MATHEMATIK

LEHRPROGRAMMBÜCHER HOCHSCHULSTUDIUM

2

Einführung in die Technik des Integrierens

$$\int f(x)dx$$

Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. · Leipzig

MATHEMATIK 2
LEHRPROGRAMMBÜCHER
HOCHSCHULSTUDIUM

Einführung in die Technik des Integrierens

VON K. LEMNITZER

LEIPZIG 1972
AKADEMISCHE VERLAGSGESELLSCHAFT
GEEST & PORTIG K.-G.

AUTOR:

DR. RER. NAT. KARL LEMNITZER

Wissenschaftlicher Oberassistent an der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena

HERAUSGEBER:

DOZ. DR. HEINZ LOHSE

Forschungszentrum für Theorie und Methodologie der Programmierung von Lehr- und Lernprozessen an der Karl-Marx-Universität Leipzig

VLN 276-105/19/72 · ES 19 B 4

Printed in the German Democratic Republic

Satz: GG Interdruck Leipzig

Druck und Einband: Offizin Andersen Nexö, Leipzig

Voraussetzungen für die Durcharbeitung des Programms

Das Programm gibt eine Einführung in die Technik des Integrierens. Als Voraussetzung für das Studium dieses Programms genügt der Abschluß der 12. Klasse (Abitur) in Mathematik. Allerdings wird demjenigen das Durcharbeiten noch leichter fallen, der in einem Kurs über Differentialrechnung an einer Hoch- oder Fachschule seine Kenntnisse über das Differenzieren erweitert und z.B. auch die hyperbolischen Funktionen, deren Ableitungen und Umkehrungen kennengelernt hat.

Das Programm richtet sich vorwiegend an:

Abiturienten; Studenten des ersten Studienjahres an Hoch-, Fach- und Ingenieurschulen sowie pädagogischen Instituten im Direkt- und Fernstudium; Lehrer; Praktiker.

Ziele

Nach dem Durcharbeiten des Programms wird der Lernende

1. in der Lage sein, unbestimmte Integrale zu berechnen, die entweder Grundintegrale sind oder sich mit Hilfe einfacher Integrationsregeln darauf zurückführen lassen,

2. Verfahren kennen, mit deren Hilfe er Integrale, die nicht zu den Grundintegralen gehören, so umformen kann, daß sie auf Grundintegrale zurückgeführt werden können.

   Es handelt sich um folgende Verfahren:

- **Die Methode der Integration durch Substitution**

  Neben der Lösung solcher Integrale, bei denen der Integrand die besondere Gestalt $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ hat, werden eine Reihe wichtiger Substitutionen zur Lösung von Integralen besprochen.

- **Die Methode der partiellen Integration**

- **Die Integration durch Partialbruchzerlegung**

  Mit dem Studium dieses Abschnittes wird der Lernende systematisch mit der Integration gebrochener rationaler Funktionen vertraut gemacht.
  Nach der Zerlegung echt gebrochener rationaler Funktionen in Partialbrüche, der Bestimmung der Koeffizienten durch die Methode des Koeffizientenvergleichs und der Integration der bei der Partialbruchzerlegung auftretenden Grundtypen von gebrochenen rationalen Funktionen sind wesentliche Voraussetzungen für die Integration beliebiger rationaler Funktionen geschaffen.

Hinweise zur Arbeit mit dem Programm

Das vorliegende Programm hat die Aufgabe, Sie in die Technik des Integrierens einzuführen, d.h. Ihnen bei der selbständigen Aneignung gewisser technischer Fertigkeiten im Integrieren gegebener Funktionen zu helfen. Die Arbeitsweise unterscheidet sich vom Studium eines herkömmlichen Lehrbuches. Vielleicht brauchen Sie eine gewisse Zeit, bis Sie mit der neuen Form des Lernens vertraut sind. Wenn Sie jedoch gewissenhaft arbeiten und die Hinweise im Programm genau befolgen, werden Sie bald Freude an dieser Art zu lernen finden. — Das Integrieren kann man nur erlernen, wenn man selbst zahlreiche Aufgaben löst. Aus diesem Grunde nehmen Übungen einen breiten Raum ein, andere Teile sind dafür bewußt knapp gehalten. Sätze werden nur genannt, auf Beweise wird verzichtet. Das Programm ist seinem Charakter nach ein *Übungsprogramm*.

Beachten Sie bitte im einzelnen folgende Hinweise!

1. Das Programm gliedert sich in sechs Abschnitte und diese wieder in Lehreinheiten. Jede Lehreinheit besteht aus einem Darbietungsteil, der einen bestimmten Sachverhalt vermittelt, und einem Lösungsteil, welcher durch *L* gekennzeichnet ist.
2. Studieren Sie den Darbietungsteil gründlich, denn er schließt jeweils mit Aufgaben ab. Prägen Sie sich die farbig unterlegten Stellen (es sind meist wichtige Sätze) gut ein!
3. Lösen Sie alle Aufgaben sorgfältig! Legen Sie sich dafür einige Blatt Papier zurecht!
4. Die Ergebnisse der Aufgaben finden Sie jeweils auf der folgenden rechten Seite. Schlagen Sie diese erst auf, wenn Sie die betreffende(n) Aufgabe(n) gelöst haben!
5. Stimmt Ihre Lösung mit der im Programm angegebenen nicht überein, dann werden Sie oft schon durch den Vergleich mit der richtigen Lösung Ihren Fehler erkennen. Außerdem haben Sie die Möglichkeit, die Lösungshinweise (Hilfsschritte **H 1**, **H 2**, ... am Ende des Buches) in Anspruch zu nehmen. Sie sind so gestaltet, daß wichtige Stationen auf dem Wege zur Lösung farbig hervorgehoben sind. Wahrscheinlich können Sie bei einiger Übung schon durch einen Vergleich dieser Stellen mit Ihrer Lösung den Fehler finden. Von den Hilfsschritten kehren Sie stets wieder nach vorn zurück.
6. Oft empfiehlt es sich auch, die vorangegangene Information oder bereits früher abgearbeitete Teile des Programms zur Fehlersuche heranzuziehen.
7. Arbeiten Sie zügig!
   Gehen Sie aber nur dann im Programm weiter, wenn Sie das Gelesene wirklich verstanden und die Aufgaben gelöst haben.

8. Am Schluß des Programms finden Sie eine Zusammenfassung, weitere Übungsaufgaben mit Lösungen und eine Kontrollarbeit mit Bewertung.
9. Beachten Sie besonders:

> **Lassen Sie sich durch die Anordnung der Buchseiten (linke Seiten stehen kopf) nicht vom Lernen ablenken. Sie arbeiten stets nur auf der rechten Seite und drehen das Buch nur einmal bei Lehreinheit 50.**

Und denken Sie daran:

Lernen führt nur dann zum Erfolg, wenn der Lernende aktiv ist!

Viel Spaß bei der Arbeit!

Inhalt

Literatur

Bronstein, I. N.; K. A. Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik. 11. Aufl. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1972

Courant, R.: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Bd. 1. Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955

Fichtenholz, G. M.: Differential- und Integralrechnung, Bd. II. 2. Aufl. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1966

Grüß, G.: Differential- und Integralrechnung. 2. Aufl. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig 1953

Klobe, W.: Grundlagen der Integralrechnung. Lehrbriefe für das Fernstudium, herausgegeben von der Technischen Universität Dresden, Mathematik, 7. Lehrbrief, III. Ausgabe. VEB Verlag Technik, Berlin 1966

v. Mangoldt-Knopp, H.: Einführung in die höhere Mathematik, Bd. 3. 12. Aufl. S. Hirzel Verlag, Leipzig 1965

Ostrowski, A.: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Bd. 1. Birkhäuser, Basel 1945.

Piskunow, N. S.: Differential- und Integralrechnung, Teil 2. 2. Aufl. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1970

Mathematik, Lehrbuch für die erweiterte Oberschule, Klasse 12. Verlag Volk und Wissen, Berlin 1970

Mathematik, Lehrbuch für die erweiterte Oberschule, Klasse 11. Verlag Volk und Wissen, Berlin 1969

Analysis für Ingenieur- und Fachschulen. VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1968

A. Stammfunktion und unbestimmtes Integral

In der **Differentialrechnung** wurde folgende Aufgabenstellung betrachtet:

Gegeben ist eine Funktion $F(x)$,

gesucht wird die erste Ableitung dieser Funktion $F'(x) = f(x)$.

Beispiel

Gegeben: $F(x) = x^3$,

gesucht: $F'(x) = f(x) = 3x^2$.

Die Aufgabenstellung in der **Integralrechnung** ist die Umkehrung des Grundproblems der Differentialrechnung:

Gegeben ist eine Funktion $f(x)$,

gesucht wird eine Funktion $F(x)$ mit der Eigenschaft

$$F'(x) = f(x).$$

Die Ableitung der gesuchten Funktion soll also gleich der gegebenen Funktion sein.

Beispiel

Gegeben: $f(x) = 3x^2$,

gesucht: $F(x)$ mit der Eigenschaft, daß $F'(x) = 3x^2$ ist; also $F(x) = x^3$.

Definition: Die Funktion $y = f(x)$ sei reell und stetig im Intervall (a, b). Jede dort definierte reelle Funktion $F(x)$, deren erste Ableitung gleich $f(x)$ ist, heißt **Stammfunktion** von $f(x)$ in diesem Intervall.

H 54

Man kommt zunächst auf

$$\boxed{\frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}}}\,.$$

Die weitere Umformung beginnt damit, daß man Zähler und Nenner durch $\cos^2\frac{x}{2}$ dividiert.

