MATHEMATIK

LEHRPROGRAMMBÜCHER
HOCHSCHULSTUDIUM

5

Partialbruchzerlegung

$$f(x) = \frac{A}{(x - x_i)^{\alpha}}$$

Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. · Leipzig

MATHEMATIK 5

LEHRPROGRAMMBÜCHER

HOCHSCHULSTUDIUM

Partialbruchzerlegung

VON H.-G. ENGELMANN, K.-H. GÄRTNER,
O. GREUEL, B. KRETZSCHMAR, M. RÖHR

LEIPZIG 1974
AKADEMISCHE VERLAGSGESELLSCHAFT
GEEST & PORTIG K.-G.

AUTOREN:

HANS-GEORG ENGELMANN

Lektor im Wissenschaftsbereich Mathematik der Ingenieurhochschule Mittweida

DR. RER. NAT. KARL-HEINZ GÄRTNER

Lektor an der Sektion Mathematik der Bergakademie Freiberg

PROF. DR. RER. NAT. OTTO GREUEL

Ordentlicher Professor für Mathematik an der Ingenieurhochschule Mittweida

BARBARA KRETZSCHMAR

Wissenschaftlicher Assistent im Wissenschaftsbereich Mathematik der Ingenieurhochschule Mittweida

MICHAEL RÖHR

Wissenschaftlicher Assistent an der Sektion Pädagogik/Psychologie der Karl-Marx-Universität Leipzig

HERAUSGEBER:

DOZ. DR. HEINZ LOHSE

Forschungszentrum für Theorie und Methodologie der Programmierung von Lehr- und Lernprozessen an der Sektion Pädagogik/Psychologie der Karl-Marx-Universität Leipzig

VLN 276-105/10/74 · LSV 1034

Printed in the German Democratic Republic
Satz: GG Interdruck Leipzig
Druck und Einband: Offizin Andersen Nexö, Leipzig
Bestell-Nr. 669 740 5
EVP 3,50

Vorwort

Die moderne Wissenschaftsentwicklung stellt an den Ausbildungsprozeß in unseren sozialistischen Hoch- und Fachschulen hohe Ansprüche, da einer raschen Zunahme der Erkenntnisse und dem ständig wachsenden Abstraktionsgrad aller Wissenschaftsdisziplinen eine relativ konstante Ausbildungszeit gegenüber stehen. Deshalb ist es unumgänglich, nach neuen Wegen in der Erziehung und Ausbildung sozialistischer Persönlichkeiten zu suchen. Mit programmiertem Lehrmaterial wird es möglich sein, bestimmte Ausbildungsabschnitte effektiver zu gestalten.
Die Anregung für dieses Heft gab ein Programm zum gleichen Thema, das Studenten und Hochschullehrer der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig für die Ausbildung von Diplommathematikern erarbeiteten. Das hier vorliegende Lehrprogramm entstand in enger Zusammenarbeit zwischen Vertretern des Forschungszentrums für Theorie und Methodologie der Programmierung von Lehr- und Lernprozessen an der Sektion Pädagogik/Psychologie der Karl-Marx-Universität Leipzig, der Sektion Mathematik der Bergakademie Freiberg und der Sektion Mathematik, Informationsverarbeitung und Kybernetik der Ingenieurhochschule Mittweida.
Es ist vor allem für den Einsatz in der Ausbildung von Ingenieuren und Ökonomen gedacht. Einzelheiten über die Einordnung dieses Programms in den Ausbildungsprozeß enthält der Abschnitt „Hinweise für den Lehrenden" (Seite 48). Bei der Konzipierung des Inhalt wurde davon ausgegangen, daß mathematische Beweise für Studenten technischer und ökonomischer Fachrichtungen nur in einem solchen Umfang zu vermitteln sind, der zum Verständnis des theoretischen Sachverhalts und zur Schulung des logischen Denkens erforderlich ist. Aus diesem Grund wurde an einigen Stellen bewußt auf die Durchführung von Beweisen verzichtet. Das darf aber nicht zu der irrigen Meinung führen, daß technische und ökonomische Kader nicht mit der Führung von Beweisen vertraut sein müssen.
Die Erprobungen des Lehrprogramms an der Bergakademie Freiberg und der Ingenieurhochschule Mittweida und die Ergebnisse von Kontrollarbeiten zeigen, daß mit dem vorliegenden programmierten Lehrmaterial gute Lernergebnisse erzielt werden können, so daß empfohlen wird, das Programm im Wechsel mit traditionellen Lehrveranstaltungen einzusetzen.
Allen, die zum Gelingen der Erprobung und zur Fertigstellung des Programms beigetragen haben, sei an dieser Stelle herzlich gedankt.

DIE AUTOREN

Das Programm richtet sich vorwiegend an

Abiturienten, Studenten des ersten Studienjahres ingenieurtechnischer, naturwissenschaftlicher und ökonomischer Fachrichtungen und weitere an Mathematik Interessierte.

Voraussetzungen zum erfolgreichen Durcharbeiten dieses Programms

Mathematik-Abschluß Klasse 12
(insbesondere Bestimmung von Nullstellen ganzer rationaler Funktionen, Typen rationaler Funktionen)
Grundrechenoperationen im Bereich der komplexen Zahlen
Koeffizientenvergleich für Polynome

Ziele

Sie sollen Kenntnisse über die *Partialbruchzerlegung* und Fertigkeiten beim *Zerlegen von gebrochenen rationalen Funktionen* in Partialbrüche unter Verwendung

der *Methode der unbestimmten Koeffizienten*,

der *Einsetzungsmethode* und

der *Grenzwertmethode*

erlangen.

Nach Durcharbeitung des Programms können Sie

- den Begriff „Partialbruch" definieren,
- entscheiden, für welche Funktionen eine Partialbruchzerlegung möglich ist,
- die wichtigsten Schritte von drei Methoden zur Bestimmung der Konstanten für die Partialbruchzerlegung angeben,
- diese Methoden auf typische Beispiele anwenden.

Des weiteren werden Sie sich eine übersichtliche, systematische Darstellung des Lösungswegs aneignen.

Inhalt

Hinweise für die Arbeit mit dem Lehrprogramm

Die Arbeit in einem Lehrprogramm ist eine Form des geleiteten Selbststudiums. Sie ist nur dann effektiv, wenn Sie selbständig, ehrlich und gewissenhaft studieren und bemüht sind, alle an Sie gestellten Anforderungen zu erfüllen.
Der Lehrstoff ist nach fachlichen und pädagogischen Gesichtspunkten in Lehrschritte aufgeteilt. Sie konzentrieren sich auf das intensive Studium der Schritte und die Lösung der darin gestellten Aufgaben. Am Ende der Lehrschritte wird durch Pfeile angegeben, welcher Lehrschritt als nächster von Ihnen zu bearbeiten ist. Gehen Sie aber erst dann weiter, wenn Sie gründlich nachgedacht und die Lösung schriftlich fixiert haben. Die dazu erforderlichen Rechnungen und Notizen führen Sie auf Konzeptzetteln aus.

Die im Programm verwendeten Symbole bedeuten im einzelnen:

$\longrightarrow x$	Gehen Sie nach Lehrschritt x!
$— x \longrightarrow y$	Studieren Sie zunächst Lehrschritt x, danach y!
$— x —\supset$ / $\longleftarrow$	Lesen Sie Lehrschritt x, und kehren Sie dann zu der Stelle im Programm zurück, an der Sie sich gerade befinden!
!	Wichtiger Hinweis.

Durch die verzweigte Struktur des Programms wird eine Anpassung an Ihre Leistungsfähigkeit ermöglicht. Entscheiden Sie sich stets für den Weg, der Ihrer Lösung entspricht.

! Legen Sie sich jetzt Ihr Arbeitsmaterial bereit.

Wir wünschen Ihnen bei der Arbeit mit dem Programm viel Erfolg!

In der Mathematik haben die rationalen Funktionen 1

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

$$\text{mit } a_n \neq 0, \quad b_m \neq 0, \quad m \geqq 0, \quad n \geqq 0$$

eine große Bedeutung. $f(x)$ heißt eine *gebrochene rationale Funktion*, wenn $f(x)$ als Quotient zweier teilerfremder Polynome $g(x)$ und $h(x)$ darstellbar ist.

Jede *unecht gebrochene rationale Funktion* ($n \geqq m$) läßt sich als Summe einer *ganzen rationalen Funktion* und einer *echt gebrochenen rationalen Funktion* ($n < m$) darstellen. Es ist nun weiter möglich, die echt gebrochene rationale Funktion ihrerseits in eine Summe rationaler Funktionen von besonders einfachem Typus, die sog. Partialbrüche, zu zerlegen. Die **Partialbruchzerlegung** ist also die Zerlegung von echt gebrochenen rationalen Funktionen in eine Summe von Partialbrüchen.

In der Praxis wird die Partialbruchzerlegung u. a. bei der Integration gebrochener rationaler Funktionen und bei der Laplacetransformation benötigt. Deshalb ist sie für Studenten der ingenieurtechnischen, naturwissenschaftlichen und ökonomischen Fachrichtungen eine wichtige Voraussetzung zur Lösung mathematischer Probleme.

In diesem Programm wollen wir Sie mit einigen wichtigen Ergebnissen der Theorie der Partialbruchzerlegung vertraut machen. Durch die Lösung zahlreicher Aufgaben werden Sie Fertigkeiten in der Zerlegung von echt gebrochenen rationalen Funktionen in Partialbrüche erlangen.

→ 2

Zunächst sollen Sie Ihre **Vorkenntnisse**, die Sie dazu benötigen, mit einigen Aufgaben **überprüfen**. Benutzen Sie für die Lösung einen der bereitgelegten Zettel! 2

1. Aufgabe:

Berechnen Sie die Nullstellen der ganzen rationalen Funktion

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 17x - 13!$$

Erst dann → 14

3

Für unecht gebrochene rationale Funktionen ist die Partialbruchzerlegung *nicht* durchführbar. Deshalb zerlegt man eine unecht gebrochene rationale Funktion durch Polynomdivision zunächst in einen ganzen und einen echt gebrochenen rationalen Anteil. Die Partialbruchzerlegung wird dann nur auf den echt gebrochenen rationalen Anteil angewandt.

4. Aufgabe:

Zerlegen Sie $f(x) = \dfrac{x^4 - 7x^2 + 4}{x^3 - 3x^2 - x + 3}$ in einen ganzen rationalen und einen echt gebrochenen rationalen Anteil!

Anschließend ⟶ 9

4

! Vergleichen Sie Ihr Resultat der 3. Aufgabe (LS 15) mit der folgenden Übersicht:

Funktion	Grad der Zählerfunktion		Grad der Nennerfunktion	Typ der Funktion
a)	2	>	1	unecht gebrochen rational
b)	5	<	6	echt gebrochen rational
c)	2	=	2	unecht gebrochen rational
d)				ganz rational
e)	3	<	4	echt gebrochen rational

(Teilerfremdheit liegt jeweils vor.)

⟶ 3

5

Ihr Ergebnis der 1. Aufgabe (Lehrschritt 2) ist nicht richtig! Bei der Berechnung der nicht-reellen Nullstellen unterlief Ihnen ein Vorzeichenfehler. Die reelle Nullstelle ermittelten Sie richtig, aber die nicht reellen müssen lauten:

$$x_2 = 2 + 3j \quad \text{und} \quad x_3 = 2 - 3j.$$

Jetzt zur 2. Aufgabe!

