ ist Extremum. Bestimmen Sie die Koeffizienten a, c und d.

*** 8.7.** Gegeben sind Funktionen durch eine Gleichung der Form $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ $(x,a,b,c$ reell) $c > 0$.
Die erste Ableitung einer Funktion dieser Form lautet $y' = f'(x) = 6x + 2$. Die vom Bild der Funktion, der y-Achse und der Geraden mit der Gleichung $x = 2$ sowie der x-Achse eingeschlossene Fläche hat den Flächeninhalt 16 FE. Wie lautet die Funktion?

8.8. Gegeben sind zwei Geraden.
Erste Gerade: läuft durch die Punkte $P_1(1;\,1)$ und $P_2(10;\,11)$.
Zweite Gerade: läuft durch $P_3(4;4)$ und hat den Anstieg $\tan\beta = 1{,}05$.
Wo und unter welchem Winkel schneiden sie einander?

8.1. Man stellt zunächst die Schnittpunkte fest:

$f(x) = g(x) \to x^2 = \sqrt{x} \to x^4 = x$

$x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ f(0) = 0;\ f(1) = 1$

$f'(x) = 2x;\quad g'(x) = 0{,}5\,x^{-0,5}.$

8.2. Beide Kreisgleichungen werden gleichgesetzt oder in einem Gleichungssystem zusammengefaßt.

$$\begin{array}{ll} x^2 + y^2 = 25 & y^2 = 25 - x^2 \\ (x-2)^2 + y^2 = 65 & y^2 = 65 - (x-2)^2 \\ \hline (x-2)^2 - x^2 = 40 & 25 - x^2 = 65 - (x-2)^2 \end{array}$$

8.3. Schnittpunktbestimmung:

$$\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 100 \\ x^2 - 28x + 196 + y^2 - 4y + 4 = 100 \end{array}$$

$y = -7x + 50$ wird in die erste Kreisgleichung (bequemer!) eingesetzt:

$x^2 + 2500 - 700x + 49x^2 = 100 \Rightarrow x^2 - 14x = -48$

8.4. Man bestimmt zunächst die x-Werte der Schnittpunkte

$0{,}1x^2 - 2x + 1{,}5 = -x - 1 \Rightarrow x^2 - 10x = -25$

$x_1 = x_2 = 5$ (Doppellösung, also kann Berührung vermutet werden).

8.5. Man setzt nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten an:

$f(4) = 7{,}39 \to 7{,}39 = e^{4A}$

$\to \ln 7{,}39 = 4A = 2{,}0001 \Rightarrow A = 0{,}5.$

8.6. Aus P_1 folgt sofort $d = 4$.

Man bildet $f'(x) = 3ax^2 + c \qquad f''(x) = 6ax$

$f'(0)$ soll gleich -3 sein, also: $c = -3$.

8.7. $f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b = 6x + 2$

Also $b = 2$ und $6 = 2a, \Rightarrow a = 3$.

8.8. $g_1\colon y = m_1x + n_1 \qquad P_1\colon\ 1 = m_1 + n_1$

$P_2\colon\ 11 = 10m_1 + n_1$

$n_1 = 0{,}1 \qquad m_1 = 0{,}9$

$g_2\colon m_2 = 1{,}05$, also $\quad y = 1{,}05x + n_2$

$P_3\colon 4 = 4{,}20 + n_2$

$$\boxed{g_1\colon y = 0{,}9x + 0{,}1 \quad g_2\colon y = 1{,}05x - 0{,}20}$$

8.1. $f'(0) = 0 \qquad f'(1) = 2$

$g'(0)$ nicht definiert, Tangente ist y-Achse.

$g'(1) = 0{,}5;\ f'(x) = g'(x) \Rightarrow 2x = 0{,}5x^{-0,5};\ x \neq 0$

$4x^2 = \dfrac{1}{4x} \Rightarrow x^3 = \dfrac{1}{16} \Rightarrow x = 0{,}3959.$

8.2. $x = -9$ (Parallele zur y-Achse). Daraus kann noch **nicht** geschlossen werden, daß die Kreise einander schneiden. Vielmehr ist $y^2 = 25 - 81 = -56$ ohne Lösungen.

8.3. $x_1 = 6;\ x_2 = 8$. Bestimmung der y-Werte erfolgt zweckmäßigerweise mittels der Schnittgeradengleichung:

$y_1 = 8;\qquad y = \sqrt{100 - x^2};\qquad y' = -\dfrac{x}{\sqrt{100 - x^2}}$

$y_2 = -6;\qquad y = 2 + \sqrt{-x^2 + 28x - 96};\qquad y' = \dfrac{-x + 14}{\sqrt{-x^2 + 28x - 96}}.$

8.4. $f'(x) = 0{,}2x - 2 \qquad f'(5) = -1$

$g'(x) = -1 \qquad g'(5) = -1$

Im gemeinsamen Punkt existiert eine gemeinsame Tangente.

8.5. $f(x) = e^{0.5x} \qquad f'(x) = 0{,}5\,e^{0.5x}$ **(Kettenregel beachten!)**

8.6. $f(x) = ax^3 - 3x + 4$

$f'(x) = 3ax^2 - 3$ gleich Null gesetzt:

$x^2 = \dfrac{1}{a}.$

Das liefert nur dann eine Lösung $x_1 = 1$, wenn $a = 1$.

8.7. $f(x) = 3x^2 + 2x + c$. (Wegen $c > 0$ liegt im Intervall $[0; 2]$ keine Nullstelle!)

$$\int_0^2 (3x^2 + 2x + c)\,dx = [x^3 + x^2 + cx]_0^2$$

$$= 8 + 4 + 2c = 16$$

$$c = 2$$

8.8. Schnittpunktbestimmung

$$\begin{array}{l} y = 0{,}9\,x + 0{,}1 \\ y = 1{,}05x - 0{,}2 \\ \hline x_S = 2;\quad y_S = 1{,}9;\quad m_1 = 0{,}9;\ m_2 = 1{,}05. \end{array}$$

8.1. Der Schnittwinkel im Punkt $O\ (0; 0)$ ist $90°$. (Die Tangentenrichtungen sind zugrunde zu legen!) Im Punkte $P\ (1; 1)$ ergibt sich $\tan \varphi = \dfrac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = 0{,}75$; $\varphi = 36{,}87°$.
An der Stelle $x = 0{,}3959$ laufen die Tangenten parallel.
(Überprüfen Sie das selbst. Die Kurvenpunkte an dieser Stelle stimmen aber nicht überein.)

8.2. Die Kreise schneiden einander **nicht**! Der eine Kreis liegt vollständig im anderen.

8.3. Die Tangentenanstiege im Punkt (6; 8) werden untersucht:

1. Kreis: $\tan \varphi_1 = -\dfrac{6}{8} = -0{,}75$; $\varphi_1 = -36{,}87°$ (fallend)
2. Kreis: $\tan \varphi_2 = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$; $\varphi_2 = 53{,}12°$.

Die Tangenten stehen senkrecht aufeinander. Die Kreise schneiden einander in den Punkten (6; 8) und (8; − 6) orthogonal.

8.4. Die Gerade ist Tangente an das Bild von $f(x)$, der Berührungspunkt ist $B\ (5; -6)$. Die Tangente fällt unter 45°.

8.5. Die Exponentialfunktion heißt $f(x) = e^{0{,}5x}$.
Der Tangentenanstieg im Punkt P ist $f'(4) = \tan \varphi = e^2 = 7{,}39$; $\varphi \approx 82{,}2°$.

8.6. Die Funktion lautet $f(x) = x^3 - 3x + 4$.
Die beiden Extremstellen sind $x_{E1} = 1$; $x_{E2} = -1$;
$f(1) = 2$ Min.; $f(-1) = 6$ Max.

8.7. Die Funktion lautet $f(x) = 3x^2 + 2x + 2$.
Das Bild der Funktion ist eine Parabel. Der Scheitel (Minimum) liegt im Punkt $S\left(-\dfrac{1}{3};\ 1\dfrac{2}{3}\right)$.

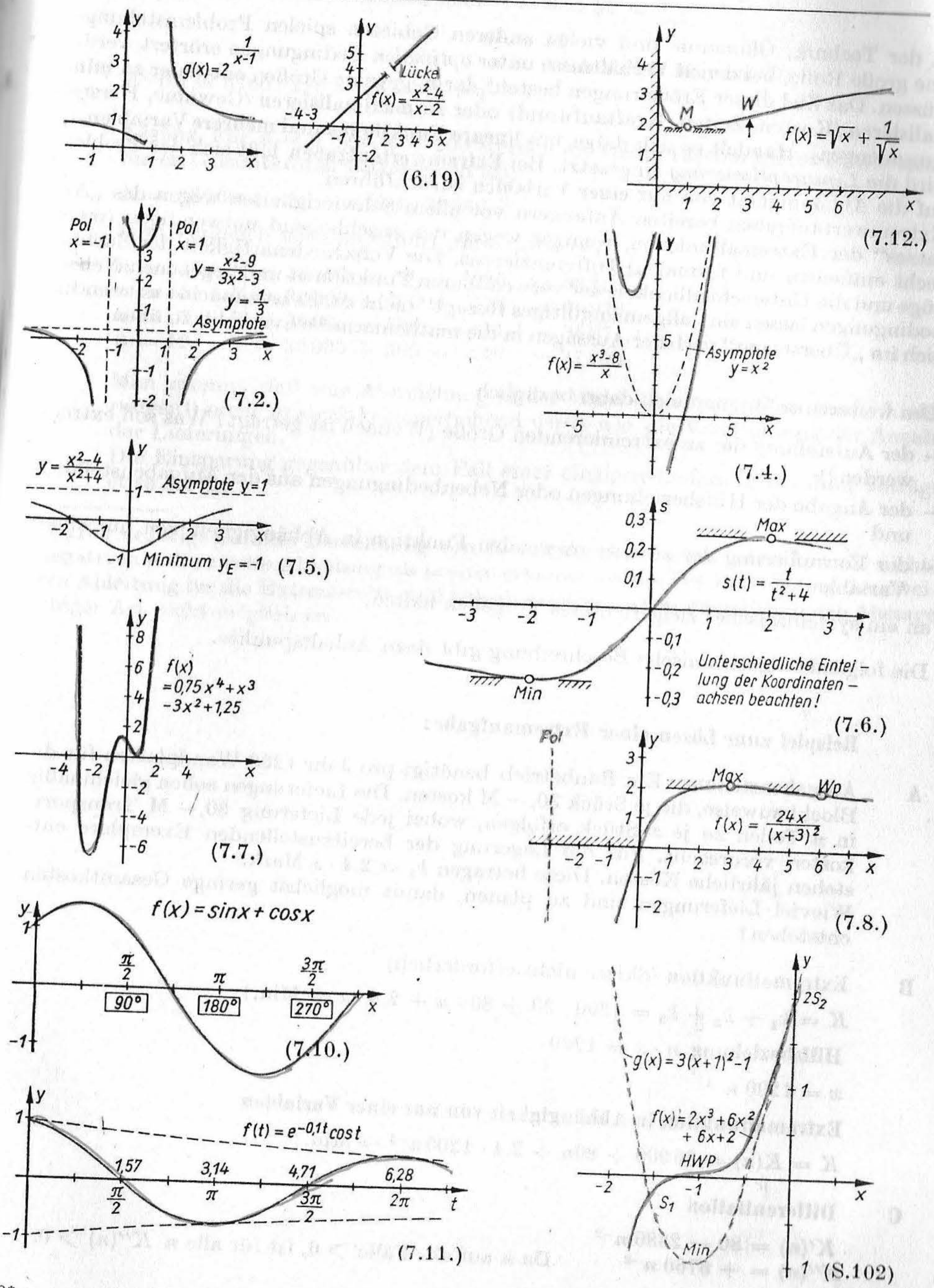
8.8. Der Schnittwinkel im Punkt $S\ (2; 1{,}9)$ wird bestimmt:

$$\tan \varphi = \frac{1{,}05 - 0{,}9}{1 + 0{,}945} = \frac{0{,}15}{1{,}945} = 0{,}0773;$$

$\varphi = 4{,}42°$. (Beachten Sie: Bei einer zeichnerischen Lösung ergeben sich wegen des annähernd gleichen Anstiegs Schwierigkeiten beim Ablesen des Schnittpunkts.)