——► L 93

H 55

Die Substitution führt auf

$$\int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}\,.$$

——► L 95

H 56

Die Substitution führt auf

$$\int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,.$$

——► L 96

Beispiele:

1. Die Ableitung von $\sin x$ ist $\cos x$. Deshalb ist $F(x) = \sin x$ Stammfunktion von $f(x) = \cos x$.
   Beide Funktionen sind im Intervall $(-\infty, \infty)$ definiert.
2. Die Ableitung von $4x^3 + 2$ ist $12x^2$. Deshalb ist $F(x) = 4x^3 + 2$ Stammfunktion von $f(x) = 12x^2$.
   Beide Funktionen sind im Intervall $(-\infty, \infty)$ definiert.
3. Die Ableitung von $\sqrt{x} + C$, wobei C eine beliebige Konstante darstellt, ist $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Deshalb ist $F(x) = \sqrt{x} + C$ Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
   $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ist definiert im Intervall $(0, \infty)$ und $F(x) = \sqrt{x} + C$ im Intervall $[0, \infty)$. Größtmögliches Intervall, in dem beide Funktionen definiert sind, ist das Intervall $(0, \infty)$.

Gegeben sind zehn Funktionen. Diese Funktionen sind nicht wahllos zusammengestellt, sondern so ausgewählt, daß fünf von ihnen Stammfunktionen der fünf übrigen sind.

$\sqrt{x-1}$;	$3 + x^2$;
$2x$;	$\ln(3 + x)$;
$\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$;	$\cos x$;
$-\frac{1}{x^2}$;	$\frac{1}{x}$;
$\frac{1}{3+x}$;	$-\sin x$.

1. Stellen Sie die gegebenen Funktionen zu Paaren $(f(x), F(x))$ zusammen, wobei $F(x)$ Stammfunktion von $f(x)$ ist, also $F'(x) = f(x)$.
   Beispiel: Ein solches Paar ist $(2x, 3 + x^2)$, da $(3 + x^2)' = 2x$ ist.
2. Geben Sie die größtmöglichen Definitionsintervalle an!

Hinweis: Ordnen Sie die Lösungen in einer Tabelle folgender Form an:

$f(x)$	$F(x)$	**Definitionsintervall**
$2x$	$3 + x^2$	$(-\infty, \infty)$

! Schreiben Sie Ihre Lösungen auf, bevor Sie umblättern!

H 50

Nach der Partialbruchzerlegung ergibt sich folgende neue Aufgabenstellung

$$\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x-2}+6\int\frac{dx}{(x-2)^2}+4\int\frac{dx}{(x-2)^3}-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x-4}\,.$$

→ L 85

H 51

Der Nenner besitzt eine reelle Wurzel ($x = 3$) und einfache komplexe Wurzeln (die Gleichung $x^2 - 2x + 5 = 0$ hat keine reelle Lösung).

→ L 86

H 52

Das gegebene Integral kann durch folgende Aufgabenstellung ersetzt werden:

$$\boxed{\int\frac{dx}{x-3}+\int\frac{2x-2}{x^2-2x+5}\,dx+7\int\frac{dx}{x^2-2x+5}}\,.$$

Beim dritten Integral führen quadratische Ergänzung und anschließende Substitution auf

$$7\int\frac{dx}{(x-1)^2+4}=7\int\frac{dt}{t^2+4}\quad(\text{mit } x-1=t).$$

→ L 90

H 53

Für die Zerlegung in Partialbrüche wird folgender Ansatz gemacht:

$$\frac{A}{x+1}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+x+1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+x+1)^2}\,.$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten durch Koeffizientenvergleich ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\boxed{\begin{array}{c|lr}
x^4 & A+M_1 & =0 \\
x^3 & 2A+2M_1+N_1 & =-3 \\
x^2 & 3A+2M_1+M_2+2N_1 & =0 \\
x^1 & 2A+M_1+M_2+2N_1+N_2 & =1 \\
x^0 & A+N_1+N_2 & =-4
\end{array}}$$

Lösung des Gleichungssystems:

$$A=-2;\quad M_1=2;\quad M_2=8;\quad N_1=-3;\quad N_2=1$$

→ L 91

L 1

$f(x)$	$F(x)$	Definitionsintervall
$2x$	$3 + x^2$	$(-\infty, \infty)$
$-\sin x$	$\cos x$	$(-\infty, \infty)$
$\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$	$\sqrt{x-1}$	$(1, \infty)$
$\frac{1}{3+x}$	$\ln(3+x)$	$(-3, \infty)$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	$(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$

Stimmen Ihre Lösungen mit den hier angegebenen vollständig überein, so ——▶ 2

Abweichungen in den Spalten $f(x)$ und $F(x)$: ——▶ H 1, 1., Seite 63

Abweichungen bei Angabe der Definitionsintervalle: ——▶ H 1, 2., Seite 63

2

Es gilt der folgende

Satz: Ist die Funktion $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ im Intervall (a, b), dann ist auch die Funktion $F(x) + C$, wobei C eine beliebige Konstante ist, eine Stammfunktion von $f(x)$.

Kennt man also irgendeine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$, so erhält man daraus durch Addition beliebiger Konstanten C die Menge aller Stammfunktionen von $f(x)$.
Anders ausgedrückt: Zwei Stammfunktionen einer Funktion $f(x)$ unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante.

Geben Sie für die folgenden Funktionen je zwei Stammfunktionen an!

a) $f(x) = 6x^5$; b) $f(x) = x^2 + 3$; c) $f(x) = 3x^2 + 5x$.

Literatur

Bronstein, I. N.; K. A. Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik. 11. Aufl. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1972

Courant, R.: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Bd. 1. Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955

Fichtenholz, G. M.: Differential- und Integralrechnung, Bd. II. 2. Aufl. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1966

Grüß, G.: Differential- und Integralrechnung. 2. Aufl. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig 1953

Klobe, W.: Grundlagen der Integralrechnung. Lehrbriefe für das Fernstudium, herausgegeben von der Technischen Universität Dresden, Mathematik, 7. Lehrbrief, III. Ausgabe. VEB Verlag Technik, Berlin 1966

v. Mangoldt-Knopp, H.: Einführung in die höhere Mathematik, Bd. 3. 12. Aufl. S. Hirzel Verlag, Leipzig 1965

Ostrowski, A.: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Bd. 1. Birkhäuser, Basel 1945.

Piskunow, N. S.: Differential- und Integralrechnung, Teil 2. 2. Aufl. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1970

Mathematik, Lehrbuch für die erweiterte Oberschule, Klasse 12. Verlag Volk und Wissen, Berlin 1970

Mathematik, Lehrbuch für die erweiterte Oberschule, Klasse 11. Verlag Volk und Wissen, Berlin 1969

Analysis für Ingenieur- und Fachschulen. VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1968

A. Stammfunktion und unbestimmtes Integral

In der **Differentialrechnung** wurde folgende Aufgabenstellung betrachtet:

Gegeben ist eine Funktion $F(x)$,

gesucht wird die erste Ableitung dieser Funktion $F'(x) = f(x)$.

Beispiel

Gegeben: $F(x) = x^3$,

gesucht: $F'(x) = f(x) = 3x^2$.

Die Aufgabenstellung in der **Integralrechnung** ist die Umkehrung des Grundproblems der Differentialrechnung:

Gegeben ist eine Funktion $f(x)$,

gesucht wird eine Funktion $F(x)$ mit der Eigenschaft

$$F'(x) = f(x).$$

Die Ableitung der gesuchten Funktion soll also gleich der gegebenen Funktion sein.

Beispiel

Gegeben: $f(x) = 3x^2$,

gesucht: $F(x)$ mit der Eigenschaft, daß $F'(x) = 3x^2$ ist; also $F(x) = x^3$.

Definition: Die Funktion $y = f(x)$ sei reell und stetig im Intervall (a, b). Jede dort definierte reelle Funktion $F(x)$, deren erste Ableitung gleich $f(x)$ ist, heißt **Stammfunktion** von $f(x)$ in diesem Intervall.

H 54

Man kommt zunächst auf

$$\boxed{\frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}}\,.$$

Die weitere Umformung beginnt damit, daß man Zähler und Nenner durch $\cos^2 \frac{x}{2}$ dividiert.

——▸ L 93

H 55

Die Substitution führt auf

$$\int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}\,.$$

——▸ L 95

H 56

Die Substitution führt auf

$$\int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,.$$

——▸ L 96

Beispiele:

1. Die Ableitung von $\sin x$ ist $\cos x$. Deshalb ist $F(x) = \sin x$ Stammfunktion von $f(x) = \cos x$.
   Beide Funktionen sind im Intervall $(-\infty, \infty)$ definiert.
2. Die Ableitung von $4x^3 + 2$ ist $12x^2$. Deshalb ist $F(x) = 4x^3 + 2$ Stammfunktion von $f(x) = 12x^2$.
   Beide Funktionen sind im Intervall $(-\infty, \infty)$ definiert.
3. Die Ableitung von $\sqrt{x} + C$, wobei C eine beliebige Konstante darstellt, ist $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Deshalb ist $F(x) = \sqrt{x} + C$ Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
   $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ist definiert im Intervall $(0, \infty)$ und $F(x) = \sqrt{x} + C$ im Intervall $[0, \infty)$. Größtmögliches Intervall, in dem beide Funktionen definiert sind, ist das Intervall $(0, \infty)$.

Gegeben sind zehn Funktionen. Diese Funktionen sind nicht wahllos zusammengestellt, sondern so ausgewählt, daß fünf von ihnen Stammfunktionen der fünf übrigen sind.

$\sqrt{x-1}$; $3 + x^2$;

$2x$; $\ln(3 + x)$;

$\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$; $\cos x$;

$-\frac{1}{x^2}$; $\frac{1}{x}$;

$\frac{1}{3+x}$; $-\sin x$.

1. Stellen Sie die gegebenen Funktionen zu Paaren $(f(x), F(x))$ zusammen, wobei $F(x)$ Stammfunktion von $f(x)$ ist, also $F'(x) = f(x)$.

   Beispiel: Ein solches Paar ist $(2x, 3 + x^2)$, da $(3 + x^2)' = 2x$ ist.

2. Geben Sie die größtmöglichen Definitionsintervalle an!

Hinweis: Ordnen Sie die Lösungen in einer Tabelle folgender Form an:

$f(x)$	$F(x)$	**Definitionsintervall**
$2x$	$3 + x^2$	$(-\infty, \infty)$

! Schreiben Sie Ihre Lösungen auf, bevor Sie umblättern!