⟶ 10

6

Ihr Ergebnis der 1. Aufgabe ist richtig!

Sie hatten einen guten Start. Lösen Sie nun eine weitere Aufgabe!

⟶ 10

Ihr Ergebnis der 1. Aufgabe (Lehrschritt 2) ist nicht richtig! **7**

Bei der Lösung ist es zweckmäßig, das Horner-Schema zu verwenden. Durch sinnvolles Probieren, z. B. Einsetzen der Primfaktoren ± 1, ± 13 des Absolutgliedes, findet man für $x^3 - 5x^2 + 17x - 13 = 0$ die Lösung $x_1 = 1$. Abspalten des Linearfaktors $(x - 1)$ ergibt:

$$(x^3 - 5x^2 + 17x - 13):(x - 1) = x^2 - 4x + 13.$$

Aus $x^2 - 4x + 13 = 0$ folgt (Anwenden der Lösungsformel für die quadratische Gleichung):

$$x_2 = 2 + 3j \text{ und } x_3 = 2 - 3j.$$

Jetzt zur 2. Aufgabe!

→ 10

Sie beherrschen noch nicht alle Voraussetzungen zum Durcharbeiten des Programms. Im einzelnen waren als Vorkenntnisse notwendig: Grundrechenoperationen im Bereich der komplexen Zahlen, Typen rationaler Funktionen, Bestimmung von Nullstellen ganzer rationaler Funktionen, Koeffizientenvergleich für Polynome. **8**

! Verwenden Sie die aufgeführte Literatur, und eignen Sie sich die fehlenden Kenntnisse an. Beginnen Sie danach die Arbeit im Programm erneut!

→ Literatur
(Seite 47)

Lösung: $f(x) = \underbrace{x + 3}_{\substack{\text{ganzer}\\ \text{rationaler}\\ \text{Anteil}}} + \underbrace{\dfrac{3x^2 - 5}{x^3 - 3x^2 - x + 3}}_{\substack{\text{echt gebrochener}\\ \text{rationaler}\\ \text{Anteil}}}.$ **9**

! Entscheiden Sie! Haben Sie ein anderes Resultat erhalten?

Ja → 11
Nein → 13

---

2. Aufgabe: **10**

Berechnen Sie durch Koeffizientenvergleich A, B und C in der Gleichung

$$2x^2 + 6 = A(x + 1)^2 + B(x^2 - 1) + C(x - 1)^2!$$

→ 16

11

Ihr Ergebnis der 4. Aufgabe (LS 3) ist fehlerhaft!

Durch Polynomdivision folgt:

$$\begin{array}{l}
(x^4 \qquad - 7x^2 \qquad + 4):(x^3 - 3x^2 - x + 3) = x + 3 + \dfrac{3x^2 - 5}{x^3 - 3x^2 - x + 3}. \\
\underline{-(x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x)} \\
\qquad 3x^3 - 6x^2 - 3x + 4 \\
\qquad \underline{-(3x^3 - 9x^2 - 3x + 9)} \\
\qquad\qquad 3x^2 \qquad - 5
\end{array}$$

! Überprüfen Sie Ihre Rechnung nochmals, und arbeiten Sie danach in Lehrschritt 17 weiter!

→ 17

12

Die Lösung ergibt sich so:

$$2x^2 + 6 = A(x+1)^2 + B(x^2-1) + C(x-1)^2,$$

$$2x^2 + 6 = Ax^2 + 2Ax + A + Bx^2 - B + Cx^2 - 2Cx + C,$$

$$2x^2 + 6 = (A + B + C)x^2 + (2A - 2C)x + (A - B + C).$$

Durch den Vergleich der einander entsprechenden Koeffizienten auf beiden Seiten der Gleichung findet man das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ll}
x^2: & 2 = A + B + C \\
x^1: & 0 = 2A \qquad - 2C \\
x^0: & 6 = A - B + C.
\end{array}$$

Sie können das Gleichungssystem mit verschiedenen Verfahren lösen, z.B. mit dem Gaußschen Algorithmus oder dem Austauschverfahren. Wir empfehlen hier folgendes:

Addieren Sie die erste und dritte Gleichung, dadurch fällt B heraus. Sie erhalten ein Gleichungssytsem mit den Unbekannten A und C, das Sie auf jeden Fall lösen können.

Das richtige Ergebnis lautet: $A = 2$, $B = -2$, $C = 2$.

→ 15

13

Ihr Ergebnis der 4. Aufgabe ist richtig!

Sie haben damit das Studium des ersten Abschnitts des Programms erfolgreich abgeschlossen.

→ 17

14

! Entscheiden Sie, mit welchem der angegebenen Ergebnisse Ihr Resultat übereinstimmt!

$x_1 = 1,\ x_2 = -2 + 3j,\ x_3 = -2 - 3j.$ ——► 5

$x_1 = 1,\ x_2 = 2 + 3j,\ x_3 = 2 - 3j.$ ——► 6

Ich habe ein anderes Ergebnis. ——► 7

Ich finde kein Ergebnis. ——► 8

15

Für die weitere Arbeit im Programm ist es wichtig, mit den Begriffen *ganze, gebrochene, echt gebrochene* und *unecht gebrochene rationale* Funktion genau vertraut zu sein.

Diese Unterscheidung ist notwendig, weil die Partialbruchzerlegung nur für echt gebrochene rationale Funktionen durchführbar ist.

3. Aufgabe:

Ordnen Sie den folgenden Funktionen die Eigenschaft *ganz rational, echt gebrochen rational* oder *unecht gebrochen rational* zu, und begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung!

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{5x}$

b) $f(t) = \dfrac{t^5 - 2t + 1}{(t^2 - 2)^3}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 5}{(x - 1)(x + 5)}$

d) $f(x) = \dfrac{2}{5}x^3 - \dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{4}{3}x - \dfrac{5}{6}$

e) $f(y) = \dfrac{y(y + 1)(y + 2) + (y + 3)}{(y^2 + 2y - 1)^2}$

! Notieren Sie sich den zutreffenden Begriff und die Begründung auf dem Konzeptzettel! ——► 4

16

Die Lösung der 2. Aufgabe (LS 10) lautet $A = 2,\ B = -2,\ C = 2$.

! Vergleichen Sie diese mit dem von Ihnen gefundenen Ergebnis! Haben Sie das gleiche erhalten?

Ja ——► 15

Nein ——► 12

17 Wir befassen uns jetzt mit einigen wichtigen Ergebnissen der **Theorie der Partialbruchzerlegung.**

Definition des Partialbruchs:

> **Ein Partialbruch ist eine Funktion der Form**
>
> $$f(x) = \frac{A}{(x - x_i)^\alpha},$$
>
> **wobei A und x_i komplexe Zahlen sind und $\alpha \geqq 1$ eine natürliche Zahl ist.**

Frage:

Welche der folgenden Funktionen sind Partialbrüche?

a) $f(x) = \dfrac{5x}{(x-2)^2}$ b) $f(x) = \dfrac{12}{(x-3)^4}$

c) $f(x) = \dfrac{5}{(x-4)^{-2}}$ d) $f(x) = \dfrac{3}{x - 2 + 3\mathrm{j}}$

→ 25

18 **Antwort:**

Eine ganze rationale Funktion 3. Grades mit reellen Koeffizienten besitzt mit Berücksichtigung der Vielfachheit *genau* 3 Nullstellen.

Dabei sind folgende Fälle möglich:

1. Alle Nullstellen sind gleich;

   x_1 mit $\alpha_1 = 3$.

2. Zwei Nullstellen sind gleich;

   z. B. x_1 mit $\alpha_1 = 1$, x_2 mit $\alpha_2 = 2$.

3. Alle Nullstellen sind voneinander verschieden;

   x_1 mit $\alpha_1 = 1$, x_2 mit $\alpha_2 = 1$, x_3 mit $\alpha_3 = 1$.

In den Fällen 1. und 2. sind die Nullstellen immer reell. Im 3. Fall sind entweder alle drei reell, oder eine ist reell, und die anderen beiden sind konjugiert komplex.

Aufgabe:

Geben Sie für die drei Fälle die Zerlegung in Linearfaktoren an.

Danach → 20

19

Sie haben die Definition des Partialbruchs noch nicht richtig erfaßt.

! Lesen Sie folgende Hinweise zu den vier in LS 17 angegebenen Funktionen aufmerksam durch.

a) ist *kein* Partialbruch, da A stets eine Konstante sein muß.

b) erfüllt alle Bedingungen der Definition des Partialbruchs.
Beachten Sie, daß eine reelle Zahl ein Sonderfall einer komplexen Zahl ist.

c) ist *kein* Partialbruch, da α eine natürliche Zahl größer oder gleich eins sein muß.

d) ist ein Partialbruch mit $x_i = 2 - 3j$ und $\alpha = 1$.

! Sehen Sie sich die Definition des Partialbruchs nochmals an.

——— 17 ———▶ 30

20

Die Zerlegung in Linearfaktoren ergibt:

1. $h(x) = (x - x_1)^3$

2. $h(x) = (x - x_1)(x - x_2)^2$

3. $h(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

Je nachdem, ob die Nennerfunktion $h(x)$ einer echt gebrochenen rationalen Funktion $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ einfache reelle, mehrfache reelle, einfache komplexe oder mehrfache komplexe Nullstellen besitzt, macht man für die Zerlegung von $f(x)$ in Partialbrüche spezielle Ansätze.

Die ersten drei Fälle behandeln wir zunächst einzeln, den Fall der mehrfachen komplexen Nullstellen führen wir nicht besonders aus. Den Ansatz für diesen Fall können Sie dem allgemeinen Ansatz in Lehrschritt 51 entnehmen.

————▶ 26

21 **Ansätze für die Partialbruchzerlegung**

Wir kommen jetzt zum einfachsten Fall

1. Fall der Partialbruchzerlegung

$h(x)$ besitzt *einfache reelle* Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_m$, d.h., $h(x)$ ist in der Form

$$h(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_m)$$

darstellbar. Dann macht man folgenden

Ansatz:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \cdots + \frac{A_m}{x - x_m}$$

Hinweis: Wichtig ist, daß zu jeder Nullstelle x_i genau ein Partialbruch mit einer allgemeinen Konstanten A_i angesetzt wird. Dabei ist die Reihenfolge der Partialbrüche beliebig.

Die Berechnung der Konstanten werden wir später kennenlernen.

→ 22

---

22 **5. Aufgabe:**

Wie lautet der Ansatz für die Partialbruchzerlegung der Funktion

$$f(x) = \frac{x + 7}{x^3 - 3x^2 - 10x}?$$

→ 32

---

23 Antwort (sinngemäß):

Der Hauptnenner der Partialbrüche ergibt die Nennerfunktion der echt gebrochenen rationalen Funktion.

Diese Tatsache läßt erkennen, daß es bei der Partialbruchzerlegung zunächst einmal auf die Zerlegung der Nennerfunktion in Linearfaktoren ankommt.

Deshalb beschäftigen wir uns jetzt mit der Zerlegung einer ganzen rationalen Funktion in Linearfaktoren.