Hinweis zu Seite 107:
Versuchen Sie, sich typische Bilder von Funktionstypen einzuprägen!
(Beachten Sie auch die Tafeln 1 bis 3 auf S. 23 bis 24!)

Übersicht über die Bilder einiger Funktionen



9. Extremwertaufgaben

In der Technik, Ökonomie und vielen anderen Gebieten spielen Problemstellungen eine große Rolle, bei denen Verhältnisse unter *optimalen* Bedingungen erörtert werden müssen. Das Ziel dieser Erörterungen besteht darin, gewisse Größen entweder zu **minimalisieren** (Kosten, Zeiten, Kraftaufwand) oder zu **maximalisieren** (Gewinne, Herstellungsmengen). Handelt es sich dabei um **lineare Funktionen** und **mehrere** Variablen, so wird die *Linearoptimierung* eingesetzt. Bei **Extremwertaufgaben** läßt sich das Problem auf die Abhängigkeit von **nur einer Variablen** zurückführen.
Extremwertaufgaben bereiten Anfängern vor allem Schwierigkeiten wegen des „Ansatzes" der Extremalfunktion, weniger wegen des anschließend notwendigen (meist recht einfachen und formalen) Differenzierens. Die Verschiedenartigkeit der Sachbezüge und die Unterschiedlichkeit der verwendbaren Funktionen und gegebenen Nebenbedingungen lassen ein „allgemeingültiges Rezept" nicht zu. Es ist zunächst notwendig, sich im „Übersetzen" verbaler Aussagen in die mathematische Symbolik zu üben.

Des weiteren sollte man sich dann bezüglich

- der Aufstellung der zu extremierenden Größe (Wonach ist gefragt? Was soll extrem werden?)
- der Angabe der Hilfsbeziehungen oder Nebenbedingungen aus der Aufgabenstellung und
- der Formulierung der zu extremierenden Funktion in Abhängigkeit von nur einer Variablen

an ein systematisches zielgerichtetes Vorgehen halten.

Die folgende algorithmische Beschreibung gibt dazu Anhaltspunkte.

Beispiel zum Lösen einer Extremaufgabe:

A **Aufgabenstellung:** Ein Baubetrieb benötigt pro Jahr 1200 Wandplatten für die Blockbauweise, die je Stück 30,— M kosten. Die Lieferungen sollen gleichmäßig in n Teilen zu je x Stück erfolgen, wobei jede Lieferung 80,— M Transportkosten verursacht. Für die Lagerung der bereitzustellenden Exemplare entstehen jährliche Kosten. Diese betragen $k_3 = 2{,}4 \cdot x$ Mark.
Wieviel Lieferungen sind zu planen, damit möglichst geringe Gesamtkosten entstehen?

B **Extremalfunktion** (Skizze nicht erforderlich)

$$K = k_1 + k_2 + k_3 = 1200 \cdot 30 + 80 \cdot n + 2{,}4 \cdot x \to \text{Min.!}$$

Hilfsbeziehung $n \cdot x = 1200$

$$x = 1200\, n^{-1}$$

Extremalfunktion in Abhängigkeit von nur einer Variablen

$$K = K(n) = 36000 + 80n + 2{,}4 \cdot 1200n^{-1} \to \text{Min.!}$$

C **Differentiation**

$$K'(n) = 80 - 2880\, n^{-2}$$
$$K''(n) = +\, 5760\, n^{-3}$$

Da n auf alle Fälle > 0, ist für alle n $K''(n) > 0$.

„Schlüsselgleichung"

$K'(n) = 0 \qquad 80 - 2880\, n^{-2} = 0 \Rightarrow 80 = \dfrac{2880}{n^2}$

$n^2 = 36$

$n = 6$ führt zum Minimum!

$K''(6) = 5760 : 216 = 26{,}67 > 0$[1])

D **Lösung** Für $n = 6$ bzw. $x = 200$ werden die Gesamtkosten minimal. Die minimalen Gesamtkosten betragen (in M):

$$K = 36000 + 480 + 480 = 36960$$

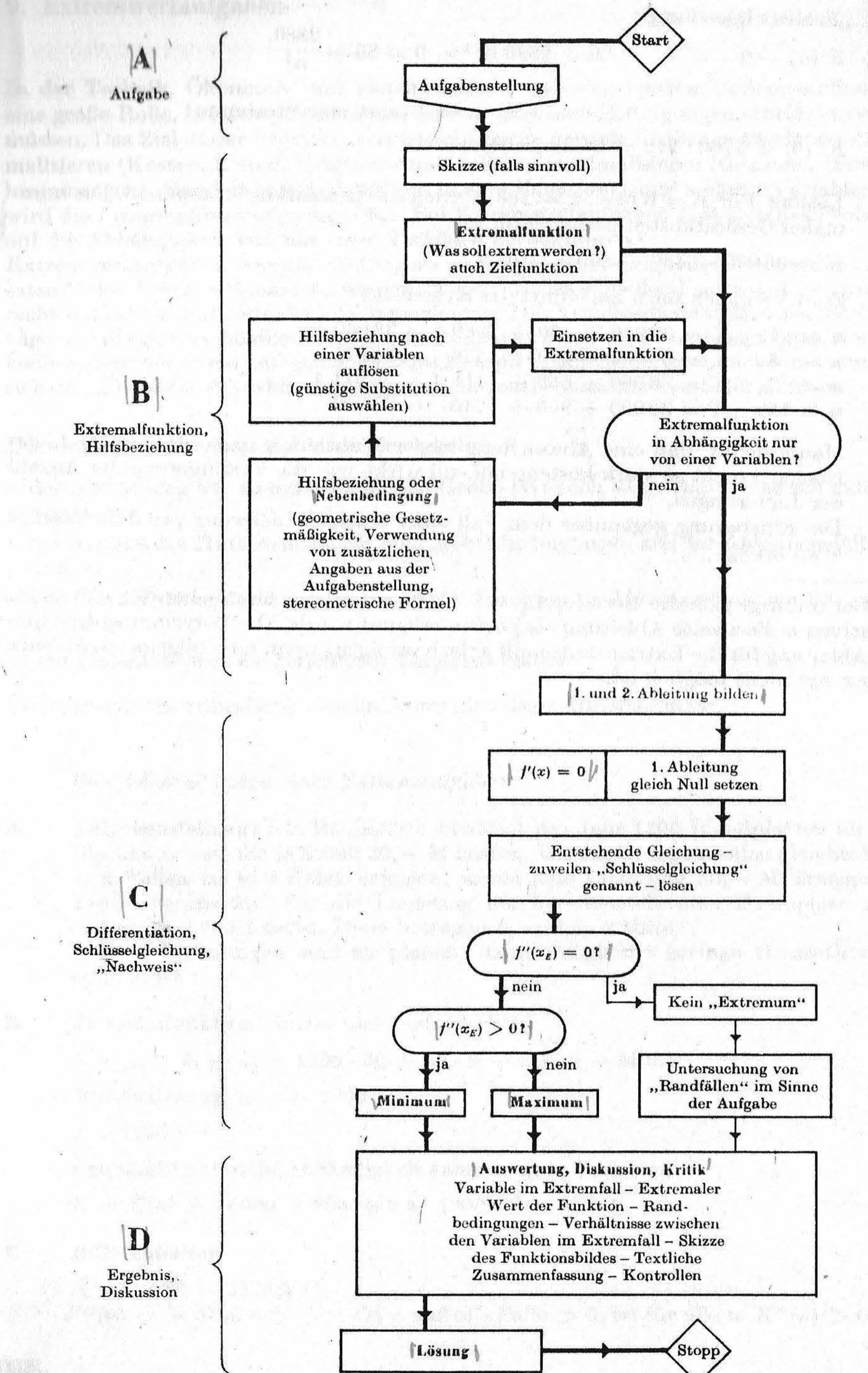
Zum Vergleich seien angeführt die Kosten bei

$n = 1$:	$K = 36000\ +$	$80\ +$	2880	$=$	38960
$n = 5$:	$K = 36000\ +$	$400\ +$	576	$=$	36976
$n = 7$:	$K = 36000\ +$	$560\ +$	$411{,}4$	$=$	$36971{,}4$
$n = 12$:	$K = 36000\ +$	$960\ +$	240	$=$	37200

Man erkennt, daß eine Abweichung in der Wahl des n nach oben (mehr Lieferungen!) nicht so stark kostenerhöhend wirkt wie die Verringerung der Anzahl der Lieferungen.
Die Einsparung gegenüber dem Fall einer einzigen Lieferung pro Jahr beträgt etwa 5,1 %.

---

[1]) Hier erübrigt sich die Berechnung von $K''(6)$, da weiter oben schon für *alle* nichtnegativen n die zweite Ableitung als positiv erkannt wurde. Die Berechnung der zweiten Ableitung für die Extremstelle muß jedoch erfolgen, wenn eine allgemeine Aussage obiger Art nicht möglich ist.



9.1. Zwei rechteckige Schornsteinzüge sollen nebeneinander hochgezogen werden, wobei die Trennwand und die Seitenwände eine Dicke von einheitlich 12 cm bekommen sollen. Der Innenquerschnitt soll je 360 cm² betragen. Welche Maße gibt man dem Schornstein, dessen Höhe unberücksichtigt bleiben soll, wenn der Materialverbrauch ein Minimum werden soll?