H 50

Nach der Partialbruchzerlegung ergibt sich folgende neue Aufgabenstellung

$$\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-2}+6\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2}+4\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^3}-\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-4}\,.$$

→ L 85

H 51

Der Nenner besitzt eine reelle Wurzel ($x = 3$) und einfache komplexe Wurzeln (die Gleichung $x^2 - 2x + 5 = 0$ hat keine reelle Lösung).

→ L 86

H 52

Das gegebene Integral kann durch folgende Aufgabenstellung ersetzt werden:

$$\boxed{\int\frac{\mathrm{d}x}{x-3}+\int\frac{2x-2}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x+7\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x+5}}\,.$$

Beim dritten Integral führen quadratische Ergänzung und anschließende Substitution auf

$$7\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2+4}=7\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+4}\quad(\text{mit } x-1=t).$$

→ L 90

H 53

Für die Zerlegung in Partialbrüche wird folgender Ansatz gemacht:

$$\frac{A}{x+1}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+x+1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+x+1)^2}\,.$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten durch Koeffizientenvergleich ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\boxed{\begin{array}{c|l}
x^4 & A+M_1 = 0\\
x^3 & 2A+2M_1+N_1 = -3\\
x^2 & 3A+2M_1+M_2+2N_1 = 0\\
x^1 & 2A+M_1+M_2+2N_1+N_2 = 1\\
x^0 & A+N_1+N_2 = -4
\end{array}}$$

Lösung des Gleichungssystems:

$$A=-2;\quad M_1=2;\quad M_2=8;\quad N_1=-3;\quad N_2=1$$

→ L 91

L 1

$f(x)$	$F(x)$	Definitionsintervall
$2x$	$3 + x^2$	$(-\infty, \infty)$
$-\sin x$	$\cos x$	$(-\infty, \infty)$
$\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$	$\sqrt{x-1}$	$(1, \infty)$
$\frac{1}{3+x}$	$\ln(3+x)$	$(-3, \infty)$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	$(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$

Stimmen Ihre Lösungen mit den hier angegebenen vollständig überein, so ⟶ 2

Abweichungen in den Spalten $f(x)$ und $F(x)$: ⟶ H 1, 1., Seite 63

Abweichungen bei Angabe der Definitionsintervalle: ⟶ H 1, 2., Seite 63

2

Es gilt der folgende

Satz: Ist die Funktion $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ im Intervall (a, b), dann ist auch die Funktion $F(x) + C$, wobei C eine beliebige Konstante ist, eine Stammfunktion von $f(x)$.

Kennt man also irgendeine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$, so erhält man daraus durch Addition beliebiger Konstanten C die Menge aller Stammfunktionen von $f(x)$.
Anders ausgedrückt: Zwei Stammfunktionen einer Funktion $f(x)$ unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante.

Geben Sie für die folgenden Funktionen je zwei Stammfunktionen an!

a) $f(x) = 6x^5$; b) $f(x) = x^2 + 3$; c) $f(x) = 3x^2 + 5x$.

H 46

Man setzt zuerst $t = x + \frac{1}{2}$ und erhält die Lösung von

$$\int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

Multipliziert man dieses Ergebnis mit (−3), so hat man die Lösung eines der beiden Integrale, in die das gegebene Integral aufgespalten wurde (vgl. L 71).
Die vollständige Lösung findet man, indem noch die Lösung des zweiten Integrals (vgl. L 72) addiert wird.

⟶ L 77

H 47

Multiplikation mit dem Nennerpolynom und Ordnen nach gleichen Potenzen von x ergibt

$$3x - 5 = (A + B)\,x + (4A - 2B).$$

Daraus folgt das Gleichungssystem

$$\boxed{\begin{array}{c|rcrcr} x^1 & A & + & B & = & 3 \\ x^0 & 4A & - & 2B & = & -5 \end{array}}\,.$$

⟶ L 81

H 48

Als Ergebnis der Partialbruchzerlegung ergibt sich als neue Aufgabenstellung

$$\int \frac{3x - 5}{x^2 + 2x - 8}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x - 2} + \frac{17}{6}\int \frac{dx}{x + 4}.$$

⟶ L 82

H 49

Multiplikation mit dem Nennerpolynom und Ordnen nach gleichen Potenzen von x ergibt

$$\begin{aligned} 3x^2 - 20x + 20 = (A_1 + B)\,x^3 &+ (-8A_1 + A_2 - 6B)\,x^2 \\ &+ (20A_1 - 6A_2 + A_3 + 12B)\,x \\ &+ (-16A_1 + 8A_2 - 4A_3 - 8B) \end{aligned}$$

Daraus folgt das Gleichungssystem

$$\boxed{\begin{array}{c|rrrrr} x^3 & A_1 & & & + \quad B = & 0 \\ x^2 & -8A_1 + & A_2 & & - \quad 6B = & 3 \\ x^1 & 20A_1 - & 6A_2 + & A_3 & + \; 12B = & -20 \\ x^0 & -16A_1 + & 8A_2 - & 4A_3 & - \quad 8B = & 20 \end{array}}\,.$$

⟶ L 84

L 2

a) $F_1(x) = x^6$
$F_2(x) = x^6 + 3$

b) $F_1(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x$
$F_2(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x + \frac{1}{2}$

c) $F_1(x) = x^3 + \frac{5}{2}x^2$
$F_2(x) = x^3 + \frac{5}{2}x - 2$

$F_1(x)$ und $F_2(x)$ sind jeweils zwei *spezielle* Stammfunktionen. Sie haben die Aufgabe richtig gelöst, wenn die von Ihnen angegebenen Stammfunktionen folgende Struktur haben:

a) $F(x) = x^6 + C$; b) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x + C$; c) $F(x) = x^3 + \frac{5}{2}x^2 + C$.
C stellt in allen drei Fällen eine beliebige reelle Zahl dar.

3

Die Menge aller Stammfunktionen der stetigen Funktion $f(x)$ nennt man das **unbestimmte Integral** von $f(x)$ und bezeichnet es mit dem Symbol $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ (gelesen: Integral f von x dx), also

$$\boxed{\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C}\ .$$

Dabei nennt man

die Funktion $f(x)$	**Integrand,**
die Variable x	**Integrationsvariable,**
die Konstante C	**Integrationskonstante.**

Die Ermittlung einer Stammfunktion einer gegebenen Funktion $f(x)$ bezeichnet man als **Integration** der Funktion $f(x)$.
Daß gerade x und nicht irgendeine andere Variable die Integrationsvariable ist, wird durch das Symbol dx zum Ausdruck gebracht. Aus den Darlegungen in 1 und 2 geht hervor, daß die *Integration die Umkehrung der Differentiation* ist.

Beispiel: Es ist

$$\int 6x^5\,\mathrm{d}x = x^6 + C \quad (C \text{ beliebige reelle Zahl}),$$

weil

$$(x^6 + C)' = 6x^5$$

ist. Die beiden Gleichungen

$$F'(x) = f(x)$$

und

$$F(x) + C = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

drücken also das gleiche aus und sind lediglich verschiedene Schreibweisen ein und desselben Sachverhalts.

Schreiben Sie bei folgenden Integralen Integrand und Integrationsvariable auf!

a) $\int 3ax\,\mathrm{d}x$; b) $\int \sin t\,\mathrm{d}t$.

H 40

Umformen des zweiten Integrals:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 25} = \int \frac{dx}{(x-3)^2 + 16} = \int \frac{dt}{t^2 + 16} \cdots .$$

Beachten Sie bei der Endlösung den Faktor 5.

→ L 69

H 41

Zerlegung:

$$\boxed{\underbrace{\frac{5}{4}\int \frac{2x-2}{x^2 - 2x + \frac{3}{2}}\,dx}_{I_1} - \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 - 2x + \frac{3}{2}}}_{I_2}} .$$

Umformen von I_2:

$$I_2 = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 + \frac{1}{2}} \quad \text{mit } t = x - 1$$

→ L 70

H 42

Man setzt $x^2 + x + 1 = t$ und erhält mit

$$4\int \frac{dt}{t^2} = 4\int t^{-2}\,dt$$

in Grundintegral.

→ L 72

H 43

Die Substitution $t = \sqrt{\frac{3}{4}}\,u$ führt auf das Grundintegral

$$\boxed{\frac{8}{9}\sqrt{3}\int \frac{du}{1+u^2}} .$$

Nun hat man noch die beiden Substitutionen $t = \sqrt{\frac{3}{4}}\,u$ und $x + \frac{1}{2} = t$ rückgängig zu machen.

→ L 74

H 44

Die Anwendung der partiellen Integration liefert zunächst

$$\boxed{-\frac{2}{3}\left(\frac{t}{t^2 + \frac{3}{4}} - \int \frac{1}{t^2 + \frac{3}{4}}\,dt\right)} .$$

Das dabei auftretende Integral wurde bereits in 74, Seite 97 gelöst.

→ L 75

H 45

Beachten Sie, daß sich die Glieder $\arctan \frac{2t}{\sqrt{2}}$ zusammenfassen lassen!

→ L 76

L 3

	Integrand	Integrationsvariable
a)	$3ax$	x
b)	$\sin t$	t

4

Über die Existenz einer Stammfunktion zu einer gegebenen Funktion macht der folgende Satz eine Aussage.

Satz: Zu einer im Intervall (a, b) stetigen Funktion $f(x)$ existiert stets eine Stammfunktion.

Damit wird jedoch nichts darüber ausgesagt, *wie* man zu einer gegebenen Funktion eine Stammfunktion finden kann. In dieser Hinsicht besteht ein grundlegender Unterschied zur Differentialrechnung. Während dort ein System von Regeln existiert, mit deren Hilfe man zu jeder sogenannten elementaren Funktion die Ableitung dieser Funktion bestimmen kann und als Ergebnis wieder eine elementare Funktion erhält, gilt Analoges für die Integration nicht. Regeln, die den in der Differentialrechnung geltenden entsprechen, gibt es, von einigen Ausnahmen abgesehen, nicht. Außerdem haben schon relativ einfache Funktionen wie e^{x^2}, $\frac{e^x}{x}$, $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{1}{\ln x}$ keine elementaren Stammfunktionen.