→ 24

Aus dem Fundamentalsatz der Algebra folgt der **24**

Satz:

Jede ganze rationale Funktion vom Grad m der Gestalt $h(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0$ mit reellen Koeffizienten b_i $(i = 0, 1, \ldots, m-1)$ kann auf genau eine Weise als Produkt $h(x) = (x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2} \cdots (x - x_k)^{\alpha_k}$ geschrieben werden, wobei die x_i sämtlich verschieden sind, α_i natürliche Zahlen $\geqq 1$ sind und $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = m$ gilt.

x_i heißt α_i-fache Nullstelle oder Nullstelle der Vielfachheit α_i.
Zu jeder nicht-reellen Lösung x_i mit der Vielfachheit α_i ist die konjugiert komplexe Zahl $\bar{x}_i$ ebenfalls Lösung mit der Vielfachheit α_i.

Frage:

Wieviel Nullstellen besitzt eine ganze rationale Funktion 3. Grades $h(x) = x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$ $(b_0, b_1, b_2$ reell), und welche Kombinationen reeller und/oder nicht-reeller Nullstellen können auftreten?

! Geben Sie alle Möglichkeiten an, und vergleichen Sie anschließend in LS 18.

——▶ 18

Haben Sie erkannt, daß von den in Lehrschritt 17 angegebenen Funktionen b) und d) Partialbrüche sind und a) und c) nicht? **25**

Ja ——▶ 30

Nein ——▶ 19

Bei unseren weiteren Ausführungen stützen wir uns auf den Satz der Partialbruchzerlegung, den wir ohne Beweis angeben. **26**

Satz:

Jede echt gebrochene rationale Funktion kann (bis auf die Reihenfolge) auf genau eine Weise als Summe von Partialbrüchen geschrieben werden.

! Lesen Sie diesen wichtigen Satz nochmals durch.

——▶ 21

27

2. Fall der Partialbruchzerlegung

$h(x)$ besitzt *mehrfache reelle* Nullstellen x_r $(r = 1, \ldots, k)$ der Vielfachheiten $\alpha_r > 1$, d.h., $h(x)$ ist in der Form $h(x) = (x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2} \cdots (x - x_k)^{\alpha_k}$ darstellbar.

Ansatz:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{A_{11}}{x - x_1} + \frac{A_{12}}{(x - x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x - x_1)^{\alpha_1}}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$+ \frac{A_{k1}}{x - x_k} + \frac{A_{k2}}{(x - x_k)^2} + \cdots + \frac{A_{k\alpha_k}}{(x - x_k)^{\alpha_k}}$$

Der 1. Index gibt immer die Nummer r $(r = 1, \ldots, k)$ der Nullstelle an, während durch den 2. Index ihre Vielfachheit α_r berücksichtigt wird.

! Überlegen Sie, wodurch sich dieser Ansatz von dem in Lehrschritt 21 angegebenen unterscheidet.

Anschließend ——→ 28

28

6. Aufgabe:

Stellen Sie den Ansatz für die Partialbruchzerlegung der Funktion

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-2)^3 (x+5)^2} \text{ auf!}$$

——→ 36

29

Wir wollen die einzelnen Schritte des Ansatzes gemeinsam überlegen. Die Nennerfunktion $h(x) = x^3 - 3x^2 - 10x$ besitzt die Nullstellen $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $x_3 = -2$. Folglich ist sie in der Form $h(x) = x(x-5)(x+2)$ darstellbar. Nach Lehrschritt 21 setzt man an:

$$\frac{x+7}{x^3 - 3x^2 - 10x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-5} + \frac{A_3}{x+2}.$$

Beachten Sie, daß in der 5. Aufgabe (LS 22) der Partialbruch $\frac{A_1}{x - x_1}$ für die Nullstelle $x_1 = 0$ in $\frac{A_1}{x}$ übergeht.

——→ 27

In den folgenden Lehrschritten zeigen wir Ihnen eine Methode der Zerlegung von echt gebrochenen rationalen Funktionen in Partialbrüche. Wir betrachten die Funktion **30**

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0}{x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0},$$

wobei $a_0, \cdots, a_n, b_0, \ldots, b_{m-1}$ reell sind, $n < m$ gilt und $a_n \neq 0$ ist. $b_m = 1$ bedeutet keine Beschränkung der Allgemeinheit. Diese Form läßt sich in jedem Fall durch Erweitern der echt gebrochenen rationalen Funktion mit $\frac{1}{b_m}$ erreichen.

Am Beispiel $\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+3} = \frac{(x+3) + 2\,(x-2)}{(x-2)\,(x+3)} = \frac{3x-1}{x^2+x-6}$ erkennen Sie, daß sich zwei Partialbrüche stets zu einer echt gebrochenen rationalen Funktion zusammenfassen lassen, wenn ihre Summe nicht Null ergibt. Dagegen ist der umgekehrte Weg, eine echt gebrochene rationale Funktion als Summe von Partialbrüchen zu schreiben, weitaus schwieriger. Dieser umgekehrte Weg heißt *Partialbruchzerlegung*.

! Sehen Sie sich das eben angeführte Beispiel noch einmal an, und beantworten Sie dann die folgende Frage.

Frage:

Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Nennerfunktionen der Partialbrüche und der Nennerfunktion der gebrochenen rationalen Funktion?

→ 23

Ihr Ansatz ist richtig. **31**
Betrachten wir jetzt noch den Fall konjugiert komplexer Nullstellen.

→ 33

32

Der Ansatz für die 5. Aufgabe (LS 22) lautet:

$$f(x) = \frac{x+7}{x^3 - 3x^2 - 10x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-5} + \frac{A_3}{x+2}.$$

Falls Sie den Ansatz nicht gefunden haben → 29

Sonst → 27

33 **3. Fall der Partialbruchzerlegung**

Es sei $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{Bx + C}{x^2 + p_r x + q_r}$, wobei B, C, p_r, q_r reell sind. Besitzt $h(x)$ reelle Nullstellen, d.h. ist $p_r^2 - 4q_r \geqq 0$, so führen wir die Zerlegung wie im 1. Fall (LS 21) oder 2. Fall (LS 27) aus. Ist $p_r^2 - 4q_r < 0$, d.h. liegen nicht-reelle Nullstellen vor, kann man den Ansatz ebenso wie im 1. Fall aufstellen.

Aufgabe:

Geben Sie den Ansatz für die Partialbruchzerlegung der obigen Funktion $f(x)$ für den Fall an, daß $h(x)$ die konjugiert komplexen Nullstellen x_r und $\bar{x}_r$ besitzt.

→ 34

---

34 Die Lösung der Aufgabe aus LS 33 lautet:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{Bx + C}{x^2 + p_r x + q_r} = \frac{A}{x - x_r} + \frac{\bar{A}}{x - \bar{x}_r}.$$

Es läßt sich nachweisen, daß A und $\bar{A}$ konjugiert komplex sind. Für praktische Belange kann man die komplexe Rechnung umgehen. Deshalb werden wir die Definition des Partialbruchs für den Fall erweitern, daß $h(x)$ nicht-reelle Nullstellen besitzt. Dabei muß man berücksichtigen, daß diese konjugiert komplexen Nullstellen mit einer Vielfachheit $\beta \geqq 1$ auftreten können.

→ 35

---

35 **Erweiterung der Definition des Partialbruchs:**

Unter Partialbruch verstehen wir künftig auch Funktionen der Form

$$f(x) = \frac{Bx + C}{(x^2 + p_r x + q_r)^\beta} \quad \text{mit } p_r^2 - 4q_r < 0.$$

Dabei sind B, C, p_r, q_r reelle Zahlen und $\beta \geqq 1$ ist eine natürliche Zahl.

Frage:

Welche der folgenden Funktionen sind im Sinne der erweiterten Definition Partialbrüche?

a) $f(x) = \frac{3x + 5}{x^2 - 4x + 5}$ c) $f(x) = \frac{5x - 3}{x^2 - 4x + 4}$

b) $f(x) = \frac{3x + 5}{x^2 - 4x + 3}$ d) $f(x) = \frac{5}{x^2 + 3x + 3}$

→ 43

Welche Form hat Ihr Ansatz? **36**

$$f(x) = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{x+5}$$ ⟶ 39

$$f(x) = \frac{A_1}{(x-2)^3} + \frac{A_2}{(x+5)^2}$$ ⟶ 42

$$f(x) = \frac{A_{11}}{x-2} + \frac{A_{12}}{(x-2)^2} + \frac{A_{13}}{(x-2)^3} + \frac{A_{21}}{x+5} + \frac{A_{22}}{(x+5)^2}$$

⟶ 31

Ich habe einen anderen Ansatz. ⟶ 40

37

Lautet Ihr Ansatz

$$f(x) = \frac{B_1 x + C_1}{x^2+4} + \frac{B_2 x + C_2}{x^2 - 2x + 3}\,?$$

Nein ⟶ 41

Ja ⟶ 48

38

! Sehen Sie sich die Fragestellung in LS 35 und die dazugehörigen Begründungen an.

a) ist ein Partialbruch. Weil für $p_r = -4$ und $q_r = 5$ die Bedingung $p_r^2 - 4q_r = -4 < 0$ erfüllt ist, kann die Nennerfunktion nicht in reelle Linearfaktoren zerlegt werden.

b) ist *kein* Partialbruch. Für $p_r = -4$ und $q_r = 3$ gilt $p_r^2 - 4q_r = 4 > 0$. Folglich kann die Nennerfunktion in $(x-1)(x-3)$ zerlegt werden. Man muß zwei Partialbrüche $\frac{A_1}{x-1}$ und $\frac{A_2}{x-3}$ ansetzen.

c) ist *kein* Partialbruch. Weil für $p_r = -4$ und $q_r = 4$ der Ausdruck $p_r^2 - 4q_r = 0$ ist, kann die Nennerfunktion in der Form $(x-2)^2$ geschrieben werden. Dann muß man die Partialbrüche für eine doppelte reelle Nullstelle ansetzen: $\frac{A_{11}}{x-2}$ und $\frac{A_{12}}{(x-2)^2}$.

d) ist ein Partialbruch. Weil für $p_r = 3$ und $q_r = 3$ die Bedingung $p_r^2 - 4q_r = -3 < 0$ erfüllt ist, kann die Nennerfunktion nicht in reelle Linearfaktoren zerlegt werden. Im Zähler dieses Bruchs sind $B = 0$ und $C = 5$.

⟶ 44

39 Der von Ihnen gefundene Ansatz für die 6. Aufgabe (LS 28) ist nicht richtig.

Sie haben übersehen, daß die Nullstelle $x_1 = 2$ mit der Vielfachheit $\alpha_1 = 3$ und die Nullstelle $x_2 = -5$ mit der Vielfachheit $\alpha_2 = 2$ auftritt. Wegen der Vielfachheit der Nullstellen müssen Sie für die Nullstelle x_1 drei Partialbrüche $\frac{A_{11}}{x-2} + \frac{A_{12}}{(x-2)^2} + \frac{A_{13}}{(x-2)^3}$ und für die Nullstelle x_2 zwei Partialbrüche $\frac{A_{21}}{x+5} + \frac{A_{22}}{(x+5)^2}$ ansetzen.

! Sehen Sie sich den Ansatz in LS 27 noch einmal gründlich an.