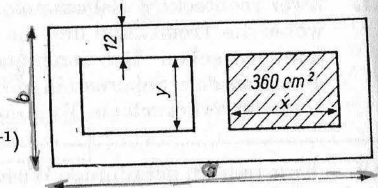
9.2. Eine nahezu geradlinige Wasserstraße führt von A nach dem Hafen$H$. Ein Ort C liegt im rechten Winkel zu AH seitlich von A. Die Entfernungen $\overline{AH}$ sind $= 80$ km, $\overline{AC} = 40$ km. Der Transport von Frachten auf dem Landwege ist 5mal so teuer wie auf dem Wasserwege. Wo wird man die von C nach H zu transportierenden Waren auf Frachtkähne verladen, damit die gesamten Transportkosten minimal werden?

9.3. Zwei Autobahnen NS und OW schneiden sich in K rechtwinklig. Ein Pkw P befindet sich zur Zeit 60 km vor K und fährt mit einer Geschwindigkeit von 80 kmh^{-1} in nördlicher Richtung, ein Motorradfahrer M fährt mit 50 kmh^{-1} in westlicher Richtung und befindet sich zur Zeit 40 km östlich von K. Zu welchem Zeitpunkt ist die Entfernung (Luftlinie) zwischen den beiden Fahrzeugen am geringsten?

9.4. Über einem Arbeitstisch (rund, Radius 50 cm) soll eine Lampe mit der Lichtstärke I in einer solchen Höhe angebracht werden, daß die Arbeitsplätze am Rande des Tisches bestmögliche Beleuchtung erhalten.
(Die Beleuchtungsstärke E ist definiert als $E = I \cdot e^{-2} \cdot \cos\beta$, wobei e die Entfernung der Lampe vom Tischrand und β der halbe Öffnungswinkel des Strahlenbündels bis zum Tischrand sind.)

9.5. Wann ist die Fläche eines Kreissektors bei gegebenem Umfang am größten?

9.1. Extremalfunktion:



$A = ab - 2 \cdot 360 \rightarrow$ Min.

$A = (2x + 36)\,(y + 24) - 720$

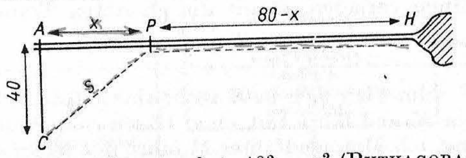
Hilfsbeziehung: $x \cdot y = 360$

$y = 360\,x^{-1}$ (fast gleichwertig mit $x = 360\,y^{-1}$)

$$A = (2x + 36)\left(\frac{360}{x} + 24\right) - 720 = \frac{12\,960}{x} + 48x + 864 \rightarrow \text{Min.}$$

$x > 0;\ y > 0.$

9.2.



Kosten f. 1 km Wasserweg: r M.

Kosten f. 1 km Landweg: $5\,r$ M.

Extremalfunktion:

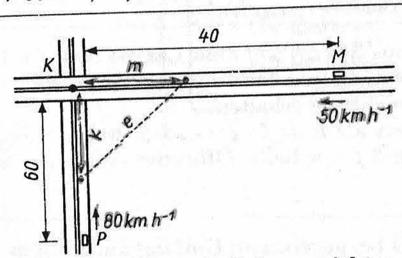
$K = r\,(80 - x) + 5\,rs \rightarrow$ Min.

Hilfsbeziehung: $x^2 + 40^2 = s^2$ (PYTHAGORAS)

$s = \sqrt{x^2 + 1600}$, also $K = r\,(80 - x) + 5r\,\sqrt{x^2 + 1600}$

r const.; $x > 0$.

9.3.



Extremalfunktion: (Man wählt zweckmäßigerweise $E = e^2$ statt e; E hat an der gleichen Stelle ein Minimum.).

$E = m^2 + k^2$ nach PYTHAGORAS

Hilfsbeziehungen $m = 40 - 50\,t$;

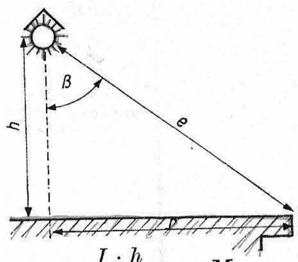
$k = 60 - 80\,t$.

$E = (40 - 50\,t)^2 + (60 - 80\,t)^2 =$

$= 5200 - 13\,600\,t + 8900\,t^2$.

(Schneiden sich die Bahnen nicht rechtwinklig, müßte der Cosinussatz verwendet werden!)

9.4.



Extremalfunktion:

$E = I\,e^{-2} \cos\beta \rightarrow$ Max.; I const.

Hilfsbeziehungen:

(1) am zweckmäßigsten $\cos\beta = h : e$

(2) außerdem (PYTHAGORAS)

$$e = \sqrt{h^2 + r^2}$$

$$E = \frac{I \cdot h}{(h^2 + r^2)^{1,5}} \rightarrow \text{Max.}$$

$r > 0;\ h > 0.$

9.5. Extremalfunktion: $A = 0{,}5\,br$ (b ist Bogen des Sektors) (nach Formelsammlung)

Hilfsbeziehung: $u = 2r + b$

$b = u - 2r$

$A = 0{,}5\,r\,(u - 2r) \doteq 0{,}5\,ur - r^2 \rightarrow$ Max.

u const; $r > 0$.

9.1. $A(x) = 12\,960x^{-1} + 48x + 864$

$A'(x) = -12\,960x^{-2} + 48$

$A''(x) = 25\,920x^{-3} > 0$ (immer Min. für $x > 0$)

$A'(x) = 0 \Rightarrow 48x^2 = 12\,960 \Rightarrow x^2 = 270$

$x_{ex} = 3\,\sqrt{30} \approx 16{,}4;\quad y_{ex} = 360\,/\,3\sqrt{30} = 4\,\sqrt{30} \approx 21{,}9.$

Die Lösung vereinfacht sich wesentlich, wenn man die Wanddicke vernachlässigt. Das kann jedoch aus logischen Gründen nicht grundsätzlich empfohlen werden.

9.2. $K\,(x) = 80r - xr + 5r\,\sqrt{x^2 + 1600}$

$$K'\,(x) = -r + \frac{5r \cdot 2x}{2\,\sqrt{x^2 + 1600}} = -r + 5rx\,(x^2 + 1600)^{-0,5}$$

$$K''(x) = \frac{5r \cdot 1600}{(x^2 + 1600)^{1,5}} > 0 \quad \text{immer Min.}$$

$$K'\,(x) = 0 \Rightarrow r = \frac{5rx}{\sqrt{x^2 + 1600}}$$

$5x = \sqrt{x^2 + 1600};\quad x^2 = x^2 + 1600;$

$x^2 = 66{,}7;\quad x_{ex} = +\,8{,}2$ (Das Minuszeichen entstand durch Quadrieren und entfällt.)

9.3. $E(t) = 5200 - 13\,600\,t + 8900\,t^2$

$E'(t) = -\,13\,600 + 17\,800\,t$

$E''(t) = 17\,800 > 0$ immer Minimum

$E'(t) = 0 \Rightarrow 17\,800\,t = 13\,600 \Rightarrow t_{ex} = 0{,}764$

$m_{ex} = 40 - 38{,}2 = 1{,}8$

$k_{ex} = 60 - 61{,}1 = -\,1{,}1$

$E_{ex} = e^2 = 3{,}24 + 1{,}21 = 4{,}45;\quad e_{ex} \approx 2{,}1.$

9.4. $E(h) = Ih(h^2 + r^2)^{-1,5}$

$E'(h) = I\,(r^2 - 2h^2)\,(h^2 + r^2)^{-2,5}$

$E''(h) = 3\,Ih\,(2h^2 - 3r^2)\,(h^2 + r^2)^{-3,5}$

$$E'(h) = 0 \Rightarrow r^2 = 2h^2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{2}\,r = 0{,}7071\,r$$

$$E''(h_{ex}) = E''\,(0{,}7071\,r) = \frac{I \cdot 1{,}5\,\sqrt{2}\,r\,(-2r^2)}{(1{,}5r^2)^{3,5}} < 0;$$

also Maximum.

9.5. $A(r) = 0{,}5\,ru - r^2$

$A'(r) = 0{,}5\,u - 2r$

$A''(r) = -\,2 < 0$ immer Max.

$A'(r) = 0 \Rightarrow 0{,}5\,u = 2r;$

$r_{ex} = 0{,}25\,u;\quad b_{ex} = 0{,}5\,u.$

9.1. Die Innenmaße des Schornsteinschachtes verhalten sich bei minimalem Materialverbrauch wie 4 : 3 und betragen $y = 21{,}9$ cm und $x = 16{,}4$ cm. Die Außenmaße $a = 68{,}8$ cm und $b = 45{,}9$ cm verhalten sich dann wie 3 : 2.
Die auszumauernde Querschnittsfläche beträgt $A_{\min} = 2438\ \text{cm}^2$ und ist damit etwa 3,5mal so groß wie die beiden Öffnungen zusammen.
Die Maße des Schornsteins entsprechen etwa den gängigen Verhältnissen in der Praxis, auf durch Mauersteingröße bedingte Gegebenheiten wurde hier keine Rücksicht genommen.

9.2. Um geringste Transportkosten zu erreichen, ist der Umschlagplatz 8,2 km von A entfernt einzurichten.

Übersicht über einige interessante Fälle:

x	Umschlag	Wasserweg	Landweg	Kosten (Wasser)	(Land)	gesamt
80	in H	0	89,4	0	447 r	447 r
8,2	in P	71,8	40,8	71,8 r	204 r	275,8 r
0	in A	80	40	80 r	200 r	280 r

Geringfügige Veränderungen der Lage von P spielen keine wesentliche Rolle. Umschlagkosten selbst blieben unberücksichtigt.

9.3. Die Fahrzeuge haben dann die minimale Entfernung 2,1 km voneinander, wenn nach 0,764 Stunden (d. h. nach 45,8 Min.) sich der Motorradfahrer 1,8 km vor, der Autofahrer dagegen 1,1 km hinter (!) der Kreuzung befindet (entgegen der Skizze!)
(Die Aufgabe würde wesentlich erschwert, wenn die Entfernung e selbst minimiert würde. Das erforderte die Differentiation von Wurzeln.)
Ähnliche Aufgabenstellungen können zum Beispiel auch bei der Auswertung scheinbarer Bahnen von Himmelskörpern auf astrophysikalischen Platten auftreten.