Unter elementaren Funktionen wollen wir dabei verstehen: rationale und algebraische Funktionen, die vier trigonometrischen Funktionen und ihre Umkehrfunktionen, die Logarithmusfunktionen und die Exponentialfunktionen sowie alle Funktionen, die sich aus den genannten Funktionen durch Zusammensetzung ergeben.

Während man zum Beispiel für die Funktion $f(x) = e^{x^2}$ keine elementare Stammfunktion angeben kann, läßt sich die Integration der Funktion $f(x) = 2xe^{x^2}$ „elementar ausführen".

Weisen Sie nach, daß $\int 2xe^{x^2}dx = e^{x^2}+C$ ist!

H 34

Aus $u = \cos x$ und $v' = \cos x$

$u' = -\sin x$ $\quad v = \sin x$

folgt

$$\boxed{\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \sin x \cos x - \int \sin x\,(-\sin x)\,\mathrm{d}x}\,.$$

→ L 50

H 35

In allen drei Fällen hat man zunächst partiell zu integrieren. Es ergibt sich:

$$\boxed{\begin{aligned}&\text{a)}\ -\sin x \cos x + \int \cos^2 x\,\mathrm{d}x,\\ &\text{b)}\ \sinh x \cosh x - \int \sinh^2 x\,\mathrm{d}x,\\ &\text{c)}\ \sinh x \cosh x - \int \cosh^2 x\,\mathrm{d}x.\end{aligned}}$$

Danach werden die Integranden der neu entstehenden Integrale mittels folgender Beziehungen ersetzt:

a) $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$,

b) $\sinh^2 x = \cosh^2 x - 1$,

c) $\cosh^2 x = \sinh^2 x + 1$.

→ L 52

H 36

Schreiben Sie $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ als Potenz mit negativem Exponenten!

→ L 63

H 37

Die Ableitung des Nenners ist $2x + 2$. Um auf den gegebenen Zähler $2x - 1$ zu kommen, muß man 3 subtrahieren, also

$$\boxed{2x - 1 = 2x + 2 - 3}\,.$$

→ L 64

H 38

Die quadratische Ergänzung zu $x^2 + px$ ist $\left(\dfrac{p}{2}\right)^2$.

→ L 65

H 39

Die Ableitung des Nenners ist $2x - 6$. Man muß also erreichen, daß der Zähler des ersten Integranden (bis auf einen konstanten Faktor) $2x - 6$ wird. Die Summe beider Zähler muß außerdem gleich dem gegebenen Zähler $x + 2$ sein.

$$x + 2 = \underbrace{\underbrace{\tfrac{1}{2}\,(2x - 6)}_{x-3} + 5}_{x+2}$$

→ L 68

L 4

Man bildet einfach die Ableitung:

$$(e^{x^2} + C)' = 2xe^{x^2}.$$

5

Die bisher in unserem Programm angegebenen Stammfunktionen konnten leicht durch Umkehrung entsprechender Differentiationsformeln gewonnen werden. Nicht immer ist das so einfach. Aus diesem Grunde wollen wir uns im folgenden gewisse Fertigkeiten im Integrieren gegebener Funktionen systematisch erarbeiten.

Dabei soll nur über Stammfunktionen stetiger Funktionen gesprochen werden. Ist das Definitionsintervall der Bereich $(-\infty, \infty)$, so wird im folgenden auf seine Angabe vollständig verzichtet. Trifft das nicht zu, so werden wir die Funktion nur in den Intervallen betrachten, in denen sie stetig ist. In diesen Fällen wird zwar auch auf die explizite Angabe der Definitionsintervalle in der üblichen Weise verzichtet, Sie finden jedoch Hinweise, die Ihnen die Bestimmung der Definitionsintervalle sofort ermöglichen.

Überprüfen Sie, ob die folgenden unbestimmten Integrale richtig gelöst sind!
Wenn ein Fehler vorliegt, so berichtigen Sie ihn!

a) $\int \cos x \, dx = \sin x + C;$

b) $\int x^2 \, dx = x^3 + C;$

c) $\int \sin x \, dx = \cos x + C.$

$$\begin{aligned} A_1 \quad + M \quad &= 6 \\ A_2 \quad + N &= 0 \\ A_1 \quad &= 4 \\ A_2 \quad &= 1 \end{aligned}$$ 1 Pkt.

$A_1 = 4, \quad A_2 = 1, \quad M = 2, \quad N = -1$ 1 Pkt.

Neue Aufgabenstellung

$$\int \frac{6x^3 + 4x + 1}{x^4 + x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{4}{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \int \frac{2x - 1}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}x$$ 1 Pkt.

$$= 4\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int x^{-2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2x}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 1}$$ 1 Pkt.

$$= 4 \ln |x| - \frac{1}{x} + \ln (x^2 + 1) - \arctan x + C.$$ 1 Pkt.

8 Pkte.

---

5. Aufgabe: Integration durch Substitution in der ersten Form

$$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\cos^2 (x^3 + 1)} = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2\,\mathrm{d}x}{\cos^2 (x^3 + 1)}$$

Man setzt $\varphi(x) = x^3 + 1 = t$,

$$3x^2\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$ 1 Pkt.

$$\frac{1}{3} \int \frac{3x^2\,\mathrm{d}x}{\cos^2 (x^3 + 1)} = \frac{1}{3} \int \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$$ 1 Pkt.

$$= \frac{1}{3} \tan t + C$$

$$= \frac{1}{3} \tan (x^3 + 1) + C.$$ 1 Pkt.

3 Pkte.

---

insgesamt 23 Punkte

Bewertung: 0 bis 8 Pkte.: ungenügend (5)
9 bis 13 Pkte.: genügend (4)
14 bis 17 Pkte.: befriedigend (3)
18 bis 21 Pkte.: gut (2)
22 u. 23 Pkte.: sehr gut (1).

Damit sind Sie am Ende des Programms angelangt. Wir hoffen, daß Sie Freude an der Arbeit hatten.

L 5

a) richtig, denn $(\sin x + C)' = \cos x$.

b) falsch, denn $(x^3 + C)' \neq x^2$; **Lösung:** $\frac{1}{3}x^3 + C$.

c) falsch, denn $(\cos x + C)' \neq \sin x$; **Lösung:** $-\cos x + C$.

B. Grundintegrale und einfache Integrationsregeln

6 Zunächst stellen wir die Integrationsformeln zusammen, die sich unmittelbar aus der Umkehrung der Differentiation einfacher elementarer Funktionen ergeben. Diese Integrale heißen

Grundintegrale

$$(1)\quad \int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1\text{, ganze Zahl; wenn } n < -1\text{, dann muß } x \neq 0 \text{ sein});$$

$$(2)\quad \int x^\alpha \,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad (\alpha \neq -1\text{, reelle Zahl; } x > 0);$$

$$(3)\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \left.\begin{cases} \ln x + C & \text{für } x > 0 \\ \ln(-x) + C & \text{für } x < 0 \end{cases}\right\} \text{ oder einfach}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C \qquad (x \neq 0);$$

$$(4)\quad \int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad (a > 0,\ a \neq 1);$$

$$\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + C;$$

$$(5)\quad \int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C;$$

$$(6)\quad \int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C;$$

$$(7)\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + C \qquad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ mit } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right),$$

$$(8)\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\cot x + C \qquad (x \neq k\pi \text{ mit } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots);$$

$$(9)\quad \int \cosh x \,\mathrm{d}x = \sinh x + C;$$

3. Aufgabe: Integration durch Substitution in der zweiten Form.

Man setzt $x = \varphi(t) = t^6$,

$$dx = 6t^5\, dt, \qquad \text{1 Pkt.}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \int \frac{6t^5\, dt}{\sqrt{t^6} + \sqrt[3]{t^6}} = 6 \int \frac{t^5\, dt}{t^3 + t^2} = 6 \int \frac{t^3\, dt}{t + 1} \qquad \text{1 Pkt.}$$

$$= 6 \int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t + 1} \right) dt \qquad \text{1 Pkt.}$$

$$= 6 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln (t + 1) \right) + C$$

$$= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \ln (t + 1) + C\,. \qquad \text{1 Pkt.}$$

Rückkehr zur Variablen x:

Aus $x = \varphi(t) = t^6$ folgt $t = \psi(x) = \sqrt[6]{x}$. 1 Pkt.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = 2 \sqrt[6]{x^3} - 3 \sqrt[6]{x^2} + 6 \sqrt[6]{x} - 6 \ln \left(\sqrt[6]{x} + 1 \right) + C$$

$$= 2 \sqrt{x} - 3 \sqrt[3]{x} + 6 \sqrt[6]{x} - 6 \ln \left(\sqrt[6]{x} + 1 \right) + C. \qquad \underline{\text{1 Pkt.}}$$

6 Pkte.

---

4. Aufgabe: Integration durch Partialbruchzerlegung

1. Nullstellen des Nennerpolynoms:

   $x_1 = 0$ (zweifache Nullstelle),

   $x^2 + 1$ besitzt keine reellen Wurzeln.

2. Produktdarstellung des Nennerpolynoms:

   $x^4 + x^2 = x^2 (x^2 + 1)$. 1 Pkt.