—— 27 ——▶ 33

---

40 Der Ansatz für die 6. Aufgabe (LS 28) lautet:

$$f(x) = \frac{A_{11}}{x-2} + \frac{A_{12}}{(x-2)^2} + \frac{A_{13}}{(x-2)^3} + \frac{A_{21}}{x+5} + \frac{A_{22}}{(x+5)^2}$$

! Entscheiden Sie:

Ich habe nur die Konstanten anders bezeichnet. ——▶ 31

Ich stelle andere Abweichungen fest. ——▶ 42

41

Im Nenner der Funktion $f(x)$ des Lehrschritts 44 steht eine ganze rationale Funktion 4. Grades. Sie ist bereits in quadratische Ausdrücke zerlegt und läßt sich im Bereich der reellen Zahlen nicht weiter zerlegen.

Für $(x^2 + 4)$ ist $p = 0$ und $q = 4$, also $p^2 - 4q = -16 < 0$. In $(x^2 - 2x + 3)$ ist $p = -2$ und $q = 3$, also $p^2 - 4q = -8 < 0$. Da der Ausdruck $(p^2 - 4q)$ in beiden Fällen negativ ist, liegen zwei verschiedene Paare konjugiert komplexer Wurzeln vor. Für jedes Paar muß ein Bruch angesetzt werden.

! Wiederholen Sie Lehrschritt 44 noch einmal.

——▶ 44

42

Ihr Ansatz für die 6. Aufgabe (LS 28) ist nicht richtig.

Die Lösung ergibt sich wie folgt: Aus der Nennerfunktion können unmittelbar die Nullstellen und deren Vielfachheiten abgelesen werden. Der Nullstelle $x_1 = 2$ mit der Vielfachheit 3 entspricht der Ansatz $\frac{A_{11}}{x-2} + \frac{A_{12}}{(x-2)^2} + \frac{A_{13}}{(x-2)^3}$ und der Nullstelle $x_2 = -5$ mit der Vielfachheit 2 der Ansatz $\frac{A_{21}}{x+5} + \frac{A_{22}}{(x+5)^2}$. Um die gebrochene rationale Funktion insgesamt zu erfassen, werden die beiden Teilansätze addiert.

! Sehen Sie sich den Ansatz für mehrfache reelle Nullstellen in LS 27 noch einmal an.

—— 27 ——▶ 33

43

Antwort:

a) und d) sind Partialbrüche, b) und c) nicht.

Hatten Sie Schwierigkeiten bei der Beantwortung der Frage in Lehrschritt 35?

Ja ——▶ 38

Nein ——▶ 44

44

Wir fassen zusammen:

Für konjugiert komplexe Nullstellen der Nennerfunktion $h(x)$ mit der Vielfachheit 1 schreiben wir in der Faktorenzerlegung quadratische Ausdrücke der Form $(x^2 + p_r x + q_r)$ für $r = 1, \ldots, l$ $(2l = m)$. Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung lautet dann:

Ansatz:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{B_1 x + C_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + \cdots + \frac{B_l x + C_l}{x^2 + p_l x + q_l}$$

mit $p_r^2 - 4q_r < 0$

7. Aufgabe:

Schreiben Sie den Ansatz der Partialbruchzerlegung für die Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x^2+4)(x^2-2x+3)}$ auf.

——▶ 37

45 Ihr Ansatz ist fehlerhaft.

! Prüfen Sie der Reihe nach, welche(r) Fehler Ihnen unterlaufen sind (ist), und korrigieren Sie den Ansatz.

Der Partialbruch, der der einfachen Nullstelle $x = -3$ entspricht, ist nicht richtig angesetzt worden.

—— 21 ⮌

Der Ansatz für die doppelte reelle Nullstelle $x = 5$ weicht von der angegebenen Form ab.

—— 27 ⮌

Der letzte Partialbruch $\dfrac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 - 5x + 7}$ ist anders angesetzt worden.

—— 44 ——► 46

---

46 **!** Vergleichen Sie, ob Ihr Ansatz lautet:

$$f(x) = \frac{A_{11}}{x+3} + \frac{A_{21}}{x-5} + \frac{A_{22}}{(x-5)^2} + \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 - 5x + 7}.$$

Nein. Dann analysieren Sie Ihre Abweichungen! ——► 50

Ja ——► 49

---

47 **Antwort:**

Der Ansatz muß *genau m* Konstanten enthalten. Eine weitere Kontrollmöglichkeit erhält man auch mit Hilfe einer Beziehung zwischen m, α_i und β_r.

...

Aufgabe:

Stellen Sie unter Verwendung des Satzes aus Lehrschritt 24 eine Gleichung auf, die die Größen m, α_i und β_r verbindet!

—— 24 ——► 60

48

Sie haben den richtigen Ansatz für die 7. Aufgabe (LS 44) gefunden.

Zusammenfassend geben wir jetzt den allgemeinen Ansatz für die Zerlegung einer echt gebrochenen rationalen Funktion

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0}$$

in Partialbrüche an. Dabei gehen wir von der Zerlegung der Nennerfunktion $h(x)$ aus:

$$f(x) = \frac{g(x)}{(x - x_1)^{\alpha_1} \cdots (x - x_k)^{\alpha_k} (x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1} \cdots (x^2 + p_l x + q_l)^{\beta_l}}$$

Frage:

Was bedeuten die Größen x_i, α_i und β_r in der Nennerfunktion $h(x)$?

→ 51

49

Dann ist Ihr Ansatz richtig.

Im bisher dargebotenen Teil haben Sie die Ansätze für die Partialbruchzerlegung echt gebrochener rationaler Funktionen kennengelernt.

Bevor wir Methoden zur Bestimmung der Konstanten behandeln, können Sie eine wohlverdiente Pause einlegen!

Danach → 53

50

Unterscheidet sich Ihr Ansatz lediglich durch andere Bezeichnungen der Konstanten?

Ja → 49

Nein → 45

51 Antwort:

x_i sind die reellen Nullstellen, α_i ihre Vielfachheiten und β_r die Vielfachheiten der Paare konjugiert komplexer Nullstellen, d.h. die Exponenten der quadratischen Ausdrücke $x^2 + p_r x + q_r$.

Wenn wir die speziellen Ansätze aus den vorangegangenen Lehrschritten kombinieren und den Fall mehrfacher komplexer Nullstellen der Nennerfunktion hinzunehmen, so erhalten wir den *allgemeinen Ansatz* für die Partialbruchzerlegung.

Allgemeiner Ansatz:

$$
\begin{aligned}
f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \; & \frac{A_{11}}{x-x_1} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x-x_1)^{\alpha_1}} \\
& \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\
& + \frac{A_{k1}}{x-x_k} + \frac{A_{k2}}{(x-x_k)^2} + \cdots + \frac{A_{k\alpha_k}}{(x-x_k)^{\alpha_k}} \\
& + \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \cdots + \frac{B_{1\beta_1}x + C_{1\beta_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}} \\
& \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\
& + \frac{B_{l1}x + C_{l1}}{x^2+p_lx+q_l} + \frac{B_{l2}x + C_{l2}}{(x^2+p_lx+q_l)^2} + \cdots + \frac{B_{l\beta_l}x + C_{l\beta_l}}{(x^2+p_lx+q_l)^{\beta_l}}
\end{aligned}
$$

→ 52

52 Wenn Sie den Ansatz in Lehrschritt 51 gründlich angesehen haben, können Sie sicherlich die folgende Frage leicht beantworten, die Sie künftig als Kontrolle bei der Partialbruchzerlegung verwenden können.

Frage:

Wieviel Konstanten A_{ij}, B_{rs}, C_{rs} muß der Ansatz für die Partialbruchzerlegung enthalten, wenn die Nennerfunktion $h(x)$ der echt gebrochenen rationalen Funktion $f(x)$ den Grad m hat?

! Überlegen Sie genau, bevor Sie weitergehen.

→ 47

53

Nachdem Sie die Ansätze für die Zerlegung in Partialbrüche kennengelernt haben, müssen wir noch die Werte der Konstanten bestimmen. Darum beschäftigen wir uns nun mit drei Methoden zur Bestimmung der Konstanten bei der Zerlegung echt gebrochener rationaler Funktionen der Form $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ in Partialbrüche, mit der

- **Methode der unbestimmten Koeffizienten** (Koeffizientenvergleich)
- **Einsetzungsmethode,**
- **Grenzwertmethode.**

Bei allen Methoden gehen wir vom allgemeinen Ansatz aus.

! Sehen Sie sich diesen zunächst noch einmal in Lehrschritt 51 an!

→ 51 ↩

Frage:

Durch welche äquivalente Umformung können wir von diesem Ansatz zu einer Gleichung mit ganzen rationalen Termen kommen?

→ 58

54

Nach Multiplikation des Ansatzes (LS 62) mit der Nennerfunktion erhalten Sie

$$2x - 5 = A(x + 2) + B(x - 1).$$

Sie multiplizieren den Term auf der rechten Seite aus, ordnen nach Potenzen von x:

$$2x - 5 = (A + B)\,x + (2A - B)$$

und führen den Koeffizientenvergleich durch:

$$x^1: \quad 2 = A + B$$

$$x^0: \; -5 = 2A - B.$$

Die Konstanten ergeben sich zu: $A = -1,\; B = 3.$

→ 55

55 Die Lösung der 9. Aufgabe (LS 62) lautet:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{2x-5}{(x-1)(x+2)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{3}{x+2}.$$

Die zweite Methode, die wir kennenlernen wollen, ist die

Einsetzungsmethode.

Auch hier multiplizieren wir den Ansatz mit der Nennerfunktion $h(x)$. Zur Bestimmung der Konstanten müssen dann spezielle Werte für x eingesetzt werden.

Frage:

Können Sie jeden beliebigen reellen oder nicht-reellen Wert in die entstandene Gleichung einsetzen?

→ 61

---

56 Am Ende dieses Teils, der sich mit den Ansätzen sowie drei Methoden zur Bestimmung der Konstanten befaßt, sollen Sie sich eine Zusammenfassung erarbeiten.

Aufgabe:

Geben Sie in einem Schema die wesentlichen Schritte an, die zur Zerlegung einer echt gebrochenen rationalen Funktion $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ in Partialbrüche erforderlich sind!

→ 69

---

57 Nach Multiplikation des Ansatzes mit der Nennerfunktion $h(x)$ führten Sie den Koeffizientenvergleich durch.

Die Konstanten lauten: $A = -1,\quad B = 3.$

Wollen Sie sich die Einzelschritte des Lösungsverlaufs noch einmal ansehen?

Ja → 54

Nein → 55

Antwort (sinngemäß): 58

Durch Multiplikation des Ansatzes mit der Nennerfunktion $h(x)$ erhalten wir die gesuchte Gleichung mit ganzen rationalen Termen. Diese enthält die Unbekannten A_{ij}, B_{rs}, C_{rs}.

Wir wollen uns diesen Sachverhalt an einem Beispiel verdeutlichen. Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung der Funktion $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{2x-7}{x^3 - x^2 + x - 1}$ lautet:

$$f(x) = \frac{2x-7}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A_{11}}{x-1} + \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2+1}.$$

Aufgabe:

Überprüfen Sie die Richtigkeit dieses Ansatzes, und formen Sie den Ansatz in eine Gleichung mit ganzen rationalen Termen um!