9.4. Die Beleuchtung ist maximal mit

$$E = \frac{I\sqrt{2}r \cdot 2\sqrt{2}}{2r^3 \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{2I\sqrt{3}}{9r^2}, \text{wenn } h : r = \sqrt{2} : 2 \text{ gilt.}$$

Für $r = 50$ cm ergibt sich $h \approx 35$ cm.
Die Gesetzmäßigkeit benutzt man auch in großen Arbeitsräumen (Schulen) zur guten Ausleuchtung aller Plätze.
Überprüfen Sie das an Ihrem Klassenzimmer. Beachten Sie hierbei bei mehreren Lampen die Beleuchtung der Plätze in der Mitte des Raumes!

9.5. Die Fläche des Kreissektors ist am größten, wenn der Bogen gleich dem doppelten Radius ist.
Dann ist der Öffnungswinkel (Scheitelwinkel) 114,6° (Bogenmaß: 2)
Die Maximalfläche ist $A_{ex} = \frac{1}{16}u^2$.
Die Berechnung unter Einbeziehung des Bogenmaßes führt natürlich zum gleichen Ergebnis, ist aber wesentlich komplizierter.

9.6. Untersuchen Sie, um welchen maximalen Betrag sich eine reelle Zahl x, für die $|x| < 1$ gilt, von ihrer 3. Potenz unterscheiden kann.

9.7. Ein Wasserbehälter hat die Form eines Zylinders von 2 m Höhe und einem unten angesetzten Kegel von 6 m Mantellinie. Wie wählt man die Maße des Behälters, damit das Volumen (Fassungsvermögen) möglichst groß wird?

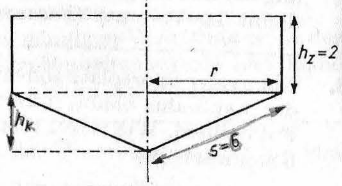
9.8. Ein ovaler Sportplatz soll eine Laufbahnlänge von 450 m bekommen. Die Breite der Laufbahn bleibe unberücksichtigt. Im Innern liege ein Rechteck für ein Fußballfeld. Wie wählt man die Maße dieses Feldes, damit es maximale Fläche bekommt?

9.9. Ein gerade gewachsener Baumstamm habe einen Durchmesser von 50 cm. (Die Abnahme der Stammdicke sei so minimal, daß sie vernachlässigt werden kann.) Aus dem Stamm soll ein Balken maximaler Tragfähigkeit geschnitten werden, dessen Querschnitt rechteckig ist.
Die Tragfähigkeit eines Balkens ist durch das Gesetz $T = ca^2b$ bestimmt, wobei b die Breite, a die Höhe des Balkens und c eine Materialkonstante ist; $c > 0$.

9.10. Zum Bau einer Kiste mit Eisenkanten stehen für sämtliche zwölf Kanten zusammen 3 m Winkeleisen zur Verfügung. Die eine Grundkante der Kiste muß aus technischen Gründen dreimal so groß wie die andere sein. Wie wählt man die Kanten, damit die Kiste maximales Fassungsvermögen bekommt?

9.6. $D(x) = \begin{cases} D_1(x) = x - x^3 \text{ für } x \in [0;1) \\ D_2(x) = x^3 - x \text{ für } x \in (-1;0] \end{cases}$

9.7. Extremalfunktion:



$$V = \pi r^2 h_{\mathrm{Z}} + \frac{1}{3}\pi r^2 h_{\mathrm{K}}$$

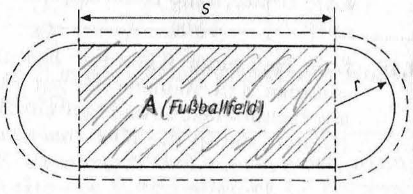
$$= \pi r^2 \left(2 + \frac{1}{3} h_{\mathrm{K}}\right) \to \text{Max.}$$

Hilfsbeziehung:

$s_2 = r^2 + h_{\mathrm{K}}^2$ (1) $h_{\mathrm{K}} = \sqrt{s^2 - r^2}$ unzweckmäßig; (2) $r^2 = s^2 - h_{\mathrm{K}}^2$

$$V = 2\pi(36 - h_{\mathrm{K}}^2) + \frac{1}{3} h_{\mathrm{K}}\pi(36 - h_{\mathrm{K}}^2) \to \text{Max.}; \quad h_{\mathrm{K}}, r > 0.$$

9.8. Extremalfunktion:



$A = 2rs \to$ Max.

Hilfsbeziehung:

$2\pi r + 2s = u = 450$; $\quad 2s = 450 - 2\pi r$ vorteilhafter als: $r = \frac{225}{\pi} - \frac{s}{\pi}$

führt zu $A = 450\,r - 2\pi r^2 \to$ Max.; $\quad s \geqq 0$; $r \geqq 0$.

9.9. Extremalfunktion: $T = ca^2b \to$ Max.
Hilfsbeziehung: (PYTHAGORAS)

$a^2 = d^2 - b^2$ (vorteilhafter als: $b = \sqrt{d^2 - a^2}$)
$T = cb\,(d^2 - b^2) \to$ Max.; $\quad a > 0$; $b > 0$; $c > 0$.

9.10. Extremalfunktion: $V = abc \to$ Max.

1. Hilfsbeziehung: $c = 3b$
2. Hilfsbeziehung: $4\,(a + b + c) = 4\,(a + 4b) = 3{,}00$

am vorteilhaftesten aufgelöst zu:

$a = 0{,}75 - 4b$.
$V = a \cdot 3b^2 = 2{,}25\,b^2 - 12\,b^3 \to$ Max.; $\quad a; b; c > 0$.

9.6. $D_1'(x) = 1 - 3x^2$ $\qquad$ $D_2'(x) = 3x^2 - 1$
$D_1''(x) = -6x < 0$ in $[0;1)$ $\qquad$ $D_2''(x) = 6x < 0$ in $(-1;0]$
immer Max. $\qquad$ immer Max.
$D_1'(x) = 0$ $\qquad$ $D_2'(x) = 0$
$\Rightarrow 1 - 3x^2 = 0.$ $\qquad$ $\Rightarrow 3x^2 - 1 = 0.$

$x = \frac{1}{3}\sqrt{3} = 0{,}577$ $\qquad$ $x = -\frac{1}{3}\sqrt{3} = -0{,}577$

$$D_1(0{,}577) = D_2(-0{,}577) = \frac{2}{9}\sqrt{3} = 0{,}385.$$

9.7. $V(h_{\mathrm{K}}) = \pi(72 + 12h_{\mathrm{K}} + 2h_{\mathrm{K}}^2 - \frac{1}{3} h_{\mathrm{K}}^3)$
$V'(h_{\mathrm{K}}) = \pi\,(12 - 4\,h_{\mathrm{K}} - h_{\mathrm{K}}^2)$
$V''(h_{\mathrm{K}}) = \pi\,(-4 - 2\,h_{\mathrm{K}}) < 0$; maximal immer für $h_{\mathrm{K}} > 0$.
$V'(h_{\mathrm{K}}) = 0 \Rightarrow h_{\mathrm{K}}^2 + 4h_{\mathrm{K}} = 12$
$h_{\mathrm{K}} = +2$ ($h_{\mathrm{K}} = -6$ scheidet aus).

9.8. $A(r) = 450r - 2\pi r^2$
$A'(r) = 450 - 4\pi r$
$A''(r) = -4\pi < 0$ immer Max.
$A'(r) = 0 \qquad 450 = 4\pi r$

$$2r_{\mathrm{ex}} = \frac{225}{\pi} = 71{,}6$$
$$s_{\mathrm{ex}} = 112{,}5.$$

9.9. $T(b) = cd^2b - cb^3$
$T'(b) = cd^2 - 3cb^2$
$T''(b) = -6cb < 0$ immer Max. für $b, c > 0$
$T'(b) = 0 \Rightarrow d^2 = 3b^2$

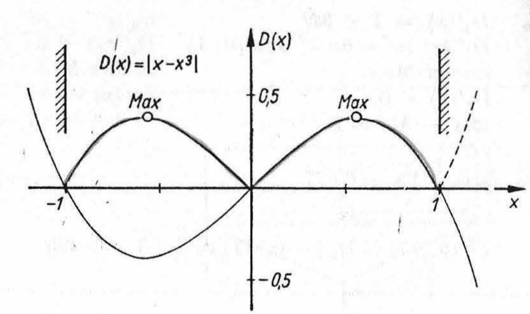
$b_{\max} = \frac{d\sqrt{3}}{3}$ (hier: 28,9)

$a_{\max} = \frac{d\sqrt{6}}{3}$ (hier: 40,8)

9.10. $V(b) = 2{,}25\,b^2 - 12\,b^3$
$V'(b) = 4{,}5\,b - 36\,b^2$
$V''(b) = 4{,}5 - 72\,b$
$V'(b) = 0 \Rightarrow 4{,}5\,b = 36\,b^2$; $b \neq 0$
$b_{\mathrm{ex}} = 0{,}125$; $V''(0{,}125) = 4{,}5 - 9 = -4{,}5 < 0$;
also Max.

$c = 0{,}375$; $a = 0{,}75 - 0{,}5 = 0{,}25$.

9.6. Es handelt sich um den **absolut genommenen** Unterschied zwischen einer Zahl und ihrer dritten Potenz.
Diese ist an $x = \pm\, 0{,}577$ mit $0{,}385$ maximal im Bereich $(-1; 1)$, für $|x| > 1$ werden dagegen durchaus höhere Werte erreicht. Die Differenz $D^* = x - x^3$ wäre nur bei $x = +\,0{,}577$ gegenüber der Umgebung maximal, dagegen läge bei $x = -\,0{,}577$ ein lokales Minimum.



9.7. Das maximale Fassungsvermögen liegt bei $h_K = 2$ vor.[1]) Es folgt $r = 4\sqrt{2} = 5{,}657$.
Das Maximalvolumen beträgt

$$V_{\max} = \pi\left(88 - 2\frac{2}{3}\right) = 85\frac{1}{3}\,\pi \approx 268.$$

Das Verhältnis $r : h_K$ beträgt hier **zufällig** $2\sqrt{2} : 1$.
Über den Materialverbrauch wurden keine Forderungen gestellt. Er wächst mit zunehmendem r linear an gemäß $M = 10\,\pi r$ bis zum Höchstwert bei $r = 6$.

9.8. Es ergeben sich für die maximale Fußballfläche die Abmessungen 71,6 m mal 112,5 m, was innerhalb der verbindlichen Maße (45···90 m mal 90···120 m, gebräuchlich 70 m mal 105 m) liegt.
Die Fläche (maximal) des Fußballfeldes beträgt etwa 8060 m².
Das Verhältnis Länge zu Breite des Fußballfeldes ergibt sich bei unbestimmter Bahnlänge u im Maximalfall zu $\pi : 2$.
Wäre die Forderung nach maximaler Fläche des Ovals erhoben worden, ergäbe sich ein Kreis mit $s = 0$.