3. Zerlegung in Partialbrüche:

$$\frac{6x^3 + 4x + 1}{x^2 (x^2 + 1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{Mx + N}{x^2 + 1}\,. \qquad \text{1 Pkt.}$$

$$6x^3 + 4x + 1 = (A_1 + M)\, x^3 + (A_2 + N)\, x^2 + A_1 x + A_2\,. \qquad \text{1 Pkt.}$$

$$(10)\quad \int \sinh x \,\mathrm{d}x = \cosh x + C;$$

$$(11)\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^2 x} = \tanh x + C;$$

$$(12)\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh^2 x} = -\coth x + C \qquad (x \neq 0);$$

$$(13)\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \qquad (|x| < 1);$$

$$(14)\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C;$$

$$(15)\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arsinh} x + C = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C;$$

$$(16)\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C = \begin{cases} \operatorname{arcosh} x + C \ \text{ für } x > 1, \\ -\operatorname{arcosh}(-x) + C \\ \qquad\qquad \text{für } x < -1; \end{cases}$$

$$(17)\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C = \begin{cases} \operatorname{artanh} x + C \ \text{ für } |x| < 1, \\ \operatorname{arcoth} x + C \ \text{ für } |x| > 1. \end{cases}$$

Die zu lösenden Integrale werden nur in wenigen Fällen die Form eines Grundintegrals haben. Da jedoch alle Lösungsverfahren letztlich auf sie zurückführen, muß man die Grundintegrale gut kennen, bevor man an die Lösung komplizierter Aufgaben herangeht.

! Gehen Sie im Programm nicht eher weiter, bevor Sie die Grundintegrale sicher beherrschen!

Wir empfehlen dazu folgende Übung:

1. Prägen Sie sich jeweils vier oder fünf Grundintegrale gründlich ein!
2. Decken Sie die Lösungen dieser Integrale mit einem Blatt zu und fertigen Sie davon eine Niederschrift an!
3. Setzen Sie dieses Verfahren solange fort, bis Sie alle Grundintegrale fehlerfrei niedergeschrieben haben!

! Vergleichen Sie und nehmen Sie anhand des angegebenen Bewertungsmaßstabes selbst eine Beurteilung Ihrer Leistungen vor!

1. Aufgabe: Partielle Integration

$$u = \ln x \qquad v' = x^{10}$$

$$u' = \frac{1}{x} \qquad v = \frac{1}{11} x^{11} \qquad \text{1 Pkt.}$$

$$\int x^{10} \ln x \, dx = \frac{1}{11} x^{11} \ln x - \int \frac{1}{11} x^{11} \cdot \frac{1}{x} \, dx \qquad \text{1 Pkt.}$$

$$= \frac{1}{11} x^{11} \ln x - \frac{1}{11} \int x^{10} \, dx$$

$$= \frac{1}{11} x^{11} \ln x - \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{11} x^{11} + C \qquad \text{1 Pkt.}$$

$$= \frac{1}{11} x^{11} \left(\ln x - \frac{1}{11} \right) + C.$$

3 Pkte.

---

2. Aufgabe: Mit Hilfe elementarer Integrationsregeln Zurückführung auf Grundintegrale.

$$\int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x^2} \, dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}}}{x^2} \, dx$$

$$= \int \left(x^{-\frac{3}{2}} - x^{-\frac{5}{3}} \right) dx \qquad \text{1 Pkt.}$$

$$= \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} - \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} + C \qquad \text{1 Pkt.}$$

$$= -2x^{-\frac{1}{2}} + \tfrac{3}{2} x^{-\frac{2}{3}} + C$$

$$= \frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{\sqrt{x}} + C. \qquad \text{1 Pkt.}$$

3 Pkte.

Da die Integration die Umkehrung der Differentiation ist, erhält man auch aus den Differentiationsregeln entsprechende Integrationsregeln. An dieser Stelle sollen zunächst zwei *einfache* **allgemeine Integrationsregeln** für unbestimmte Integrale genannt werden.

(1) Ist c eine Konstante, so gilt

$$\int \boldsymbol{c \cdot f(x)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c} \int \boldsymbol{f(x)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x};$$

in Worten: Ein konstanter Faktor darf vor das Integralzeichen gesetzt werden.

(2) Es ist stets

$$\int [\boldsymbol{f(x)} \pm \boldsymbol{g(x)}]\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int \boldsymbol{f(x)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \pm \int \boldsymbol{g(x)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x};$$

in Worten: Eine Summe darf gliedweise integriert werden.

Mit Hilfe der Grundintegrale und dieser beiden Integrationsregeln sind wir bereits in der Lage, für eine Reihe von stetigen Funktionen unbestimmte Integrale zu ermitteln.

Beispiele:

1. $\int 6x^4\,\mathrm{d}x$.

   Indem man den konstanten Faktor 6 vor das Integralzeichen schreibt, ist die Aufgabe zurückgeführt auf das Grundintegral $\int x^n\,\mathrm{d}x$:

   $$\int 6x^4\,\mathrm{d}x = 6 \int x^4\,\mathrm{d}x = \tfrac{6}{5}x^5 + C.$$

24. $\ln|x + 1| - \frac{x + 2}{2(x^2 + 2x + 3)} - \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \frac{x + 1}{\sqrt{2}} + C;$

25. $x \sin x + \cos x + C;$

26. $x((\ln x)^2 - 2 \ln x + 2) + C;$

27. $\arcsin(\ln x) + C;$

28. $-\frac{5}{2} \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4x + 20) - \frac{9}{4} \arctan \frac{x + 2}{4} + C;$

29. $(x - 1) \ln|1 - x| - x + C;$

30. $\frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \sin bx - b \cos bx) + C.$

Wir sind damit am Ende des Programms angekommen.

Sie haben nun Gelegenheit, Ihre an Hand des Programms erworbenen Fähigkeiten im Integrieren selbst noch einmal zu überprüfen.

Kontrollarbeit

Lösen Sie folgende Integrale!

1. $\int x^{10} \ln x \, dx \quad (x > 0);$

2. $\int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x^2} dx \quad (x > 0);$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} \quad (x > 0);$

4. $\int \frac{6x^3 + 4x + 1}{x^4 + x^2} dx \quad (x \neq 0);$

5. $\int \frac{x^2 \, dx}{\cos^2(x^3 + 1)} \quad (\cos(x^3 + 1) \neq 0).$

Die vollständige Lösung aller fünf Aufgaben mit Punktbewertung und einer Zensurenskala finden Sie auf den folgenden Seiten.

! Blättern Sie erst dann weiter, wenn Sie die Aufgaben wirklich gelöst haben!

2. $\int \left(e^x + \sqrt{x}\right) dx \quad (x > 0)$.

Die Anwendung der Regel (2) führt auf zwei Integrale, von denen das erste sofort als Grundintegral erkannt wird. Das zweite formt man noch um, indem man die Wurzel als Potenz mit gebrochenem Exponenten schreibt:

$$\int \left(e^x + \sqrt{x}\right) dx = \int e^x\,dx + \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = e^x + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = e^x + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C.$$

3. $\int \frac{3 - 5x + 7x^3}{x^4}\,dx \quad (x \neq 0)$.

Der Integrand wird zunächst umgeformt, indem man den Zähler gliedweise durch x^4 dividiert. Die Anwendung der Regeln (1) u. (2) führt auf Grundintegrale:

$$\int \frac{3 - 5x + 7x^3}{x^4}\,dx$$

$$= \int \left(\frac{3}{x^4} - \frac{5}{x^3} + \frac{7}{x}\right) dx = 3\int x^{-4}\,dx - 5\int x^{-3}\,dx + 7\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{3x^{-3}}{-3} - \frac{5x^{-2}}{-2} + 7\ln|x| + C = -\frac{1}{x^3} + \frac{5}{2x^2} + 7\ln|x| + C.$$

Sie sollen nun selbst einige Integrale ermitteln. Während Sie bei den ersten beiden Aufgaben eine ausführliche Lösung vorfinden, wird bei den nachfolgenden nur noch das Ergebnis genannt. Sollten Sie bei diesen nicht gleich die richtige Lösung finden, dann wird Ihnen das sicher gelingen, wenn Sie sich in den Lösungshinweisen informieren.

Lösen Sie folgende Integrale!

1. a) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} \quad (x > 0)$; b) $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\sin^2 x \cos^2 x} \quad \left(x \neq k\frac{\pi}{2}\right.$ mit $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$;

2. a) $\int (x - x^3)\,dx$; b) $\int \left(2 + \sqrt{x}\right)^2 dx \quad (x > 0)$;

c) $\int \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}}\,dx \quad (x > 0)$; d) $\int \left(2x^3 - 3\sin x + 5\sqrt{x}\right) dx \quad (x > 0)$.

Lösungen der Übungsaufgaben

1. $\frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| + C;$
2. $-\frac{1}{6}\sqrt{(3-4x)^3} + C;$
3. $\frac{1}{5a}\ln|5ax + 4b| + C;$
4. $\frac{1}{5}\left(x - \frac{1}{x}\right) + C;$
5. $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x \sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + C;$
6. $-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-4x}\left(x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{3}{32}\right) + C;$
7. $-3\ln|x| + 3\ln|x-1| + \frac{3}{x} + \frac{3}{2x^2} + \frac{2}{3x^3} + C;$
8. $\frac{1}{4}\ln|x - \frac{1}{2}| - \frac{1}{8}\ln|x + \frac{3}{2}| + \frac{3}{8}\ln|x - \frac{5}{2}| + C;$
9. $\frac{1}{12}\arctan\frac{3x}{4} + C;$
10. $-\frac{1}{12}\ln|2-3x| + \frac{1}{12}\ln|2+3x| + C;$
11. $3\sin x + 2\cos x + 3\mathrm{e}^x + C;$
12. $\frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{9}\sqrt[4]{x} - \frac{3}{13}x\sqrt[12]{x}\right) + C;$
13. $\frac{4}{3}\sqrt{(1+\sqrt{x})^3} + C;$
14. $-\frac{1}{3}\ln|\cos 3y| + C;$
15. $\frac{\ln^2|x+1|}{2} + C;$
16. $-\frac{1}{x}(\ln x + 1) + C;$
17. $\frac{1}{2}(\arcsin x)^2 + C;$
18. $\ln|\arcsin x| + C;$
19. $2\sqrt{\tan x - 1} + C;$
20. $-\frac{2}{x} + \frac{2}{x+1} + \ln|x+1| + C;$
21. $\cos\frac{1}{x} + C;$
22. $3\ln|x| + 2\ln(x^2 - 6x + 10) + 11\arctan(x-3) + C;$
23. $(x+1)\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + C;$