→ 64

59

Wir wollen Ihnen die Lösungsschritte ausführlich erläutern: Nach Multiplikation mit der Nennerfunktion $h(x)$ erhalten wir

$$2x - 5 = A(x+2) + B(x-1) \qquad (x \neq 1, \quad x \neq -2).$$

Einsetzen zweier beliebiger Werte, die nicht Nullstellen der Nennerfunktion $h(x)$ sind, z. B. $x = 0$ und $x = -1$:

$x = 0$: $\quad -5 = 2A - B$

$x = -1$: $\quad -7 = A - 2B.$

Daraus ergibt sich: $A = -1, \quad B = 3.$

Dann lautet die Lösung der 9. Aufgabe:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{2x-5}{(x-1)(x+2)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{3}{x+2}.$$

→ 66

Lösung: 60

Die gesuchte Relation heißt $m = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i + 2\sum_{r=1}^{l} \beta_r$.

Wenden wir uns nun einer weiteren Aufgabe zu.

8. Aufgabe:

Schreiben Sie den Ansatz der Partialbruchzerlegung für die Funktion $f(x) = \frac{3x^2 - 4}{(x+3)(x-5)^2(x^2-5x+7)}$ auf!

→ 46

61

Antwort (sinngemäß):

In die Gleichung können alle Werte eingesetzt werden, die *nicht* Nullstellen der Nennerfunktion $h(x)$ sind.

Aufgabe:

Berechnen Sie die Werte der Konstanten A und B der 9. Aufgabe (LS 62) nach der Einsetzungsmethode!

! Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem in LS 57, und kehren Sie danach hierher zurück. ——— 57 ⟶ ⟵

Haben Sie das richtige Ergebnis erhalten?

Ja ⟶ 66
Nein ⟶ 59

62

Diese Methode sollen Sie jetzt auf eine vorgegebene Zerlegung anwenden. Zuvor noch ein Hinweis:

In der Theorie der Partialbruchzerlegung verwendet man zur Kennzeichnung der Konstanten die Symbole A_{ij}, B_{rs} und C_{rs}. Können keine Verwechslungen auftreten, zieht man bei Aufgaben eine vereinfachte Schreibweise $A, B, C, D, \ldots$ vor. Nun zur

9. Aufgabe:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{2x-5}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \quad (x \neq 1,\ x \neq -2).$$

Berechnen Sie die Werte der Konstanten A und B mit Hilfe der Methode der unbestimmten Koeffizienten, und geben Sie die Partialbruchzerlegung der Funktion $f(x)$ an!

Anschließend ⟶ 57

63

In Zukunft schreiben wir kürzer

$$2x - 5 = A(x+2) + B(x-1)$$

$$x \to 1: \quad -3 = A \cdot 3 \iff A = -1$$

$$x \to -2: \quad -9 = B \cdot (-3) \iff B = 3.$$

Hinweis: Diese Methode erweist sich als vorteilhaft, wenn die Nennerfunktion nur einfache reelle Nullstellen besitzt. Treten mehrfache Nullstellen auf, werden meist die Grenzwertmethode und die Einsetzungsmethode kombiniert angewendet.

⟶ 56

Lösung: 64

Durch Multiplikation des Ansatzes mit der Nennerfunktion $h(x)$ ergibt sich:

$$\frac{2x-7}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A_{11}}{x-1} + \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2+1} \Bigg| \cdot (x-1)(x^2+1)$$

$$2x - 7 = A_{11}(x^2+1) + (B_{11}x + C_{11})(x-1).$$

Wir behandeln nun die drei in LS 53 genannten Methoden zur Ermittlung der Konstanten und wenden uns zuerst der Methode der unbestimmten Koeffizienten zu.

→ 65

Bei der Anwendung der Methode der unbestimmten Koeffizienten sind folgende Schritte zu gehen: 65

- Ausmultiplizieren;
- Ordnen nach Potenzen von x;
- Durchführen des Koeffizientenvergleichs.

Die unbekannten Konstanten lassen sich aus dem so entstandenen Gleichungssystem ermitteln.

! Prägen Sie sich diese Schritte ein!

→ 62

Berücksichtigen wir bei der Bestimmung der Konstanten die Nullstellen der Nennerfunktion, kommen wir zur dritten Methode, der Grenzwertmethode. Wir gehen wieder von der Gleichung aus 66

$$f(x) = \frac{2x-5}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \quad (x \neq 1,\ x \neq -2).$$

Durch Multiplikation mit der Nennerfunktion folgt für $x \neq 1$ und $x \neq -2$:

$$2x - 5 = A(x+2) + B(x-1).$$

Wir bestimmen die Grenzwerte für $x \to 1$ und $x \to -2$:

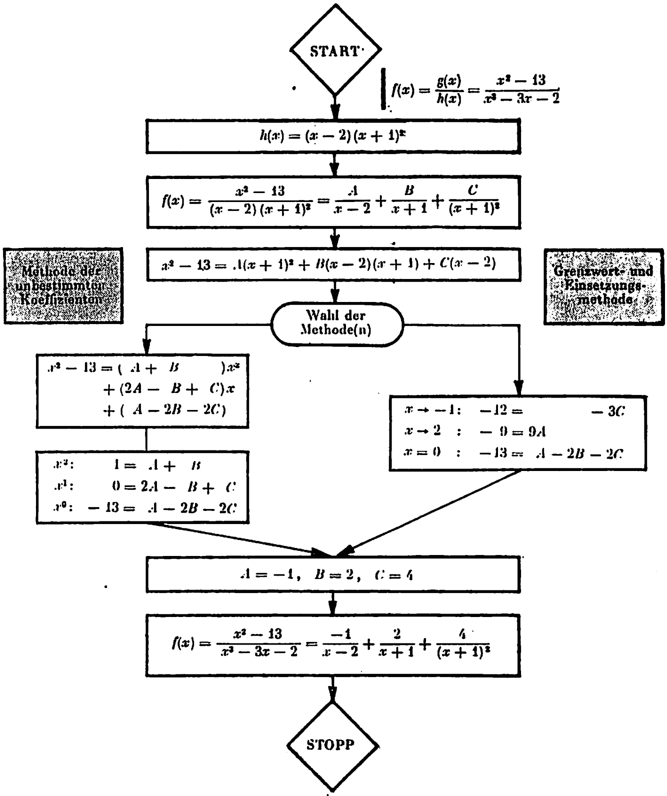
$$\lim_{x \to 1}(2x-5) = \lim_{x \to 1}[A(x+2) + B(x-1)] \Leftrightarrow -3 = A \cdot 3 + B \cdot 0,$$

$$\lim_{x \to -2}(2x-5) = \lim_{x \to -2}[A(x+2) + B(x-1)] \Leftrightarrow -9 = A \cdot 0 + B \cdot (-3).$$

Es ergibt sich $A = -1$, $B = 3$.

→ 63

67 **!** Vergleichen Sie die Zusammenfassung mit dem allgemeinen Schema in Lehrschritt 69!



→ 73

---

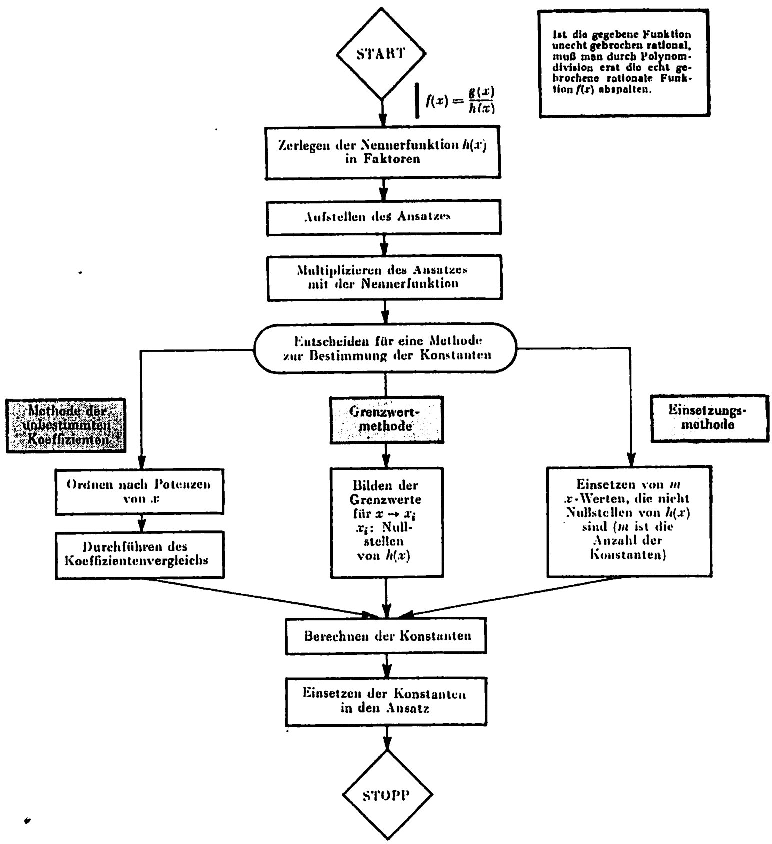
68 Die Zerlegung der Funktion $f(x)$ in Partialbrüche ist sofort möglich, da $f(x)$ eine echt gebrochene rationale Funktion ist.

Womit beginnen Sie die Zerlegung?

! Überlegen Sie genau, und führen Sie den zweiten Schritt aus.

→ 71

Hier zeigen wir Ihnen ein mögliches Schema:



Wenn es Ihnen gelungen ist, dieses oder ein ähnliches Schema zu entwerfen, haben Sie aufmerksam gearbeitet.

Fehlen jedoch mehrere Einzelschritte, sollten Sie Ihre Lücken durch nochmaliges Bearbeiten der entsprechenden Lehrschritte beseitigen.

Im nächsten Abschnitt wollen wir das Gelernte in Übungsaufgaben anwenden.

Gönnen Sie sich aber vorher erst eine kurze Pause.

Dann ——→ 70

70 Um die Kenntnisse in der Theorie zu festigen und um Fertigkeiten in der Durchführung der Partialbruchzerlegung zu erlangen, wollen wir einige **Beispiele zur Partialbruchzerlegung** betrachten.

10. Aufgabe:

Zerlegen Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{x^2 - 13}{x^3 - 3x - 2}$$

in Partialbrüche, und wenden Sie dabei zur Bestimmung der Konstanten die Methode der unbestimmten Koeffizienten bzw. die Grenzwert- und die Einsetzungsmethode an.

Prüfen Sie zuerst, ob die Zerlegung in Partialbrüche sofort möglich ist! Begründen Sie das Ergebnis der Überprüfung!

Danach ⟶ 68

---

71 Im zweiten Schritt wird die Nennerfunktion in Faktoren zerlegt. Die Nullstellen der Nennerfunktion $h(x)$ lauten:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = -1.$$

Damit hat die Faktorenzerlegung von $h(x)$ die Form:

$$h(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = (x - 2)(x + 1)^2.$$

Schreiben Sie nun den Ansatz für die Partialbruchzerlegung der Funktion $f(x)$ auf!

Danach ⟶ 78

---

72 Nach Potenzen von x geordnet erhalten Sie

$$x^2 - 13 = (A + B)\,x^2 + (2A - B + C)\,x + (A - 2B - 2C).$$

Damit ergibt der Koeffizientenvergleich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x^2&: & 1 &= A + B \\ x^1&: & 0 &= 2A - B + C \\ x^0&: & -13 &= A - 2B - 2C. \end{aligned}$$

Lösen Sie dieses Gleichungssystem!