9.9. Es kommt bei der Auswahl des Balkenquerschnitts mehr auf die Höhe als auf die Breite an.
Im Falle extremer Tragfähigkeit ist $a : b = \sqrt{2} : 1$.
Die maximale Tragfähigkeit hängt noch von der Konstanten c ab. Sie ist

$$T_{\max} = \frac{2}{9}\sqrt{3}\, cd^3.$$

Maximale Querschnittsfläche ergäbe sich hingegen für einen quadratischen Querschnitt.

10.9. Die Maße der Kiste betragen bei maximalem Volumen 0,125 m; 0,25 m; 0,375 m. Die Kantenlängen stehen also im Verhältnis 1 : 2 : 3.
Das Volumen beträgt $V_{\max} = \dfrac{3}{256}$ m³ (d. h. etwas weniger als 12 l).
Die Materialien für die Oberfläche der Kiste (Holz o. ä.) blieben bei dieser Aufgabe unberücksichtigt.

[1]) Bei dieser Aufgabe ergibt sich „zufällig" $h_K = h_Z$ für den extremen Fall!

9.11. Ein auszubauendes Dachgeschoß hat als Querschnitt ein gleichschenkliges Dreieck von $h = 8$ m Höhe und $s = 12$ m Grundlinie. Der Querschnitt der auszubauenden Räumlichkeiten soll ein Rechteck mit maximaler Querschnittsfläche sein. Welche Maße haben die Dachgeschoßräume dann?

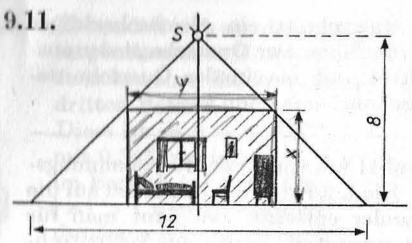
9.12. Zwei Betriebe A und B befinden sich 4 km und 11 km von einer Hochspannungsleitung (nach der gleichen Seite hin) entfernt. Die Lote von den Betrieben auf die Hochspannungsleitung sind 20 km voneinander entfernt. Wo baut man für beide Betriebe die gemeinsame Transformatorenstation, damit aus kostentechnischen Gründen die gesamte Länge beider Zuleitungen von der Transformatorenstation T an der Hochspannungsleitung zu den Betrieben minimal wird?

9.13. Beim Einbau eines Rundbogenfensters (rechteckige Fläche mit aufgesetztem Halbkreis) ist aus bautechnischen Gründen zu gewährleisten, daß ein Umfang von 8,00 m nicht überschritten werden darf. Welche Maße hat das Fenster zu erhalten, wenn die Lichtausbeute ein Maximum werden soll?

9.14. („Duale Aufgabe" zur vorhergehenden!)
Der Querschnitt eines Abwässerkanals bestehe aus einem Rechteck mit angesetztem Halbkreis. Die Querschnittsfläche muß aus wasserwirtschaftlichen Gründen (mindestens) einen Inhalt von 5,00 m² haben. Wie wählt man die Maße des Kanalquerschnitts, wenn der Materialverbrauch für die Ummauerung (Umfang der Querschnittsfläche) möglichst klein gehalten werden muß?
(Zuweilen wird gefordert, daß zu Reparaturzwecken eine lichte Höhe von 2,00 m bzw. sogar 2,50 m vorhanden sein muß!)

9.15. Ein geschlossener zylindrischer Ölbehälter mit einem Fassungsvermögen von 180 l soll so konstruiert werden, daß möglichst wenig Material verbraucht wird (Blech). Der wahre Blechverbrauch ist etwa um 20 % größer, da Abfälle entstehen. Wie sind die Maße des Zylinders zu wählen?

9.11.



$A = xy \to$ Max.

Nach Strahlensatz (Scheitel bei S):

$(8 - x) : 8 = y : 12$	$(h - x) : h = y : s$
$y = 12 - 1{,}5x$	$y = s - \frac{s}{h}x$
od. $x = 8 - 0{,}67\,y$	
$A(x) = 12x - 1{,}5x^2 \to$ Max.	$A(x) = sx - \frac{s}{h}x^2 \to$ Max.
$0 < x < 8$.	$0 < x < h$.

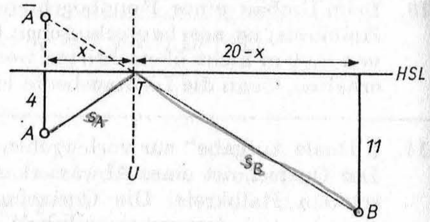
9.12. $L = s_A + s_B \to$ Min.

$s_A = \sqrt{x^2 + 16}$

$s_B = \sqrt{(20 - x)^2 + 121}$ nach PYTHAGORAS

$L(x) = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{521 - 40x + x^2} \to$ Min.

$0 \leqq x \leqq 20$



9.13. Extremalfunktion: $A = A_{\text{Rechteck}} + A_{\text{Halbkreis}} \to$ Max.

$A = 2ar + 0{,}5\pi r^2 \to$ Max.

Hilfsbeziehung: $u = 8 = 2r + 2a + \pi r$

Substitution $a = 0{,}5\,(8 - 2r - \pi r)$ ist gegenüber $r = \frac{8 - 2a}{2 + \pi}$ vorzuziehen.

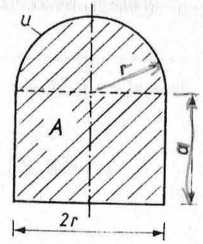
$A(r) = 8r - 2r^2 - \pi r^2 + 0{,}5\pi r^2$
$= 8r - 2r^2 - 0{,}5\pi r^2 \to$ Max.

$r > 0$.

9.14. Extremalfunktion hier: $u = 2a + 2r + \pi r \to$ Min.

Hilfsbeziehung hier:

$A = 5 = 2ar + 0{,}5\,\pi r^2$ —
zweckmäßigerweise in der Form
$a = \frac{5 - 0{,}5\,\pi r^2}{2r}$ als Substitution zu verwenden,
da sonst Wurzeln durch quadratische Gleichung entstehen.



$u(r) = 5r^{-1} + 0{,}5\,\pi r + 2r \to$ Min.; $r > 0$.

9.15. Extremalfunktion Gesamtfläche = Mantel + 2 Kreisflächen

$A = 2\pi rh + 2\pi r^2 \to$ Min.

Hilfsbeziehung: $V = \pi r^2 h = 180$;

zweckmäßige Substitution: $h = \frac{V}{\pi r^2}$

$A(r) = \frac{2V}{r} + \pi r^2 \to$ Min.

bzw. $A(r) = \frac{360}{r} + \pi r^2 \to$ Min.; $r > 0$.

9.11.

$A'(x) = 12 - 3x$	$A'(x) = s - \frac{2s}{h}x$
$A''(x) = -3 < 0$, also Max.	$A''(x) = -\frac{2s}{h} < 0$, also Max.
$A'(x) = 0$ führt zu:	
$12 = 3x \Rightarrow x_{\text{ex}} = 4$	$s = \frac{2s}{h}x \Rightarrow x_{\text{ex}} = 0{,}5\,h$
$y_{\text{ex}} = 12 - 6 = 6$.	$y_{\text{ex}} = 0{,}5\,s$.

9.12. $L'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 16}} + \frac{-40 + 2x}{2\sqrt{521 - 40x + x^2}}$ (Kettenregel beachten!)

$L'(x) = 0$ führt zu: $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} = \frac{20 - x}{\sqrt{521 - 40x + x^2}}$

und nach dem Quadrieren:

$x^2(521 - 40x + x^2) = (400 - 40x + x^2)(x^2 + 16)$

$105x^2 + 640x = 6400$ $x_{\text{ex}} = 5\frac{1}{3}$ (andere Lösung negativ, scheidet aus)

Überzeugen Sie sich an Hand der 2. Ableitung, daß tatsächlich ein Minimum vorliegt.

9.13. $A'(r) = 8 - 4r - \pi r$

$A''(r) = -4 - \pi < 0$ (also entsteht Maximum)

$A'(r) = 0$ liefert:

$8 - 4r - \pi r = 0$ mit $r_{\text{ex}} = \frac{8}{4 + \pi} = 1{,}12$

$a_{\text{ex}} = 0{,}5\,(8 - 2{,}24 - 3{,}52) = 1{,}12$.

9.14. $u'(r) = -5r^{-2} + 0{,}5\pi + 2$

$u''(r) = 10r^{-3} > 0$ (also entsteht Minimum)

$u'(r) = 0$ liefert:

$5r^{-2} = 0{,}5\pi + 2$ mit $r_{\text{ex}} = \sqrt{\frac{5}{2 + 0{,}5\pi}} = 1{,}18$

(negativer Wert liegt nicht im Definitionsbereich)

$a_{\text{ex}} = (5 - 2{,}20)\,/\,2{,}36 = 1{,}18$; $a_{\text{ex}} = r_{\text{ex}}$.

9.15. $A'(r) = 2\,(-Vr^{-2} + 2\pi r)$ bzw. $A'(r) = -360r^{-2} + 4\pi r$

$A''(r) = 2\,(2\,Vr^{-3} + 2\pi) > 0$ (also Minimum)

$A'(r) = 0$ liefert: $Vr^{-2} = 2\pi r$ bzw. $180\,r^{-2} = 2\pi r$

und $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ bzw. $r = \sqrt[3]{28{,}7} = 3{,}06$.

9.11. Der optimale Querschnitt wird erreicht, wenn die Höhe des Dachraums 50 % der Dachhöhe und die Breite 50 % der Dachbreite sind. Die Querschnittsfläche ist dann 50 % des Dachquerschnitts.
Die Höhe der entstehenden Räume ist bautechnisch voll ausreichend.

9.12. $s_A = 6{,}67$; $s_B = 18{,}33$. Die minimale Gesamtlänge beträgt $L_{\min} = 25$ km.
Spiegeln Sie den Punkt A (siehe Skizze) an der Hochspannungsleitung, dann erkennen Sie, daß dann die kürzeste Verbindung ATB vorliegt, wenn T am Schnittpunkt der Verbindung AB mit der Hochspannungsleitung liegt. Es entstehen ähnliche Figuren. Überzeugen Sie sich, daß die Lage jedes anderen Punktes T ungünstiger wäre.
Betrachten Sie die Figur S. 120 sorgfältig! Die gleiche Figur tritt für das Reflexionsgesetz an einem Spiegel (Optik) auf. Leicht läßt sich zeigen, daß auch für diese Aufgabe gilt: $\sphericalangle ATU = \sphericalangle UTB$. Der Weg des Lichtes von A über den Spiegel nach B ist dann am kürzesten, wenn das Reflexionsgesetz gilt.