L 7

1. a) Entscheidende Umformung:

Der Integrand wird als Potenz mit negativem Exponenten geschrieben:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2}} = \int x^{-\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = 3\sqrt[3]{x} + C.$$

Hinweis: Potenzgesetze werden Sie beim Integrieren häufig anzuwenden haben. Falls Sie sich dabei nicht sicher fühlen, empfehlen wir dringend eine Wiederholung dieser Gesetze (z. B. im Lehrbuch der Mathematik für die Klasse 9).

b) Umformung:

Wegen $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ läßt sich das gegebene Integral aufspalten in zwei Grundintegrale:

$$\int \frac{\cos 2x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = -(\cot x + \tan x) + C.$$

2. a) $\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + C.$

Wenn richtig: ⟶ Aufgabe 2. b)

Wenn falsch: ⟶ H 2 a), Seite 63

b) $4x + \frac{8}{3}x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} + C.$

Richtig: ⟶ Aufgabe 2. c)

Falsch: ⟶ H 2 b), Seite 63

c) $2\sqrt{x}\left(\frac{x^2}{5} - \frac{x}{3} + 1\right) + C.$

Richtig: ⟶ Aufgabe 2. d)

Falsch: ⟶ H 2 c), Seite 63

d) $\frac{1}{2}x^4 + 3\cos x + \frac{10}{3}x\sqrt{x} + C.$

Richtig: ⟶ 8

Falsch: ⟶ H 2 d), Seite 63

Übungsaufgaben

1. $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 \mathrm{d}x;$

2. $\int \sqrt{3 - 4x}\, \mathrm{d}x;$

3. $\int \frac{\mathrm{d}x}{5ax + 4b};$

4. $\int \frac{x^3 + x}{5x^3} \mathrm{d}x;$

5. $\int x \cos^2 x \,\mathrm{d}x;$

6. $\int x^3 \mathrm{e}^{-4x} \mathrm{d}x;$

7. $\int \frac{x + 2}{x^4 (x - 1)} \mathrm{d}x;$

8. $\int \frac{4x^2 + 4x - 11}{(2x - 1)(2x + 3)(2x - 5)} \mathrm{d}x;$

9. $\int \frac{\mathrm{d}x}{9x^2 + 16};$

10. $\int \frac{\mathrm{d}x}{4 - 9x^2};$

11. $\int (3 \cos x - 2 \sin x + 3\mathrm{e}^x)\, \mathrm{d}x;$

12. $\int \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt[3]{x}}{6 \sqrt[4]{x}} \mathrm{d}x;$

13. $\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x;$

14. $\int \frac{\mathrm{d}y}{\cot 3y};$

15. $\int \frac{\ln (x + 1)}{x + 1} \mathrm{d}x;$

16. $\int \frac{\ln x}{x^2} \mathrm{d}x;$

17. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} \mathrm{d}x;$

18. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2} \arcsin x};$

19. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x \sqrt{\tan x - 1}};$

20. $\int \frac{x^3 + x^2 + 4x + 2}{x^4 + 2x^3 + x^2} \mathrm{d}x;$

21. $\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \mathrm{d}x;$

22. $\int \frac{7x^2 - 19x + 30}{x^3 - 6x^2 + 10x} \mathrm{d}x;$

23. $\int \arctan \sqrt{x}\, \mathrm{d}x;$

24. $\int \frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2 (x + 1)} \mathrm{d}x;$

25. $\int x \cos x \,\mathrm{d}x;$

26. $\int (\ln x)^2 \mathrm{d}x;$

27. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x \sqrt{1 - (\ln x)^2}};$

28. $\int \frac{6x^3 + 13x^2 + 101x - 7}{(x^2 + 1)(x^2 + 4x + 20)} \mathrm{d}x;$

29. $\int \ln (1 - x)\, \mathrm{d}x;$

30. $\int \mathrm{e}^{ax} \sin bx \,\mathrm{d}x.$

C. Integration durch Substitution

Bei den bisher betrachteten Integralen gelangte man durch einfache Umformungen zu Grundintegralen. So leicht wie in diesen Beispielen ist die Zurückführung auf Grundintegrale nicht immer möglich.
Deshalb wollen wir uns in den folgenden Abschnitten mit Verfahren beschäftigen, mit deren Hilfe man Integrale, die nicht zu den Grundintegralen gehören, auf solche zurückführen kann. Dabei wird häufig ein Verfahren anzuwenden sein, das sich aus der Kettenregel der Differentialrechnung ergibt: die **Methode der Integration durch Substitution.**
Sie wird in zwei Formen angewendet.

Anwendung der Integration durch Substitution in der ersten Form

Grundlage dafür ist folgender Sachverhalt:

Ist die Beziehung $\int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + C$ bekannt,

dann gilt $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = F(\varphi(x)) + C$.

Mit anderen Worten:

Ist $F(t)$ eine Stammfunktion von $f(t)$, dann ist $F(\varphi(x))$ eine Stammfunktion von $f(\varphi(x))\varphi'(x)$.

Dabei sind $f(t)$, $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ stetige Funktionen.

Beispiel:

Da $\sin t$ eine Stammfunktion von $\cos t$ ist, ist $\sin x^2$ eine Stammfunktion von $(\cos x^2)\,2x$.

Oder: Da $\int \cos t\,\mathrm{d}t = \sin t + C$,

gilt $\int (\cos x^2)\,2x\,\mathrm{d}x = \sin x^2 + C$.

In diesem Falle ist

$f(t) = \cos t$, $\quad F(t) = \sin t$,

$f(\varphi(x)) = \cos x^2$, $\quad F(\varphi(x)) = \sin x^2$,

$\varphi(x) = x^2$, $\quad \varphi'(x) = 2x$.

Überprüfen Sie die Richtigkeit des Beispiels durch Differenzieren! Beachten Sie, daß man dabei die Kettenregel anwenden muß!

1. *$n(x)$ hat nur reelle einfache, d.h. voneinander verschiedene Wurzeln.*
2. *$n(x)$ hat nur reelle Wurzeln, doch treten unter ihnen auch mehrfache Wurzeln auf.*
3. *$n(x)$ besitzt einfache komplexe Wurzeln (außerdem können auch reelle Wurzeln auftreten).*
4. *$n(x)$ besitzt mehrfache komplexe Wurzeln (außerdem können reelle und einfache komplexe Wurzeln auftreten).*

Je nach der Beschaffenheit dieser Wurzeln kann man für $\frac{z(x)}{n(x)}$ den Ansatz zur Zerlegung in Partialbrüche angeben (vgl. 55 bis 58 und Flußdiagramm 79).

Zur Bestimmung der Koeffizienten gibt es verschiedene Verfahren. Im Programm wird die *Methode der unbestimmten Koeffizienten (Methode des Koeffizientenvergleichs)* erläutert.

F. Ist der **Integrand eine rationale Funktion von sin x, cos x, tan x, cot x,** so wird durch die Substitution

$$\boxed{\tan\frac{x}{2} = t \quad (-\pi < x < \pi)}$$

dieser Integrand in eine rationale Funktion der neuen Variablen t übergeführt.

Wir haben bereits mehrfach angedeutet, daß man eine gewisse Sicherheit im Integrieren erst durch vieles Üben erlangt. Insbesondere wird sich bei der Anwendung der Substitutionsmethode zeigen, daß Sie mitunter mehrere Versuche machen müssen, um zum Erfolg zu kommen. Oftmals wird sich auch das gleiche Integral auf verschiedenen Wegen und mittels unterschiedlicher Verfahren lösen lassen.

Auf den folgenden Seiten sind noch eine Reihe von Übungsaufgaben mit Lösungen angegeben. Wir empfehlen Ihnen dringend, noch viele davon zu lösen. Dabei wird sich zeigen, wie sicher Sie die einzelnen Verfahren bereits beherrschen.

Natürlich können Sie bei auftretenden Schwierigkeiten jederzeit an den entsprechenden Stellen im Programm nachschlagen. Für ein tieferes Eindringen in die Technik des Integrierens müssen wir auf die zahlreich vorhandene Fachliteratur verweisen, die z.T. auch für die Erarbeitung dieses Programmes als Grundlage diente.

Informieren Sie sich dazu bitte im Literaturverzeichnis am Anfang des Programmes (Seite 6).

! Überprüfen Sie Ihr Wissen auf jeden Fall an der Kontrollarbeit (Seite 128)!

L 8

$$(\sin x^2 + C)' = \cos x^2 \cdot 2x$$

9

Ist also ein Integral der besonderen Form $\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$ (der Integrand ist das Produkt aus einer mittelbaren Funktion $f(\varphi(x))$ und der Ableitung $\varphi'(x)$ der inneren Funktion) zu berechnen, so kann man statt dessen das Integral

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + C$$

berechnen und nach Ausführung dieser Integration $t = \varphi(x)$ setzen. Man schreibt dafür meist einfach:

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{mit} \quad \varphi(x) = t \,. \qquad (^*)$$

Bei der Anwendung der Formel (*) wird deutlich, wie nützlich die Leibnizsche Schreibweise für die Ableitung $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \varphi'(x)$ ist und warum man dieses Integrationsverfahren Substitutionsmethode (lat. substituere = an die Stelle setzen) nennt.

Beachten Sie: Man kann mit den Integrationssymbolen $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}t$ hier so rechnen, als ob sie Zahlen wären und $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$ ein Quotient.

Bei der Lösung eines Integrals der Form

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

geht man also folgendermaßen vor:

1. Schritt: Man ersetzt $\varphi(x)$ durch t:

$$\varphi(x) = t.$$

2. Schritt: An die Stelle von $\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$ tritt $\mathrm{d}t$, d.h. man setzt formal

$$\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t.$$

Welches Integral tritt nach Ausführung der Substitution an die Stelle von $\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$?

Also: $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{mit} \quad x = \varphi(t), \quad t = \psi(x)$.