⟶ 80

73

Sie haben die 10. Aufgabe erfolgreich gelöst. Eine weitere soll folgen. Zuvor eine

Frage:

Ist die Zerlegung von

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{2x^5 - 3x^4 + 31x^3 + 17x^2 + 38x - 34}{x^4 - 2x^3 + 17x^2}$$

in Partialbrüche möglich?

Ja ⟶ 88

Nein ⟶ 87

74

Die Gleichungssysteme lauten

für a) z. B. mit den Werten $x = 0$, $x = 1$, $x = 4$:

$$\begin{aligned}
x = 0: &\quad -13 = A - 2B - 2C,\\
x = 1: &\quad -12 = 4A - 2B - C,\\
x = 4: &\quad 3 = 25A + 10B + 2C.
\end{aligned}$$

Falls Sie für die beliebigen x-Werte andere (voneinander verschiedene) Zahlen einsetzen, hat Ihr Gleichungssystem ein ähnliches Aussehen.

für b) $x \to -1$, $x \to 2$, z.B. $x = 0$:

$$\begin{aligned}
x \to -1: &\quad -12 = -3C,\\
x \to 2: &\quad -9 = 9A,\\
x = 0: &\quad -13 = A - 2B - 2C.
\end{aligned}$$

Sicher fällt es Ihnen leicht zu erkennen, daß das zweite Gleichungssystem zur Bestimmung der Konstanten wesentlich einfacher ist.

Diese Erkenntnis zeigt Ihnen den Vorteil der Grenzwertmethode.

! Bestimmen Sie die Konstanten A, B, C.

⟶ 80

75 Sie erhalten:

$$x^2 - 13 = A(x+1)^2 + B(x-2)(x+1) + C(x-2)$$

$$(x \neq 2, x \neq -1).$$

Jetzt sind Sie an der Stelle angelangt, an der Sie sich für eine Methode zur Bestimmung der Konstanten entscheiden müssen.

Mit welcher Methode wollen Sie beginnen?

Methode der unbestimmten Koeffizienten ——————▶ 77

Grenzwert- und Einsetzungsmethode ——————▶ 79

---

76 Die Partialbruchzerlegung lautet:

$$f(x) = \frac{x^2-13}{x^3-3x-2} = \frac{x^2-13}{(x-2)(x+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{x-2} + \frac{2}{x+1} + \frac{4}{(x+1)^2}.$$

Haben Sie die Konstanten der 10. Aufgabe (LS 70) bereits mit Hilfe aller behandelten Methoden bestimmt?

Ja. Sehen Sie sich eine Zusammenfassung für diese Aufgabe an! ——————▶ 67

Nein. Rechneten Sie eben mit der Methode der unbestimmten Koeffizienten?

Ja ——————▶ 79

Nein ——————▶ 77

---

77 Sie werden nun die im Ansatz (LS 78) auftretenden Konstanten mit der Methode der unbestimmten Koeffizienten bestimmen.

! Entscheiden Sie!

Ich weiß, was ich zu tun habe.
Führen Sie die beabsichtigten Rechnungen aus! ——————▶ 72

Ich weiß nicht, was ich jetzt tun muß.
Führen Sie die in LS 65 angegebenen Teilschritte aus. Vergleichen Sie anschließend in LS 72!

—————— 65 ——————▶ 72

78

Unter Verwendung der vereinfachten Symbolik lautet der Ansatz:

$$f(x) = \frac{x^2 - 13}{x^3 - 3x - 2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \quad (x \neq 2,\ x \neq -1).$$

Haben Sie diesen Ansatz gefunden?

Ja ——→ 85

Nein ——→ 86

79

Sie werden nun die im Ansatz (LS 78) auftretenden Konstanten mit der Grenzwert- und der Einsetzungsmethode bestimmen. Um den Vorteil der Grenzwertmethode zu erkennen, sollen Sie zwei Gleichungssysteme aufstellen.

Aufgabe:

a) Setzen Sie drei beliebige Werte, die *nicht* Nullstellen von $h(x)$ sind, in die Gleichung (LS 75) ein!

b) Führen Sie in der Gleichung (LS 75) den Grenzübergang für $x \to 2$ und $x \to -1$ durch! Setzen Sie dann einen weiteren beliebigen Wert für x ein!

——→ 74

80

Die Konstanten im Ansatz (LS 78) haben folgende Werte:

$$A = -1, \quad B = 2, \quad C = 4.$$

Setzen Sie als letzten Schritt die Werte für die Konstanten in den Ansatz für die Partialbruchzerlegung der Funktion $f(x)$ ein, und schreiben Sie die Lösung der 10. Aufgabe (LS 70) auf!

Dann ——→ 76

81

In Ihrem Ansatz fehlt der Partialbruch mit dem Nenner x^2 bzw. x. Sie haben den Ansatz für mehrfache reelle Nullstellen nicht vollständig angegeben.

! Ergänzen Sie den fehlenden Summanden, und vergleichen Sie mit

→ 92

82

Wir können Ihnen ein Lob aussprechen. Ihr Ansatz ist richtig.

Wir hoffen, daß Sie die im Ansatz auftretenden Konstanten selbständig berechnen können.

! Denken Sie daran, daß Sie dabei die Methode der unbestimmten Koeffizienten anwenden sollen!

Brauchen Sie Hilfen?

Ja —— 92 ——→ 89
Nein ——→ 89

83

In Ihrem Ansatz ist der Partialbruch, der den quadratischen Ausdruck im Nenner enthält, falsch.

Merken Sie sich: Steht im Nenner ein quadratischer Ausdruck, so muß im Zähler ein linearer Ausdruck erscheinen.

! Verbessern Sie, und vergleichen Sie mit

→ 92

84

Die Nennerfunktion wird in $h(x) = x^2(x^2 - 2x + 17)$ zerlegt. Der zweite Faktor besitzt keine reellen Nullstellen, da gilt: $p^2 - 4q = 4 - 68 < 0$. Eine weitere Zerlegung von $(x^2 - 2x + 17)$ ist deshalb nicht sinnvoll.

! Schreiben Sie den Ansatz für die Partialbruchzerlegung von $f_1(x) = \dfrac{-x^3 + 38x - 34}{x^2(x^2 - 2x + 17)}$ auf!

→ 93

85

Ihr Ansatz ist richtig.

Multiplizieren Sie jetzt den Ansatz (LS 78) mit der Nennerfunktion $h(x) = (x - 2)(x + 1)^2$!

→ 75

86

Ihnen ist ein Fehler unterlaufen.

Wiederholen Sie den Ansatz für einfache reelle Nullstellen (LS 21) und für mehrfache reelle Nullstellen (LS 27)!

— 21 und 27 ↩

! Verwenden Sie das dort Gesagte, und formulieren Sie den Ansatz neu!

Erst dann → 78

87

Sie haben richtig erkannt, daß $f(x)$ eine unecht gebrochene rationale Funktion ist. Die Partialbruchzerlegung kann aber nur auf echt gebrochene rationale Funktionen angewendet werden.

! Zerlegen Sie $f(x)$ in einen ganzen rationalen und einen echt gebrochenen rationalen Teil.

→ 94

88

Das ist falsch!

Sie haben übersehen, daß $f(x)$ unecht gebrochen rational ist. Die Partialbruchzerlegung ist aber nur für echt gebrochene rationale Funktionen durchführbar.

Sie müssen zunächst $f(x)$ in einen ganzen rationalen und einen echt gebrochenen rationalen Teil zerlegen.

! Führen Sie das aus, anschließend

→ 94

89 Die Konstanten haben folgende Werte:

$$A = 2, \quad B = -2, \quad C = -3, \quad D = 6.$$

! Sollten Sie ein anderes Ergebnis gefunden haben, so prüfen Sie Ihren Lösungsweg noch einmal gründlich.

Jetzt ist es möglich, die in Partialbrüche zerlegte Funktion $f_1(x)$ aufzuschreiben. Setzen Sie dazu die Werte für die Konstanten in den Ansatz (LS 92) ein, und notieren Sie das Ergebnis.

Dann ⟶ 90

90

$$f_1(x) = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{-3x+6}{x^2-2x+17}$$

Das ist das Ergebnis der 11. Aufgabe (LS 94). Um die vollständige Zerlegung von $f(x)$ zu erhalten, müssen wir noch die Summe aus $f_1(x)$ und dem in LS 94 vor der Partialbruchzerlegung abgespalteten ganzen rationalen Teil bilden. Damit ergibt sich als vollständige Zerlegung:

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{-3x+6}{x^2-2x+17}.$$

⟶ 91

---

91 Zum Abschluß sollen Sie eine Aufgabe zusammenhängend lösen!

! Versuchen Sie, selbständig zu rechnen. Sollten Sie große Schwierigkeiten haben, informieren Sie sich in der Übersicht des Lehrschritts 69.

12. Aufgabe:

Zerlegen Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{-4x^2+20x+22}{6x^3-24x^2+18x-72} \text{ in Partialbrüche.}$$

! Gehen Sie erst dann weiter, wenn Sie die Aufgabe vollständig gelöst haben!

⟶ 95

Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung des echt gebrochenen rationalen Teils $f_1(x)$ heißt **92**

$$f_1(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 - 2x + 17} \quad (x \neq 0,\ x^2 - 2x + 17 \neq 0).$$

Die nächsten Schritte (Multiplikation mit der Nennerfunktion und Koeffizientenvergleich) sollen Sie selbständig durchführen.

Anschließend ——→ 96

Ihr Ansatz lautet: **93**

$$f_1(x) = \frac{A}{x} + \frac{Cx + D}{x^2 - 2x + 17}$$ ——→ 81

$$f_1(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^2 - 2x + 17}$$ ——→ 83

$$f_1(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 - 2x + 17}$$ ——→ 82

$$f_1(x) = \frac{A}{x^2} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 17}$$ ——→ 81

Ich habe einen anderen Ansatz. ——→ 97

Die Zerlegung lautet: **94**

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{-x^3 + 38x - 34}{x^4 - 2x^3 + 17x^2}.$$

11. Aufgabe:

Zerlegen Sie den echt gebrochenen rationalen Teil

$$f_1(x) = \frac{-x^3 + 38x - 34}{x^4 - 2x^3 + 17x^2} \text{ der Funktion } f(x)$$

in Partialbrüche. Bestimmen Sie die Konstanten mit Hilfe der Methode der unbestimmten Koeffizienten.

! Führen Sie den ersten Schritt aus, und vergleichen Sie danach mit LS 84.