9.13. Im Falle der maximalen Lichtausbeute beträgt der Radius 1,12 m und die Gesamthöhe des Fensters 2,24 m. Äußere Breite und Höhe des Fensters müssen dann also gleich groß sein.

9.14. Der Materialverbrauch für die Ummauerung ist am geringsten, wenn die Lichte maximale Höhe des Abwässerkanals und seine Breite übereinstimmend 2,36 m betragen (s. o.!). Darf der Wert 2,00 m nicht überschritten werden, so muß dieses Maß als bestmöglicher Wert angesehen werden. Aus $\frac{\pi r^2}{2} + 4r - 2r^2 = 5$; folgt dann $r = 1{,}13$. Der Materialverbrauch ist allerdings etwas größer in diesem Fall.

9.15. Im Minimalfall stimmen Höhe und Durchmesser des Behälters überein. Die Höhe beträgt hier 3,06 dm, also fast 31 cm. Der minimale Blechverbrauch beträgt in diesem Fall $BV = A_{\min} + 20\,\% = 1{,}2 \cdot (118 + 59{,}3)\ \mathrm{dm}^2 \approx 1{,}2 \cdot 177\ \mathrm{dm}^2 \approx 2{,}12\ \mathrm{dm}^2$.

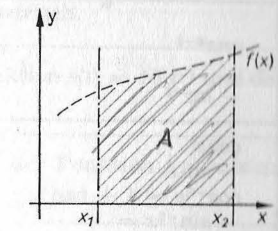
10. Flächenberechnung durch Integration

Übersicht zur Flächenberechnung mittels der Integralrechnung

Fläche zwischen Kurve und x-Achse (keine Nullstellen im Integrationsintervall)

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx;$$

$$A = |I|.$$

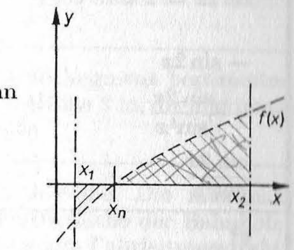


Fläche zwischen Kurve und x-Achse (Nullstelle im Integrationsintervall)

Man setze $f(x) = 0$ und findet x_N. Wenn $x_1 < x_N < x_2$, dann sind zwei Integrationen auszuführen.

$$I_1 = \int_{x_1}^{x_N} f(x)\,dx; \quad I_2 = \int_{x_N}^{x_2} f(x)\,dx;$$

$$A = |I_1| + |I_2|.$$

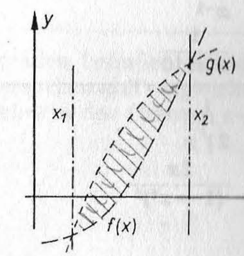


Fläche zwischen zwei Kurven

Durch $f(x) = g(x)$ findet man die gemeinsamen Punkte (nur Abszissen erforderlich).
Die Integrationsgrenzen sind x_1 und x_2. Die Integration muß unterbrochen werden, wenn noch ein weiterer Schnittpunkt im Intervall liegt.

$$I = \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)]\,dx$$

$A = |I|$. Eine Unterbrechung an den Nullstellen von $f(x)$, $g(x)$ ist nicht nötig!

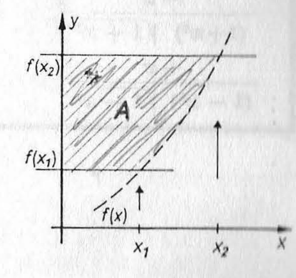


Fläche zwischen Kurve und y-Achse

Man bilde die Umkehrfunktion (formal: $y \longleftrightarrow x$) h zu f:

$$I = \int_{f(x_1)}^{f(x_2)} h(x)\,dx;$$

$$A = |I|.$$



Differentialquotienten und unbestimmte Grundintegrale einiger wichtiger Funktionen

Differentialquotient $f'(x)$	Funktion $f(x)$	unbestimmtes Integral $\int f(x)\,dx$
anx^{n-1}	$ax^n\ (n \neq -1)$	$\frac{a}{n+1}x^{n+1} + C$
$-ax^{-2}$	$ax^{-1} = \frac{a}{x}$	$a \ln \lvert x \rvert + C$
$\cos x$	$\sin x$	$-\cos x + C$
$-\sin x$	$\cos x$	$\sin x + C$
$\cos^{-2}x = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$	$-\ln \cos x + C$
$-\sin^{-2}x = -(1 + \cot^2 x)$	$\cot x$	$\ln \sin x + C$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$	$\sin^2 x$	$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x \cos x + C$
$-\sin 2x$	$\cos^2 x$	$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x \cos x + C$
$-\frac{\sin 2x}{\sin^4 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$
$\frac{\sin 2x}{\cos^4 x}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$
e^x	e^x	$e^x + C$
$a^x \ln a$	$a^x (a > 0;\ a \neq 1)$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
x^{-1}	$\ln x$	$x \ln x - x + C$
$\frac{1}{x \ln 10}$	$\lg x$	$x(\lg x - 0{,}4343) + C$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x} = x^{0,5}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$
$\frac{2x}{(1-x^2)^2}$	$\frac{1}{1-x^2}$ $\quad \lvert x \rvert < 1$	$\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$
	$\lvert x \rvert > 1$	$\ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C$
$\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$\frac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln \lvert x + \sqrt{1+x^2} \rvert + C$
$\frac{+x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad \lvert x \rvert < 1$	$\arcsin x + C$

10.1. Berechnen Sie den Flächeninhalt der von den Bildern der beiden in Aufg. 8.1. genannten Funktionen $y = x^2$ und $y = \sqrt{x}$ vollständig eingeschlossenen Fläche.

10.2. Berechnen Sie das Integral der Funktion durch $h(x) = x^2 - \frac{4}{3}$ in den Grenzen $x_1 = 0$ bis $x_2 = 2$, und deuten Sie das Ergebnis geometrisch.

10.3. Bestimmen Sie die Fläche zwischen dem Bild der Funktion $s(t) = 10\,t^{-1}$ und der t-Achse im Intervall zwischen $t_1 = 2$ und $t_2 = 8$.

10.4. Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen dem Bild der Funktion $f(x) = \sin x$ und der x-Achse im Intervall zwischen 0 und 2π.

10.5. Die Fläche zwischen der Parabel mit der Funktionsbeziehung $f(x) = ax^2$ und der Geraden mit der Gleichung $g(x) = c$ ist zu berechnen und mit dem umbeschriebenen Rechteck zu vergleichen; $a > 0$.

10.6. Das Volumen eines Tunnels mit einem durch ein Parabelsegment bestimmten Querschnitt ist zu berechnen, wenn die maximale (Pfeil-)Höhe 8 m, die maximale Breite 20 m und die Länge des Tunnels 1,4 km betragen.

10.7. Ein geplanter S-Bahnhof erhält ein parabolisches Gewölbe. Die maximale Breite beträgt 50 m, die Höhe maximal 18 m. Die Vorderfläche der Bahnhofshalle soll verglast werden, wobei wegen der Zughöhe (bis zum Fahrleitungsdraht) eine Baufreiheit von 6 m gewährleistet werden muß. Wieviel Quadratmeter Glas sind erforderlich?

10.8. Gegeben ist die Gerade $y = g(x) = mx$. Auf dieser Geraden befinden sich die Punkte P_1 und P_2 mit den x-Koordinaten x_1 und x_2. Untersuchen und vergleichen Sie die Flächen zwischen der Geraden und x- bzw. y-Achse in den Grenzen zwischen den beiden Punkten.

B

10.1. Die Integrationsgrenzen sind $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$

$$I = \int_0^1 [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^2 - x^{0,5})\,\mathrm{d}x.$$

10.2. $I = \int_0^2 \left(x^2 - \frac{4}{3}\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{4}{3} x\right]_0^2 = \frac{8}{3} - \frac{8}{3} = 0.$

10.3. Im Integrationsintervall liegen keine Nullstellen.

$$I = \int_2^8 \frac{10}{t}\,\mathrm{d}t = 10\left[\ln|t|\right]_2^8$$

10.4. Im Intervall von 0 bis 2π liegt eine weitere Nullstelle bei $x = \pi$. Hier muß die Integration unterbrochen werden.

$$I_1 = \int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x \qquad I_2 = \int_\pi^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$$

10.5. $ax^2 = c$; $x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$. Man bestimmt die Fläche zwischen dem Bild von f und der x-Achse im Intervall $-\sqrt{\frac{c}{a}}$ bis $+\sqrt{\frac{c}{a}}$.

$$I = \int_{-\sqrt{\frac{c}{a}}}^{+\sqrt{\frac{c}{a}}} ax^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{a}{3} x^3\right]_{-\sqrt{\frac{c}{a}}}^{+\sqrt{\frac{c}{a}}}$$

10.6. Zur Bestimmung der Querschnittsfläche muß vorher die Methode der unbestimmten Koeffizienten auf $f(x) = ax^2 + c$ angewendet werden:

$$f(0) = 8 = c; \qquad f(10) = 0 = 100a + 8; \qquad a = -\frac{2}{25}$$

$$f(x) = -\frac{2}{25} x^2 + 8.$$

10.7. Wiederum setzt man an: $y^2 = 2px$ (Parabel nach **rechts geöffnet**, Scheitelpunkt im Ursprung, für die Berechnung im zweiten Teil vorteilhafter)

$$x = 18; \qquad y = 25 \Rightarrow 625 = 36p \Rightarrow p = \frac{625}{36}$$

$$y^2 = \frac{625}{18} x.$$

10.8. $g(x_1) = mx_1$; $g(x_2) = mx_2$;

$$I_x = A_x = \int_{x_1}^{x_2} mx\,\mathrm{d}x = [0{,}5mx^2]_{x_1}^{x_2} = 0{,}5m\,(x_2{}^2 - x_1{}^2).$$

C

10.1. $I = \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{2}{3} x^{1,5}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$;

$$A = \frac{1}{3}.$$

10.2. Im Integrationsintervall hat $h(x)$ eine Nullstelle.

$$x^2 = \frac{4}{3} \qquad x_1 < 0 \qquad x_2 = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

Man bildet zur Flächenberechnung der Fläche zwischen zugehöriger Kurve und x-Achse

$$I_1 = \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{4}{3} x\right]_0^{\frac{2}{3}\sqrt{3}}$$

$$I_2 = \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{4}{3} x\right]_{\frac{2}{3}\sqrt{3}}^2 \qquad |I_1| + |I_2| = \frac{32}{27}\sqrt{3} = 2{,}05.$$

10.3. $I = 10\,[\ln|t|\,]_2^8 = 10\,(\ln 8 - \ln 2) = 10 \ln \frac{8}{2}$.

10.4. $I_1 = [-\cos x]_0^\pi = 2$; $\quad I_2 = [-\cos x]_\pi^{2\pi} = -2$.