($t = \psi(x)$ ist die Umkehrfunktion von $x = \varphi(t)$).

Übersicht über einige wichtige Substitutionen:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2} \qquad \text{Substitution:} \qquad \boxed{x = at}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \qquad \text{Substitution:} \qquad \boxed{x = at}$$

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{Substitution:} \qquad \boxed{x = a \sinh t}$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{Substitution:} \qquad \boxed{x = a \sin t}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \qquad \text{Substitution:} \qquad \boxed{x = a \sinh t}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \qquad \text{Substitution:} \qquad \boxed{x = a \cosh t}\,.$$

D. Ein weiteres Verfahren zur Integration ist die **partielle Integration**. Die grundlegende Formel ist

$$\int u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\,v(x) - \int u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Sie findet insbesondere Anwendung bei folgenden Klassen von Funktionen:

$$\int x^k \sin bx\,\mathrm{d}x, \qquad \int x^k \cos bx\,\mathrm{d}x,$$

$$\int x^k \ln^m x\,\mathrm{d}x \qquad (x > 0,\ m = 0, 1, 2 \ldots),$$

$$\int x^k e^{ax}\,\mathrm{d}x \quad \text{mit} \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

E. Die **Partialbruchzerlegung** ist ein Verfahren **zur Integration rationaler Funktionen.**

Da die Integration ganzer rationaler Funktionen ohne Schwierigkeiten möglich ist und unecht gebrochene rationale Funktionen sich stets in die Summe einer ganzen rationalen und einer echt gebrochenen rationalen Funktion zerlegen lassen, genügt es, sich auf die Integration echt gebrochener rationaler Funktionen zu beschränken. Grundlage für die Integration dieser Funktionen ist die Tatsache, daß sich

jede echt gebrochene rationale Funktion $\frac{z(x)}{n(x)}$ *stets eindeutig als Summe endlich vieler Partialbrüche darstellen läßt.*

Die *Zerlegung in Partialbrüche* ist abhängig von den *Wurzeln des Nennerpolynoms* $n(x)$. Es können folgende vier Fälle auftreten:

L 9

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t$$

10

An Stelle des gegebenen Integrals $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$ hat man nun also das Integral $\int f(t)\,\mathrm{d}t$ zu berechnen.
Nach erfolgter Integration kehrt man wieder zur ursprünglichen Variablen zurück, indem man $t = \varphi(x)$ setzt.

Wir betrachten dazu ein

Beispiel:

$$\int \sin^3 x \cos x\,\mathrm{d}x\,.$$

Der Integrand hat die Form $f(\varphi(x))\varphi'(x)$, denn $\cos x$ ist die Ableitung der inneren Funktion $\sin x$.

$$\underbrace{(\underset{\varphi(x)}{\sin x})^3}_{f(\varphi(x))} \cdot \underset{\varphi'(x)}{\cos x}$$

Zur Lösung des Integrals nimmt man also folgende Substitution vor:

$$\sin x = t, \qquad \cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$

---

1. Führen Sie diese Substitution aus!
2. Lösen Sie das neuentstandene Integral!
3. Geben Sie die Lösung von $\int \sin^3 x \cos x\,\mathrm{d}x$ an, indem Sie die Variable t wieder durch $\varphi(x)$ ersetzen!

B. Integrationsformeln, die sich unmittelbar aus der Umkehrung der Differentiation einfacher elementarer Funktionen ergeben, heißen **Grundintegrale** (Übersicht unter 6).

Den Differentiationsregeln unmittelbar entsprechende allgemeine **Integrationsregeln** sind:

$$\int cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x \quad .$$

C. Die Kenntnis der Grundintegrale ist für die Lösung einer Integrationsaufgabe von großer Bedeutung.

Da ein vorgelegtes Integral in den seltensten Fällen die Form eines der Grundintegrale hat, besteht eine wesentliche Aufgabe der Integralrechnung darin, Mittel und Wege anzugeben, die eine Zurückführung auf Grundintegrale ermöglichen.

Ein häufig anzuwendendes Verfahren ist die **Methode der Integration durch Substitution.**

Sie wird in zwei Formen angewendet.

a) Hat der Integrand die besondere Form $f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$ oder er kann darauf zurückgeführt werden, dann führt die Substitution $\varphi(x) = t$ zu einer Vereinfachung des Integranden. Neben $\varphi(x) = t$ hat man noch $\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$ durch $\mathrm{d}t$ zu ersetzen.

Man schreibt meist einfach

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{mit} \quad \varphi(x) = t \quad .$$

Der Integrand läßt sich immer dann in der Form $f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$ darstellen, wenn $\varphi(x)$ eine lineare Funktion $\varphi(x) = ax + b$ mit $a \neq 0$ ist.

Die Substitution $\boxed{\varphi(x) = ax + b}$ bezeichnet man als „*lineare Substitution*".

$$\textit{Ist} \quad \int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + C, \textit{ so gilt}$$

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\,F\,(ax+b) + C, \quad a \neq 0 \quad .$$

Ein Sonderfall des Integrals $\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$ liegt vor, wenn der Integrand die Form $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ mit $\varphi(x) \neq 0$ hat.

Es ist

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|\varphi(x)| + C, \quad (\varphi(x) \neq 0) \quad .$$

b) Soll ein Integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ berechnet werden, dann ist es auch möglich, im Integranden statt x die Funktion $x = \varphi(t)$ der neuen Variablen t einzusetzen.

Wegen $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ muß außerdem noch $\mathrm{d}x$ durch $\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ ersetzt werden.

L 10

1. $\int \sin^3 x \cos x \, dx = \int t^3 \, dt;$

2. $\int t^3 \, dt = \frac{1}{4}t^4 + C;$

3. $\int \sin^3 x \cos x \, dx = \frac{1}{4} \sin^4 x + C.$

Wir fassen zusammen:

Ist ein Integral in der besonderen Form

$$\int f(\varphi(x)) \, \varphi'(x) \, dx$$

gegeben, so führt die Substitution $\varphi(x) = t$ in jedem Falle zu einer Vereinfachung des Integranden.

Wie erkennt man nun, ob der Integrand die Form $f(\varphi(x)) \, \varphi'(x)$ hat?

Wir betrachten dazu die beiden Integrale

1. $\int \sqrt[3]{\sin^2 x} \cos x \, dx$ und 2. $\int e^x \cos x \, dx.$

Der Integrand ist in beiden Fällen ein Produkt, und beide Male tritt auch der Faktor $\cos x$ auf. Während beim zweiten Integral der Faktor $\cos x$ nicht in der gewünschten Beziehung zum übrigen Integranden steht, erkennt man, daß beim ersten Integral eine Funktion von $\sin x$ auftritt $\left(\sqrt[3]{\sin^2 x}\right)$ und daß $\cos x$ die Ableitung von $\sin x$ ist.

Im 1. Fall hat also der Integrand die Form $f(\varphi(x))\varphi'(x)$, im 2. Fall nicht.

Überlegen Sie, welche Substitution den ersten Integranden vereinfacht, und führen Sie diese Substitution aus!

L 96

$$\tan\frac{x}{2} + C \quad (x \neq (2k+1)\,\pi \text{ und } k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

Richtig: ————▶ Lesen Sie die Zusammenfassung aufmerksam!

Falsch: ————▶ H 56, Seite 136

Zusammenfassung

A. Das Programm gibt eine Einführung in die Technik des Integrierens, d.h. zum Lösen folgender Aufgabenstellung:

Gegeben ist eine Funktion $f(x)$,

gesucht wird eine Funktion, deren erste Ableitung gleich der gegebenen Funktion $f(x)$ ist.

Ist $y = f(x)$ eine reelle und stetige Funktion im Intervall (a, b), dann heißt jede dort definierte reelle Funktion $F(x)$, deren Ableitung gleich $f(x)$ ist, **Stammfunktion** von $f(x)$ in diesem Intervall.

Ist die Funktion $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ im Intervall (a, b), dann ist auch die Funktion $F(x) + C$, wobei C eine beliebige Konstante ist, eine Stammfunktion von $f(x)$.

Die *Menge aller Stammfunktionen* der stetigen Funktion $f(x)$ nennt man das **unbestimmte Integral** von $f(x)$ und bezeichnet es mit dem Symbol $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, also

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C\,.$$

Die Ermittlung einer Stammfunktion einer gegebenen Funktion $f(x)$ bezeichnet man als **Integration** der Funktion $f(x)$.

Zu jeder im Intervall (a, b) stetigen Funktion $f(x)$ existiert stets eine Stammfunktion (und damit auch das unbestimmte Integral).

Im Unterschied zur Differentialrechnung gibt es in der Integralrechnung kein System von Regeln, mit Hilfe derer man zu einer gegebenen Funktion eine Stammfunktion finden kann.

Außerdem haben schon relativ einfache Funktionen wie e^{x^2}, $\frac{e^x}{x}$, $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{1}{\ln x}$ keine elementaren Stammfunktionen.

L 11

$$\varphi(x) = \sin x = t,$$

$$\int \sqrt[3]{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Richtig: ———▶ 12

Falsch: ———▶ H 3, Seite 64

12

Sie werden zustimmen, daß man um so leichter erkennt, ob der Integrand die Form $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ hat oder nicht, je besser man die Technik des Differenzierens und besonders die Kettenregel beherrscht.

Unsere Aufgabe ging durch die Substitution $\sin x = t$ über in ein Grundintegral. Anstelle des gegebenen Integrals $\int \sqrt[3]{\sin^2 x}\cos x\,\mathrm{d}x$ haben wir nun das Integral $\int \sqrt[3]{t^2}\,\mathrm{d}t$ zu lösen und danach für $t = \sin x$ zu setzen.

Führen Sie die Lösung zu Ende!

L 95

$$\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C \quad (-\pi < x < \pi;\ \text{allgemeiner gilt } x \neq k\pi).$$

Richtig: ——————▸ 96

Falsch: ——————▸ H 55, Seite 136

96

Als weiteres Beispiel betrachten wir das Integral

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \cos x}$$

Auch hier läßt sich der Integrand mittels der Substitution $\tan\frac{x}{2} = t$ in eine rationale Funktion der neuen Variablen t überführen.