——→ 84

95 **!** Vergleichen Sie mit Ihrer Rechnung!

$$f(x) = \frac{-4x^2 + 20x + 22}{6x^3 - 24x^2 + 18x - 72}$$

$$f(x) = \frac{-\frac{2}{3}x^2 + \frac{10}{3}x + \frac{11}{3}}{x^3 - 4x^2 + 3x - 12} = \frac{-\frac{2}{3}x^2 + \frac{10}{3}x + \frac{11}{3}}{(x-4)(x^2+3)}$$

$$f(x) = \frac{-\frac{2}{3}x^2 + \frac{10}{3}x + \frac{11}{3}}{(x-4)(x^2+3)} = \frac{A}{x-4} + \frac{Bx + C}{x^2+3}$$

$$-\frac{2}{3}x^2 + \frac{10}{3}x + \frac{11}{3} = A(x^2+3) + (Bx + C)(x-4)$$

Wahl der Methode(n)

Methode der unbestimmten Koeffizienten

$$\begin{aligned} x^2&: & -\frac{2}{3} &= A + B \\ x^1&: & \frac{10}{3} &= -4B + C \\ x^0&: & \frac{11}{3} &= 3A - 4C \end{aligned}$$

Grenzwert- und Einsetzungsmethode

$$\begin{aligned} x \to 4&: & \frac{19}{3} &= 19A \\ x = 0&: & \frac{11}{3} &= 3A - 4C \\ x = 1&: & \frac{19}{3} &= 4A - 3B - 3C \end{aligned}$$

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = -1, \quad C = -\frac{2}{3}$$

$$f(x) = \frac{\frac{1}{3}}{x-4} + \frac{-x - \frac{2}{3}}{x^2+3}$$

Damit sind Sie am Ende des Programms angelangt.

Die Autoren hoffen, daß das Lehrprogramm zur Erweiterung Ihrer Kenntnisse beigetragen und Ihnen Fertigkeiten zur Partialbruchzerlegung vermittelt hat.

Im Anschluß finden Sie eine Zusammenfassung (S. 42–44) sowie einige weitere Übungsaufgaben mit den Lösungen (S. 45–46).

96

Zum Vergleich die einzelnen Schritte:

Multiplikation mit der Nennerfunktion:

$$-x^3 + 38x - 34 = Ax(x^2 - 2x + 17) + B(x^2 - 2x + 17) + (Cx + D)x^2$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{array}{lrl} x^3: & -1 = & A \qquad\quad + C \\ x^2: & 0 = & -2A + \quad B \qquad + D \\ x^1: & 38 = & 17A - \quad 2B \\ x^0: & -34 = & \qquad\quad 17B \end{array}$$

! Lösen Sie dieses Gleichungssystem, dann ⟶ 89

97

Der Ansatz für die reelle Nullstelle $x_1 = 0$ mit $\alpha_1 = 2$ lautet nach LS 27

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2}.$$

Da $(x^2 - 2x + 17)$ keine reellen Nullstellen besitzt, ergibt sich nach LS 44 als Ansatz

$$\frac{Cx + D}{x^2 - 2x + 17}.$$

Der vollständige Ansatz ist dann die Summe der drei Partialbrüche.

Reicht Ihnen diese Erklärung noch nicht aus, müssen Sie sich den allgemeinen Ansatz (LS 51) nochmals durchdenken.

—— 51 ⟶ 84

Sonst ⟶ 92

Zusammenfassung

1.1. Definition:

Ein Partialbruch ist eine Funktion der Form $f(x) = \frac{A}{(x - x_i)^\alpha}$, wobei A und x_i komplexe Zahlen sind und $\alpha \geqq 1$ eine natürliche Zahl ist.

1.2. Erweiterung der Definition:

Unter Partialbruch verstehen wir auch Funktionen der Form $f(x) = \frac{Bx + C}{(x^2 + p_r x + q_r)^\beta}$ mit $p_r^2 - 4q_r < 0$. Dabei sind B, C, p_r, q_r reelle Zahlen, und $\beta \geqq 1$ ist eine natürliche Zahl.

2. Folgerung aus dem Fundamentalsatz der Algebra:

Jede ganze rationale Funktion vom Grad m der Gestalt

$$h(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

mit reellen Koeffizienten b_i $(i = 0, 1, \ldots, m - 1)$ kann auf genau eine Weise als Produkt $h(x) = (x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2} \cdots (x - x_k)^{\alpha_k}$ geschrieben werden, wobei die x_i sämtlich verschieden sind, α_i natürliche Zahlen $\geqq 1$ sind und $\sum\limits_{1=i}^{k} \alpha_i = m$ gilt.

3. Satz der Partialbruchzerlegung:

Jede echt gebrochene rationale Funktion kann (bis auf die Reihenfolge) auf genau eine Weise als Summe von Partialbrüchen geschrieben werden.

4. Drei Fälle der Partialbruchzerlegung:

1. Fall: $h(x)$ besitzt einfache reelle Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Ansatz:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \cdots + \frac{A_m}{x - x_m}$$

2. Fall: $h(x)$ besitzt mehrfache reelle Nullstellen x_r $(r = 1, \ldots, k)$ der Vielfachheiten $\alpha_r > 1$.

Ansatz:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \begin{array}{l} \dfrac{A_{11}}{x - x_1} + \dfrac{A_{12}}{(x - x_1)^2} + \cdots + \dfrac{A_{1\alpha_1}}{(x - x_1)^{\alpha_1}} \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ + \dfrac{A_{k1}}{x - x_k} + \dfrac{A_{k2}}{(x - x_k)^2} + \cdots + \dfrac{A_{k\alpha_k}}{(x - x_k)^{\alpha_k}} \end{array}$$

3. Fall: $h(x)$ besitzt Paare konjugiert komplexer Nullstellen mit der Vielfachheit 1

$(x - x_r)(x - \overline{x}_r) = x^2 + p_r x + q_r$ mit $p_r^2 - 4q_r < 0$ für $r = 1, \ldots, l$.

Ansatz:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{B_1 x + C_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + \cdots + \frac{B_l x + C_l}{x^2 + p_l x + q_l}$$

mit $p_r^2 - 4q_r < 0$.

5. Bemerkung:

Der Fall, daß $h(x)$ mehrfache komplexe Nullstellen enthält, wird nicht besonders ausgeführt. Den Ansatz für diesen Fall kann man dem allgemeinen Ansatz entnehmen.

6. Allgemeiner Ansatz für die Partialbruchzerlegung:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \begin{array}{l} \dfrac{A_{11}}{x - x_1} + \dfrac{A_{12}}{(x - x_1)^2} + \cdots + \dfrac{A_{1\alpha_1}}{(x - x_1)^{\alpha_1}} \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ + \dfrac{A_{k1}}{x - x_k} + \dfrac{A_{k2}}{(x - x_k)^2} + \cdots + \dfrac{A_{k\alpha_k}}{(x - x_k)^{\alpha_k}} \\ + \dfrac{B_{11} x + C_{11}}{x^2 + p_1 x + q_1} + \dfrac{B_{12} x + C_{12}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^2} + \cdots + \dfrac{B_{1\beta_1} x + C_{1\beta_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1}} \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ + \dfrac{B_{l1} x + C_{l1}}{x^2 + p_l x + q_l} + \dfrac{B_{l2} x + C_{l2}}{(x^2 + p_l x + q_l)^2} + \cdots + \dfrac{B_{l\beta_l} x + C_{l\beta_l}}{(x^2 + p_l x + q_l)^{\beta_l}} \end{array}$$

7. Methode der unbestimmten Koeffizienten:

- Multiplizieren des Ansatzes mit der Nennerfunktion $h(x)$
- Ausmultiplizieren
- Ordnen nach Potenzen von x
- Durchführen des Koeffizientenvergleichs
- Berechnen der Konstanten aus dem Gleichungssystem

8. Einsetzungsmethode:

- Multiplizieren des Ansatzes mit der Nennerfunktion $h(x)$
- Einsetzen von m voneinander verschiedenen x-Werten, die nicht Nullstellen von $h(x)$ sind (m ist der Grad der Nennerfunktion $h(x)$)
- Berechnen der Konstanten aus dem Gleichungssystem

9. Grenzwertmethode:

- Multiplizieren des Ansatzes mit der Nennerfunktion $h(x)$
- Durchführen des Grenzübergangs an den Nullstellen von $h(x)$
- Berechnen der Konstanten

Zur weiteren Festigung empfehlen wir Ihnen die Lösung der folgenden

Übungsaufgaben

Geben Sie für die nachstehenden Funktionen (gegebenenfalls nach Ausführung der Polynomdivision) die Partialbruchzerlegung an!

1) $f(x) = \dfrac{\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2 - 2x - 3}$

2) $f(x) = \dfrac{-8x^2 + 2}{x^3 + x^2 - 2x}$

3) $f(x) = \dfrac{2x^3 + 9x^2 + 8x + 5}{x^2 + 4x + 3}$

4) $f(x) = \dfrac{2x^3 + 15x^2 + 36x + 20}{x^4 + 4x^3 + 4x^2}$

5) $f(x) = \dfrac{-2x^3 + 5x^2 - 2}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x}$

6) $f(x) = \dfrac{2x^4 - 8x^3 + x^2 + 23x - 6}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$

7) $f(x) = \dfrac{6x^2 + 2x + 20}{x^3 + 4x}$

8) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 12x - 29}{x^3 - 2x^2 + x - 12}$

9) $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x}{(x-1)^2\,(x^2+1)}$

10) $f(x) = \dfrac{6x^4 + x^3 + 43x^2 + 102x + 60}{2x^4 + 2x^3 + 8x^2 + 60x}$

Lösungen der Übungsaufgaben:

1) $f(x) = \frac{2}{x-3} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1}$

2) $f(x) = -\frac{1}{x} - \frac{2}{x-1} - \frac{5}{x+2}$

3) $f(x) = 2x + 1 - \frac{4}{x+3} + \frac{2}{x+1}$

4) $f(x) = \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{2}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2}$

5) $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{4}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3}$

6) $f(x) = 2x - 4 + \frac{3}{x+2} - \frac{2}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2}$

7) $f(x) = \frac{x+2}{x^2+4} + \frac{5}{x}$

8) $f(x) = 1 + \frac{1}{x-3} - \frac{x-7}{x^2+x+4}$

9) $f(x) = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} - \frac{\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}}{x^2+1}$

10) $f(x) = 3 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x+3} + \frac{\frac{x}{2} - 1}{x^2 - 2x + 10}$

Literatur

[1] Autorenkollektiv: Analysis für Ingenieure. 8. Aufl. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1972.

[2] Dallmann, H.; Elster, K.-H.: Einführung in die höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure, Band I. Jena: VEB Gustav Fischer Verlag 1968.

[3] Lemnitzer, K.: Einführung in die Technik des Integrierens. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1972.

[4] v. Mangoldt, H.; Knopp, K.: Einführung in die höhere Mathematik, Band 2. 14. Aufl. Nr. 188, 189, 190. Leipzig: S. Hirzel Verlag 1972.

[5] Piskunow, N. S.: Differential- und Integralrechnung, Teil 2. 2. Aufl. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1970.

[6] Pforr, E.-A.; W. Schirotzek: Differential- und Integralrechung für Funktionen mit einer Variablen. Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen und Landwirte, Band 2. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1973.

Hinweise für den Lehrenden

Das vorliegende programmierte Lehrmaterial richtet sich in erster Linie an Studenten der ingenieurtechnischen, naturwissenschaftlichen und ökonomischen Fachrichtungen. Es besteht aus drei Teilen:

Der erste Teil beginnt mit LS 2. Dieser Abschnitt dient der *Überprüfung* und *Wiederholung* der *Voraussetzungen*, die zur Programmbearbeitung notwendig sind.