10.5. $I = \frac{a}{3} \cdot \frac{c}{a}\left(\sqrt{\frac{c}{a}} + \sqrt{\frac{c}{a}}\right) = \frac{2c}{3}\sqrt{\frac{c}{a}}$.

10.6. Vereinfachung: Es wird nur eine der kongruenten Teilflächen berechnet, anschließend Multiplikation mit 2.

$$A_{\mathrm{Qu}} = 2\int_0^{10} (-0{,}08x^2 + 8)\,\mathrm{d}x = 2\left[-\frac{2}{75} x^3 + 8x\right]_0^{10}$$

$$= 2\left[-\frac{80}{3} + 80\right] = \frac{4}{3} \cdot 80 \approx 106{,}7.$$

10.7. Man berechnet nur den oberen Teil der Fläche (und multipliziert anschließend mit 2).

$$I = \int_0^{18} \frac{25}{6}\sqrt{2}\,x^{0,5}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{25\sqrt{2}}{9} x\sqrt{x}\right]_0^{18} = 300.$$

10.8. $I_y = A_y = \int_{mx_1}^{mx_2} \frac{y}{m}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2m}\,[y^2]_{mx_1}^{mx_2} = 0{,}5m\,(x_2{}^2 - x_1{}^2)$.

10.1. Die Fläche zwischen den beiden Kurven hat den Flächeninhalt 1/3. Durch diese Fläche wird das Quadrat aus den Punkten (0; 0) (1; 0) (1; 1) (0; 1) in drei gleich große Teile geteilt. (Wären x^n und $\sqrt[n]{x}$ zugrunde gelegt worden, so wäre der Inhalt der eingeschlossenen Fläche $\frac{n-1}{n+1}$. Prüfen Sie das selbst nach.)

10.2. Das Integral I hat den Wert 0. Dagegen ist die Fläche zwischen dem Bild der Funktion $h(x)$ und der x-Achse im Intervall $[0; 2]$ $A = 2{,}05$.

10.3. $A = |I| = 10 \ln 4 = 13{,}863$.

10.4. Der Flächeninhalt beträgt $A = |I_1| + |I_2| = 4$.

10.5. Der Flächeninhalt A des Parabelsegments ist gleich der Differenz zwischen Rechteckfläche und Fläche zwischen Parabel und x-Achse

$A = 2c\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{2}{3}c\sqrt{\frac{c}{a}} = \frac{4}{3}c\sqrt{\frac{c}{a}}$. Das ist ein Drittel der Rechteckfläche.

(Unterscheiden Sie: Das Parabelsegment hat 2/3 der Fläche des umschriebenen Rechtecks. Das Volumen eines Parabolkörpers ist 1/2 des Volumens des umbeschriebenen Zylinders.)

10.6. Das gesuchte Volumen beträgt 149000 m³.

$V = A_{Qu} \cdot l = 106{,}7 \cdot 1400 = 149000.$

10.7. Zu verglasen ist nur eine Fläche von 326,5 m².

$$A_{vgl} = 2\left[\frac{25\sqrt{2}}{9}\, x\sqrt{x}\right]_0^{12} = 326{,}5.$$

10.8. Die beiden Flächen sind gleich groß, unabhängig von dem vorliegenden m (d. h. dem Anstieg der Geraden).

Der Flächeninhalt beträgt $A = \frac{m}{2}(x_2^2 - x_1^2)$.

11. Volumenberechnung von Rotationskörpern – Integrationsmethoden

Bei der Volumenberechnung mittels der Integration ist besonders zu unterscheiden, ob die Rotation um die x-Achse oder um die y-Achse erfolgt. Die Berechnungen zur Rotation um die x-Achse werden im allgemeinen als leichter empfunden.[1] Bei durch $y = f(x)$ vorgegebener Kurvengleichung gilt für die **Rotation um die x-Achse**:

$$V_{(x)} = \pi \int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2 \, dx .$$

Bei Rotation um die y-Achse gilt:

$V_{(y)} = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2 \, dy$. Beachten Sie dabei die Grenzen $y_1 = f(x_1)$ und $y_2 = f(x_2)$!

Dazu ist zunächst die Umkehrfunktion $x = \varphi(y)$ zu bilden. Diese Beziehung wird quadriert. Es gilt dann:

$$V_{(y)} = \pi \int_{y_1}^{y_2} [\varphi(y)]^2 dy.$$

Rotiert die Fläche zwischen zwei Kurven um die x-Achse – man orientiere sich dabei immer an Hand einer Skizze über die Form des entstehenden Rotationskörpers – so ist zu berechnen:

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} \{[f_1(x)]^2 - [f_2(x)]^2\} \, dx \quad \text{bzw.} \quad V = \pi \left[\int_{x_1}^{x_2} [f_1(x)]^2 \, dx - \int_{x_1}^{x_2} [f_2(x)]^2 \, dx\right]^{2)}$$

Mittels der Integralrechnung können u. a. berechnet werden

die **Bogenlänge:** $\quad s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx$

die **Mantelfläche:** $\quad M = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx$

der **Schwerpunkt** von Rotationskörpern: $\quad x_S = \dfrac{\int_{x_1}^{x_2} x\,[f(x)]^2 \, dx}{\int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2 \, dx}$

und zahlreiche Ausdrücke in der Physik und Technik (Arbeitsintegral, Trägheitsmoment, elektr. Leistung im Wechselstrom). Ein Beispiel für Untersuchungen an einem interessanten Rotationskörper mittels der Integralrechnung finden Sie in Aufg. 11.4., S. 133.

Schätzen Sie Ihr erhaltenes Ergebnis immer ab!

---

[1]) Zuweilen läßt die Aufgabenstellung es zu, eine der beiden Möglichkeiten (Lage der Rotationsachse) auszuwählen. Die Erleichterung an Rechenaufwand bei der Integration muß dann oft mit erhöhten Schwierigkeiten bei der Aufstellung der zu integrierenden Funktion erkauft werden. Hier wird im übrigen die Methode der unbestimmten Koeffizienten verwendet (S.101).

[2]) Beachten Sie: Dieser Ausdruck darf nicht mit $\pi \int_{x_1}^{x_2} [f_1(x) - f_2(x)]^2 dx$ verwechselt werden!

Abgesehen von den auf einer (unvollständigen) Übersicht auf S. 124 zusammengestellten Grundintegralen lassen sich in vielen Fällen die Integrale mittels bestimmter **Integrationsmethoden** berechnen. Von diesen Methoden seien besonders die folgenden genannt:

I. Lineare Substitution $t = ax + b$

Beispiele: (1) $\int e^{0{,}5x}\,dx = \int e^t\,dt \cdot 2 = 2e^t + C = \underline{\underline{2e^{0{,}5x} + C.}}$

a) $t = 0{,}5x$
b) $x = 2t$
c) $\frac{dx}{dt} = 2$
d) $dx = 2\,dt$

(2) $\int \sqrt{a - bx}\,dx = -\frac{1}{b}\int \sqrt{t}\,dt = -\frac{2}{3b}t^{3/2} + C = \underline{\underline{-\frac{2}{3b}(a-bx)\sqrt{a-bx} + C.}}$

a) $t = a - bx$
b) $x = \frac{a}{b} - \frac{t}{b}$
c) $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{b}$
d) $dx = -\frac{1}{b}dt$

II. Integrale einer gebrochenen Funktion, bei der im Zähler die Ableitung des Nenners steht

Lösung: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$

Beispiel: $\int \frac{\sin x\,dx}{a + b\cos x} = \frac{1}{b}\int \frac{-b\sin x\,dx}{a + b\cos x} = \underline{\underline{-\frac{1}{b}\ln|a + b\cos x| + C.}}$

III. Integration des Produkts einer Funktion von $g(x)$ und der Ableitung $g'(x)$

Lösung: $\int f[g(x)] \cdot g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$

Beispiel: $\int \sin^2 x \cdot \cos x\,dx = \int [\sin x]^2 \cdot \cos x\,dx = \int t^2\,dt = \frac{t^3}{3} + C = \underline{\underline{\frac{1}{3}\sin^3 x + C.}}$

IV. Integration trigonometrischer Funktionen

Man verwende die Substitution: $t = \tan\frac{x}{2}$

Für eine solche Substitution gilt dann immer:

$\tan x = \frac{2t}{1 - t^2}$; $\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$; $\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$; $dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$

Beispiel: $\int \frac{dx}{1 - \sin x}$

a) $t = \tan\frac{x}{2}$
b) $\tan x = \frac{2t}{1 - t^2}$
c) $\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$
d) $x = 2\arctan t$
e) $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1 + t^2}$; $dx = \frac{2}{1 + t^2}dt$

Also: $\int \frac{dx}{1 - \sin x} = \int \frac{2}{1 + t^2} \cdot \frac{1\,dt}{1 - \frac{2t}{1 + t^2}}$

$$= \int \frac{2(1 + t^2)\,dt}{(1 + t^2)\cdot[1 + t^2 - 2t]} = \int \frac{2\,dt}{(1 - t)^2} = \frac{2}{1 - t} + C = \underline{\underline{\frac{2}{1 - \tan\frac{x}{2}} + C.}}\text{ [1]}$$

Häufig lassen sich Integrale auf mehrere Arten bearbeiten. Zuweilen findet auch der versierte Rechner nicht immer sofort den bequemsten und schnellsten Weg. Einige Integrale (sogenannte „elliptische" Integrale) lassen sich sogar nur numerisch auswerten. Sie finden sehr viele Integrale mit Lösungsansätzen in dem Buch BRONSTEIN-SEMENDJAJEW, Taschenbuch der Mathematik, BSB B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft 1969, in oder Bartsch, Mathematische Formeln, VEB Fachbuchverlag Leipzig 1971.

[1] Im Grunde genommen sind die Typen II bis IV Abarten der Substitutionsmethode.

11.1. Zwischen der Geraden $y = mx$ und der x-Achse liegt im Intervall $[x_1; x_2]$ eine Fläche, die um die x-Achse rotieren soll.
Zwischen der Geraden $y = mx$ und der y-Achse liegt im Intervall $[y_1; y_2]$ eine Fläche, die um die y-Achse rotieren soll.
Es gelte: $y_1 = mx_1$ und $y_2 = mx_2$.
Das Volumen beider entstehender Rotationskörper soll übereinstimmen. Was kann dann über den Koeffizienten m ausgesagt werden?

11.2. Ein parabolisches Gefäß hat eine innere Höhe von 10 cm und einen oberen lichten Durchmesser von 16 cm. Bestimmen Sie das Fassungsvermögen und die Füllhöhe bei halber Füllung.

11.3. Ein Stativfuß hat eine hyperbolische Begrenzungskurve gemäß der Funktion $y = \frac{2}{x}$. Der größte Durchmesser beträgt 2 dm, die Länge 3 dm. Berechnen Sie das Volumen.

* **11.4.** Die Hülle einer Forschungsrakete besteht aus einem Rumpf und einem kegelförmigen Kopf.
Der Rumpf wird beschrieben durch Rotation der Fläche zwischen dem Bild der Funktion mit der Gleichung $f(x) = 1 - 0{,}5\,e^{-x}$ und der x-Achse im Intervall $[0; 10]$. Die Mantellinie des Kegels ist Tangente an die Kurve im Punkte $P_0[0; f(0)]$. Maßangaben in m. Bestimmen Sie das Volumen der Rakete.

11.5. Weinfässer haben meist ellipsoidae Gestalt. Als Ausgangskurve soll der oberhalb der x-Achse gelegene Teil der Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ gewählt werden. Die Fläche zwischen ihr und der x-Achse rotiere im Intervall $[-0{,}5\,l; +0{,}5\,l]$ um die x-Achse. Welches Volumen entsteht für $a = 5$ dm, $b = 3$ dm und $l = 8$ dm?

* **11.6.** Berechnen Sie $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos x}{1 + \cos x}\, dx$.

* **11.7.** Berechnen Sie $\int\limits_2^4 \frac{dx}{x \ln x}$.

11.8. Berechnen Sie $\int\limits_0^1 e^{2x}\, dx$.

11.1. $V_{\text{rot}\,x} = \pi \int\limits_{x_1}^{x_2} m^2x^2\,\mathrm{d}x = \pi m^2 \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{x_1}^{x_2} = \frac{m^2}{3}\,\pi({x_2}^3 - {x_1}^3)$.

11.2. Zunächst wird eine zweckmäßige Lage des Koordinatensystems gewählt. Den Ursprung legt man günstig in den Scheitelpunkt einer nach rechts geöffneten Parabel, deren Achse mit der x-Achse zusammenfällt.
Danach wird die „begrenzende" Parabelfunktion bestimmt (Methode der unbestimmten Koeffizienten): $y^2 = 2px$. Für $x = 10$ ist $y = 8$. Daraus folgt $2p = 6{,}4$; $p = 3{,}2$; $y^2 = 6{,}4x$.

V (bis zur Füllhöhe h) $= \pi\int\limits_0^h 6{,}4\,x\,\mathrm{d}x$.

11.3. Man stellt zunächst die Integrationsgrenzen fest:

$$f(x_1) = 1; \quad \frac{2}{x_1} = 1 \Rightarrow x_1 = 2; \quad x_2 = x_1 + 3 = 5\,.$$

Zu berechnen ist also $V = \pi \int\limits_2^5 \frac{4\mathrm{d}x}{x^2}$.

11.4. Zunächst ist $[f(x)]^2$ zu bilden:

$[f(x)]^2 = 1 - \mathrm{e}^{-x} + 0{,}25\,\mathrm{e}^{-2x}$

$$\begin{aligned} V_{\text{Ru}} &= \pi \int\limits_0^{10} (1 - \mathrm{e}^{-x} + 0{,}25\mathrm{e}^{-2x})\,\mathrm{d}x = \pi\,[x + \mathrm{e}^{-x} - 0{,}125\,\mathrm{e}^{-2x}]_0^{10} \\ &= \pi\,[10 + \mathrm{e}^{-10} - 0{,}125\,\mathrm{e}^{-20} - 0 - \mathrm{e}^0 + 0{,}125\,\mathrm{e}^0] \\ &\sim \pi\,(10 + 0 - 0 - 0 - 1 + 0{,}125) = 9{,}125\,\pi \approx 28{,}7. \end{aligned}$$

11.5. Man stellt nach y^2 um:

$y^2 = -\frac{b^2}{a^2}x^2 + b^2$. Man berechnet das Doppelte des Volumens bei Rotation im Intervall $[0; 0{,}5\,l]$

$$V = 2\pi \int\limits_0^{0{,}5l} \left(-\frac{b^2}{a^2}x^2 + b^2\right)\mathrm{d}x\,.$$

11.6. $t = \tan\frac{x}{2}$; $\quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$; $\quad \mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1 + t^2}$

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos x}{1 + \cos x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{x=0}^{x=2\pi} \frac{(1 - t^2)\,(1 + t^2)\,2\mathrm{d}t}{(1 + t^2)\,2\,(1 + t^2)} = \int\limits_{x=0}^{x=2\pi} \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

11.7. Man formt um in $\int\limits_2^4 \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \int\limits_2^4 \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,\mathrm{d}x\,.$

Jetzt steht im Zähler die Ableitung des Nenners.

11.8. Man substituiert $2x = t$; $x = 0{,}5\,t$; $\mathrm{d}x = 0{,}5\,\mathrm{d}t$.

11.1. Ferner Umkehrfunktion: $x = y : m$; $f(x_2) = mx_2$; $f(x_1) = mx_1$

$$V_{\text{rot}\,y} = \pi \int\limits_{mx_1}^{mx_2} \frac{y^2}{m^2}\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{m^2}\left[\frac{1}{3}y^3\right]_{mx_1}^{mx_2} = \frac{\pi m}{3}\,({x_2}^3 - {x_1}^3)\,.$$

Beachten Sie bitte, daß dieses Volumen bei Rotation der Fläche zwischen der Geraden und der **y-Achse** um die y-Achse entsteht. Es handelt sich also nicht um die Rotation der im ersten Teil betrachteten Fläche!

11.2. V (bis h) $= \pi\int\limits_0^h 6{,}4x\,\mathrm{d}x = \pi\,[3{,}2x^2\,]_0^h = 3{,}2\,\pi h^2$.

11.3. $V = \pi \int\limits_2^5 \frac{4\,\mathrm{d}x}{x^2} = \pi\left[\frac{-4}{x}\right]_2^5 = \pi\,[-0{,}8 + 2] = 1{,}2\pi \approx 3{,}59$.

11.4. Man bestimmt den Tangentenanstieg für $x = 0$:

$f'(x) = 0{,}5\,\mathrm{e}^{-x}$; $\quad f'(0) = 0{,}5 = m$;
$f(0) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.

Schnittpunkt der Begrenzungsgeraden des Kegels mit der x-Achse: $x_S = -1$, Höhe des Kegels $= 1$.

11.5.
$$V = 2\pi\left[-\frac{b^2}{3a^2}x^3 + b^2x\right]_0^{0{,}5l} = 2\pi\left[-\frac{0{,}125\,b^2l^3}{3a^2} + 0{,}5\,b^2l\right]$$
$$= \frac{2}{3}\,\pi l b^2\left[1{,}5 - \frac{0{,}125}{a^2}\,l^2\right].$$

11.6.
$$\int\limits_{x=0}^{x=2\pi} \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{x=0}^{x=2\pi} \frac{2 - (1 + t^2)}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t = 2\int\limits_{x=0}^{x=2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2} - \int\limits_{x=0}^{x=2\pi} \mathrm{d}t$$
$$= [2\arctan t - t + C]_{x=0}^{x=2\pi}\,.$$

11.7. $\int\limits_2^4 \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,\mathrm{d}x = [\ln(\ln|x|)]_2^4 = \ln 1{,}3863 - \ln 0{,}6931.$

11.8. $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{x=0}^{x=1} \mathrm{e}^t\cdot 0{,}5\,\mathrm{d}t = 0{,}5\,[\mathrm{e}^t]_{x=0}^{x=1} = 0{,}5\,[\mathrm{e}^{2x}]_0^1 = 0{,}5\mathrm{e}^2 - 0{,}5\mathrm{e}^0 = 0{,}5\,(\mathrm{e}^2 - 1).$

11.1. Sollen die beiden Volumen gleich sein, so muß $V_1 = V_2$ gelten. $\frac{\pi m^2}{3}(x_2^3 - x_1^3) = \pi \frac{m}{3}(x_2^3 - x_1^3)$, also $m = 0$ oder $m = 1$; d. h., die Gerade $y = mx$ muß entweder die x-Achse sein oder unter 45° ansteigen.
Der Fall, daß m nach ∞ strebt, bleibt unberücksichtigt. Der Fall $m = 0$ ist uninteressant, das Volumen wäre dann ebenfalls 0.

11.2. $h = 10$; $V(10) = 3{,}2\,\pi \cdot 100 \approx 1000$.
Für $V = 500$ (halbe Füllung) folgt $500 = \pi \cdot 3{,}2\,h^2$; $h = \sqrt{\frac{500}{3{,}2\pi}} \approx 7{,}07$. Die Füllhöhe beträgt dann etwa 71 mm (und nicht etwa 5 cm!).

11.3. Das Volumen des Stativfußes beträgt etwa 3,6 dm³. Der Fuß hat an seiner Spitze einen Durchmesser von 0,8 dm. Nähme man einen Kegelstumpf an, so wäre das Volumen etwa 4,9 dm³.

11.4. $V_{\text{Rumpf}} = 28{,}7$; V_{Kegel} (ohne Integration) $= 0{,}26$; Gesamtvolumen der Rakete: $V = 28{,}96\ \text{m}^3$. Die Rakete ist 11 m lang und hat einen größten Durchmesser von 2 m.

11.5. Das Fassungsvermögen kann nach $V = \frac{2lb^2}{3}\left(1{,}5 - \frac{0{,}125}{a^2}\,l^2\right)$ ermittelt werden. Für $a = 5$ dm, $b = 3$ dm und $l = 8$ dm ergibt sich $V \approx 177$ Liter. Wäre der Durchmesser einer Seitenfläche gegeben (mit $2c$), so ergäbe sich allgemein:

$$V = \frac{\pi l}{3}(2b^2 + c^2).$$

11.6. $2 \arctan t - t = 2 \arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right) - \tan\frac{x}{2} = x - \tan\frac{x}{2}$ [1]

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x\,dx}{1+\cos x} = \left[x - \tan\frac{x}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\pi - 0 - 0 + 0 = 2\pi.$$

11.7. $$\int_2^4 \frac{dx}{x \ln x} = \ln(\ln 4) - \ln(\ln 2) = \ln\frac{\ln 4}{\ln 2} = \ln\frac{2\ln 2}{\ln 2} = \ln 2 = 0{,}6931$$

ist eleganter als

$$\int_2^4 \frac{dx}{x \ln x} = \ln 1{,}3863 - \ln 0{,}6931 = \ln\frac{1{,}3863}{0{,}6931} = \ln 2 = 0{,}6931.$$

11.8. $\int_0^1 e^{2x}dx = 0{,}5\,(e^2 - 1) = 0{,}5 \cdot 6{,}3891 = 3{,}1945.$

[1] Man beachte:
$\arctan(\tan x) = x$ bzw. $\arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$