Im zweiten Teil, der mit LS 17 beginnt, werden wichtige *Ergebnisse der Theorie der Partialbruchzerlegung* (u. a. Definition des Partialbruchs, Ansätze für die Partialbruchzerlegung) sowie drei Methoden zur Bestimmung der Konstanten *dargeboten.*

Im dritten Teil (Beginn LS 70) wird die Partialbruchzerlegung anhand typischer *Aufgaben* geübt und gefestigt.

Zur inhaltlichen und zeitlichen Einordnung

Das Lehrprogramm ist so aufgebaut, daß es unter Berücksichtigung der angegebenen Vorkenntnisse als selbständige Lehreinheit eingesetzt werden kann. Vom Inhalt her empfiehlt sich jedoch der Einsatz entweder im Anschluß an die Behandlung gebrochener rationaler Funktionen oder bei der Integralrechnung vor der Integration gebrochener rationaler Funktionen. Wegen einer günstigeren Motivation ist die letzte Variante vorteilhafter, da die Nützlichkeit der Partialbruchzerlegung bei der Integration besonders deutlich wird.

Zum Einsatz

Aus den Erfahrungen, die während der Erprobungen des Lehrprogramms gewonnen wurden, lassen sich verschiedene Möglichkeiten seines Einsatzes ableiten.

Variante 1: Durchgängiger Einsatz des Lehrprogramms außerhalb von Lehrveranstaltungen.

Variante 2: Überprüfung und Wiederholung der Vorkenntnisse in Seminaren oder Übungen.
Darbietung und Festigung (LS 17 bis LS 95) unter Verwendung des Lehrprogramms (vorwiegend außerhalb von Lehrveranstaltungen).

Variante 3: Überprüfung der Vorkenntnisse in Seminaren oder Übungen.
Darbietung der Theorie in der Vorlesung.
Festigung in Übungen unter Verwendung des Lehrprogramms (LS 70 bis LS 95).

Allen drei hier vorgeschlagenen Einsatzvarianten muß eine Einführung der Studenten in die Arbeit mit programmierten Lehrmitteln vorausgehen, sofern sie nicht schon mit solchen Materialien gearbeitet haben. Nach Abschluß der Stoffeinheit sollte eine studienbegleitende Leistungskontrolle folgen. In jedem Fall ist auf eine gründliche Planung des Einsatzes zu achten. Das betrifft vor allem die Übereinstimmung zwischen Lehrveranstaltung und Lehrprogramm in Inhalt und Symbolik sowie den Übergang in das (bzw. aus dem) Lehrprogramm.

Arbeiten die Studenten mit Programmen, die Eigentum der Fach- oder Hochschule sind, muß darauf hingewiesen werden, daß nicht in die Lehrprogrammbücher geschrieben werden darf, nur so ist eine Wiederverwendung im folgenden Studienjahr gewährleistet. Als „Nachschrift" sollte die Zusammenfassung des Programms vervielfältigt und an die Studenten ausgegeben werden.

Erprobungsbefunde

An der Erprobung des Lehrprogramms „Partialbruchzerlegung" nahmen 217 Studenten der Bergakademie Freiberg und der Ingenieurhochschule Mittweida teil. Der Einsatz erfolgte nach Variante 1. Als Parameter wurden die Arbeitszeit, die Lern- und die Behaltensleistung, die Selbsteinschätzung der Lernleistung und der Grad der Verständlichkeit erfaßt.

– Zum Studium des Programms wurden im Mittel $\bar{x} = 290$ min aufgewandt. Der Wert der Zeitstreuung betrug $s = 100$ min.

Diese Werte bedürfen einer Interpretation, da sie relativ hoch erscheinen mögen. Viele Studenten arbeiteten zum ersten Mal mit einem Lehrprogramm. Außerdem lösten die Studenten innerhalb der von ihnen angegebenen Zeit oft auch die zusätzlichen Übungsaufgaben (S. 45). Dadurch erhöhte sich die mittlere Arbeitszeit nicht unwesentlich.
Eine Zeitanalyse für die Lösung der vier Aufgaben des ersten Programmteils, also für die Wiederholung der Voraussetzungen, ergab einen Mittelwert $\bar{x} =$ 60 min, d.h. eine Reihe der Versuchspersonen verfügte nicht über alle Voraussetzungen. Deshalb ist zu empfehlen, die Grundlagen zur Programmbearbeitung langfristig und systematisch zu wiederholen und zu festigen.

– Die Kennwerte der Lernleistung wurden aus einer Leistungskontrolle mit $\bar{x} = 15{,}6$ Pkt. und $s = 3{,}7$ Pkt. ermittelt.

Bezogen auf die maximale Punktzahl 20 entspricht der Leistungsstand einer Erfüllung der Anforderungen von 78%. Die Häufigkeitsverteilung der Punktwerte ist deutlich rechtsschief mit dem Maximum bei 18 Punkten. Wir glauben, das als guten Lernerfolg deuten zu können.

Drei Monate nach Abschluß der Programmerprobung wurde die Leistungskontrolle ohne Ankündigung wiederholt. Durch diese Arbeit wird die Behaltensleistung bestimmt, wenn – wie in unserer Untersuchung – in der Zwischenperiode der behandelte Stoff nicht wiederholt oder geübt wird.

Es ergab sich eine mittlere Behaltensleistung $\bar{x} = 12{,}0$ Pkt. bei einer Streuung $s = 4{,}3$ Pkt.

Bezogen auf die maximal erreichbare Punktzahl 18 ergibt sich mit 67% ein günstiger Wert für das Behalten über einen längeren Zeitraum.

– Die Frage „Glauben Sie mit dem Programm gut gelernt zu haben?" beantworteten

71,7%	der Studenten mit	Ja
26,0%	der Studenten mit	Ungewiß
2,3%	der Studenten mit	Nein.

Die Studierenden schätzten ihren Lernerfolg – in guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Messung – real und überwiegend positiv ein.

– Auf die Frage „War das Programm für Sie schwer verständlich?" ergaben sich folgende Antworthäufigkeiten:

5,5%	Ja
21,1%	Ungewiß
73,4%	Nein.

Diese Zahlenwerte scheinen zu belegen, daß das Programm in Umfang und Schwierigkeit für den angegebenen Adressatenkreis gut geeignet ist.

Hinweise für die Leistungskontrolle

Die inhaltlichen Schwerpunkte der Leistungskontrolle ergeben sich aus der Zielstellung des Programms (S. 4). Die Leistungskontrollen, die während der Erprobung eingesetzt wurden, bestanden jeweils aus fünf Aufgaben, zu deren Lösung 45 Minuten zur Verfügung standen. Dabei konnte die Zusammenfassung des Programms von den Studenten verwendet werden.

Beispiel für eine Leistungskontrolle:

1) Untersuchen Sie, welche der drei folgenden Funktionen man als Partialbrüche bezeichnen kann, und welche nicht.
   Begründen Sie kurz Ihre Entscheidung!

   (a) $f(x) = \frac{12}{x + 3j}$ (b) $f(x) = \frac{3x - 1}{x^2 + 2x + 2}$ (c) $f(x) = \frac{-2}{(x+1)^{-2}}$

2) Wie lautet der allgemeine Ansatz für die Partialbruchzerlegung einer echt gebrochenen rationalen Funktion $f(x)$, deren Nennerfunktion $h(x)$ eine zweifache reelle Nullstelle x_1 und eine dreifache reelle Nullstelle x_2 besitzt?

3) Bestimmen Sie unter Verwendung der Einsetzungsmethode die Partialbruchzerlegung der Funktion

   $$f(x) = \frac{5x^2 + 11x + 6}{(x-2)(x^2 + 4x + 4)} \text{ !}$$

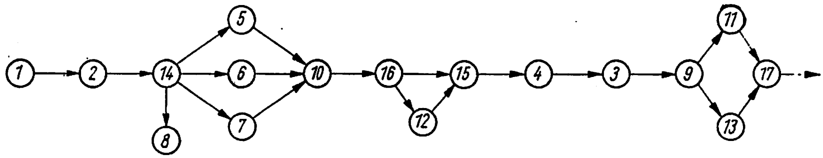
4) $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ sei echt gebrochen rational, $h(x)$ habe den Grad k. Wieviel Unbekannte muß man berechnen, um die Partialbruchzerlegung von $f(x)$ angeben zu können?

5) Zerlegen Sie mit Hilfe der Methode der unbestimmten Koeffizienten die Funktion

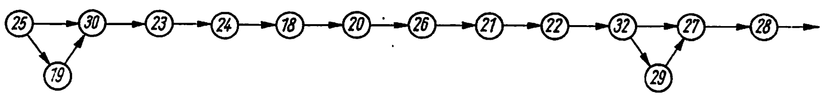
   $$f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + 4x - 1}{x^3 - x^2 + x} \text{ vollständig in Partialbrüche!}$$

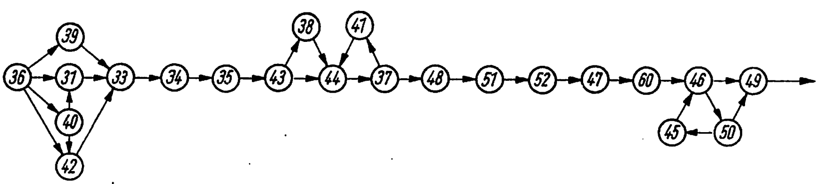
Ablaufdiagramm

Überprüfung von Vorkenntnissen

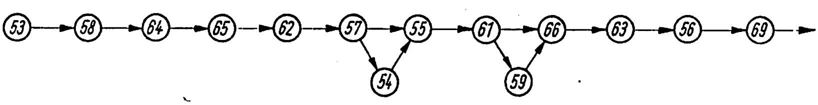


Zur Theorie der Partialbruchzerlegung
Definitionen und Ansätze:



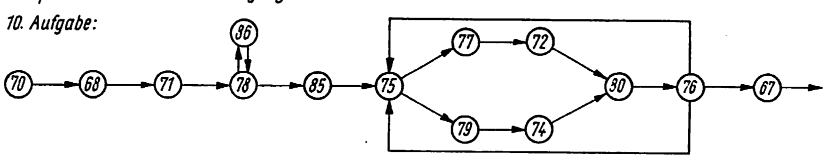


Methoden zur Bestimmung der Konstanten:

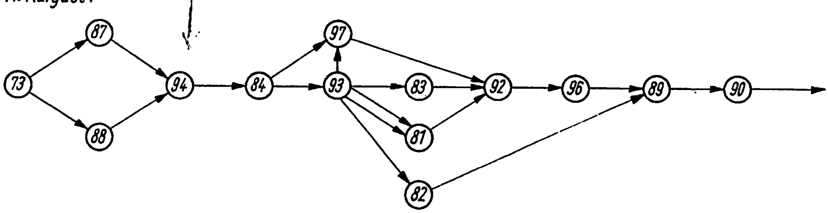


Beispiele zur Partialbruchzerlegung

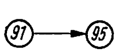
10. Aufgabe:



11. Aufgabe:



12. Aufgabe:



3150

In Vorbereitung:

K.-H. Elster, G. Mierzwa, G. Stöckel

Einführung in die Differentialrechnung

Bereits erschienen:

H. Bock, S. Gottwald, R.-P. Mühlig

Zum Sprachgebrauch in der Mathematik

K. Lemnitzer

Einführung in die Technik des Integrierens

H. Wenzel u. a.

Einfachste Konvergenzkriterien für unendliche Reihen