Lösen Sie das Integral $\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \cos x}$.

L 12

$\frac{3}{5}\sqrt[3]{\sin^5 x} + C.$

Richtig: ——→ 13

Falsch: ——→ H 4, Seite 64

13

Es ist also wichtig, den Integranden genau zu analysieren und nicht nur oberflächlich zu betrachten. Obwohl es keine allgemeingültige Regel für das Auffinden einer geeigneten Substitution gibt, haben wir erkannt, daß die Angabe einer Substitution sofort möglich ist, wenn der Integrand die Form

$$f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$$

hat. Es lohnt sich also, den Integranden daraufhin zu untersuchen.

Es sind folgende vier Integrale gegeben:

a) $\int \sin(3x+5)\cdot 3\,\mathrm{d}x;$ b) $\int (\ln x)^3 \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad (x>0);$

c) $\int e^x \sin x\,\mathrm{d}x;$ d) $\int \sqrt{3x^2+4}\cdot 6x\,\mathrm{d}x.$

1. Stellen Sie fest, in welchem der vier Beispiele der Integrand die Form $f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$ hat, wo also der Integrand das Produkt aus einer mittelbaren Funktion und der Ableitung der inneren Funktion darstellt!

2. Nehmen Sie bei den in Frage kommenden Integralen die Substitutionen vor, die die Integranden vereinfachen!
(Eine vollständige Lösung der Integrale ist noch nicht verlangt.)

L 94

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}\,; \qquad \cot x = \frac{1-t^2}{2t}\,.$$

95

Aus der Substitution $\tan\frac{x}{2} = t$ ergeben sich weiter folgende Beziehungen:

$$\tan\frac{x}{2} = t\,, \qquad x = 2\arctan t\,, \qquad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}\,.$$

Damit sind wir nun in der Lage, Integrale zu lösen, bei denen der Integrand eine rationale Funktion von $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ und $\cot x$ ist.

Lösen Sie das Integral

$$\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$$

mit Hilfe der Substitution $\tan\frac{x}{2} = t$.

L 13

1. Aufgabe: a, b, d.

Richtig: ⟶ 2. Aufgabe

Falsch: ⟶ H 5, Seite 64

2. Aufgabe:

a) $\int \sin t \, dt$; b) $\int t^3 \, dt$; d) $\int \sqrt{t} \, dt$.

Richtig: ⟶ 14

Falsch: ⟶ H 6, Seite 64

14

Wir sehen, daß die vorgenommene Substitution in jedem Fall zu einer Vereinfachung der Integrale führte. Die neuentstandenen Integrale sind Grundintegrale, und ihre Lösung kann ohne Schwierigkeiten erfolgen.

Führen Sie die Lösung der Aufgaben a, b und d von Lehreinheit 13 zu Ende!

L 93

$$\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Richtig: ⟶ 94

Falsch: ⟶ H 54, Seite 136

94

$\tan x$ und $\cot x$ lassen sich unter Beachtung der elementaren Beziehungen $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ bzw. $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ nun ebenfalls leicht durch t ausdrücken.

Drücken Sie $\tan x$ und $\cot x$ durch t aus!

L 14

a) $\int \sin(3x+5) \cdot 3\,\mathrm{d}x = -\cos(3x+5) + C;$

b) $\int (\ln x)^3 \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(\ln x)^4 + C;$

d) $\int \sqrt{3x^2+4} \cdot 6x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\sqrt{(3x^2+4)^3} + C.$

Richtig: → 15

Falsch: → H 7, Seite 64

15

Die zuletzt gelösten Aufgaben machen noch einmal deutlich:

> Hat der Integrand die Form $f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$, dann führt die Substitution $\varphi(x) = t$ zu einer Vereinfachung des Integranden.

Anders ausgedrückt:

Ist der Integrand das Produkt aus einer mittelbaren Funktion und der Ableitung der inneren Funktion, so setzt man die innere Funktion gleich einer neuen Variablen t. Natürlich muß dann auch mit Hilfe der Beziehung

$$\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$

$\mathrm{d}x$ durch $\mathrm{d}t$ ersetzt werden.

Lösen Sie dazu noch folgende Aufgaben!

1. $\int (\sin x)^5 \cos x\,\mathrm{d}x;$ 2. $\int \frac{1}{(5x^2+6x)^3}(10x+6)\,\mathrm{d}x \quad \left(x \neq 0, x \neq -\frac{6}{5}\right);$

3. $\int \frac{3x^2}{\sqrt{8+x^3}}\,\mathrm{d}x \quad (x > -2);$ 4. $\int \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x \quad \left(x \neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \text{ mit } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right).$

L 92

$$\ln \frac{x^2+x+1}{(x+1)^2} - \frac{2x+5}{x^2+x+1} - 4\sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C \quad (x \neq -1).$$

F. Integrale der Form $\int R(\sin x;\ \cos x;\ \tan x;\ \cot x)\,\mathrm{d}x$

93

Nachdem wir gelernt haben, wie man rationale Funktionen integriert, soll nun noch eine Substitution betrachtet werden, die auf rationale Integranden führt.
$R(\sin x;\ \cos x;\ \tan x;\ \cot x)$ soll bedeuten: der Integrand ist eine rationale Funktion von $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ oder $\cot x$.

Beispiel:

$$\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Der Integrand ist eine rationale Funktion von $\sin x$.

In solchen Fällen wird der Integrand durch die Substitution

$$\boxed{\tan\frac{x}{2} = t\ (-\pi < x < \pi)}$$

in eine rationale Funktion der neuen Variablen t übergeführt. Dazu ist es notwendig, die Funktionen $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ und $\cot x$ durch $\tan\frac{x}{2}$ und damit auch durch t auszudrücken. Für $\sin x$ ist dafür folgende Umformung nötig:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}\,.$$

Prägen Sie sich die Umformung von $\sin x$ gut ein und drücken Sie unter Verwendung der Beziehung

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$$

$\cos x$ durch t aus!

L 15

1. $\frac{1}{6}(\sin x)^6 + C$;　　2. $\frac{-1}{2(5x^2 + 6x)^2} + C$;

3. $2\sqrt{8 + x^3} + C$;　　4. $\frac{-1}{1 + \sin x} + C$.

Richtig: ——————▶ 16

Falsch: ——————▶ H 8

16

Oft hat der gegebene Integrand zwar nicht die Form $f(\varphi(x))\varphi'(x)$, kann aber durch „*Erweitern*“ mit einem konstanten Faktor auf diese Form gebracht werden. Wir betrachten dazu ein

Beispiel:

$$\int e^{-x^2}\, x \, dx.$$

Man erweitert mit dem Faktor (-2) und erhält

$$-\tfrac{1}{2}\int \underbrace{e^{\underbrace{-x^2}_{\varphi(x)}}}_{f(\varphi(x))} \cdot \underbrace{(-2x)}_{\cdot\,\varphi'(x)}\, dx.$$

Jetzt hat der Integrand die Form $f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$, denn $(-2x)$ ist die Ableitung der inneren Funktion $(-x^2)$.

! Lesen Sie nicht oberflächlich über die Zeilen hin, sondern durchdenken Sie jeweils den Sachverhalt!

Führen Sie die Lösung der Beispielaufgabe zu Ende!

L 91

$$\int \frac{-3x^3 + x - 4}{(x + 1)\,(x^2 + x + 1)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= -2\int \frac{\mathrm{d}x}{x + 1} + \int \frac{2x - 3}{x^2 + x + 1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{8x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Richtig: ——————→ 92

Falsch: ——————→ H 53, Seite 135

92

An die Stelle des gegebenen Integrals tritt also die neue Aufgabenstellung wie sie in L 91 angegeben ist.
Betrachten wir die einzelnen Integrale, so stellen wir fest, daß solche wie die ersten beiden bereits mehrfach im Programm auftraten. Ihre Lösung wird Ihnen also kaum Schwierigkeiten bereiten.
Das dritte Integral haben wir in den Lehreinheiten 71 bis 77 ausführlich besprochen. Sie können also die Lösung aus L 77 entnehmen. Damit sind wir in der Lage, das Ergebnis vollständig anzugeben.

Geben Sie die Lösung des Integrals

$$\int \frac{-3x^3 + x - 4}{(x + 1)\,(x^2 + x + 1)^2}\,\mathrm{d}x$$

an!

L 16

$$\int e^{-x^2} x \, dx = -\tfrac{1}{2} e^{-x^2} + C.$$

Richtig: ——→ 17

Falsch: ——→ H 9

17

Es sollen einige weitere Integrale betrachtet werden, bei denen der Integrand durch Erweitern mit einem konstanten Faktor auf die Form $f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$ gebracht werden kann.

Die Aufgaben werden Ihnen nicht schwerfallen, wenn Sie bis jetzt gründlich gelesen und alle Aufgaben selbständig gelöst haben.

---

1. Bringen Sie die Integranden durch Erweitern mit einem konstanten Faktor auf die Form $f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$!

   a) $\int \sqrt{x^2+1}\, x \, dx$; b) $\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{x^3+1}} \quad (x > -1)$;

   c) $\int \frac{dx}{5-2x} \quad \left(x \neq \frac{5}{2}\right)$; d) $\int \frac{3 \cos 2x \, dx}{(2 + 3 \sin 2x)^3} \quad \left(\sin 2x \neq -\frac{2}{3}\right)$.

2. Geben Sie die geeigneten Substitutionen an!

L 90

$$\ln|x-3| + \ln(x^2-2x+5) + \frac{7}{2}\arctan\frac{x-1}{2} + C \quad (x \neq 3).$$

Richtig: ——————▶ 91

Falsch: ——————▶ H 52, Seite 135

91

Betrachten wir ein weiteres Beispiel:

$$\int \frac{-3x^3+x-4}{(x+1)(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Aus den vorangegangenen Aufgaben ist Ihnen der Lösungsweg bekannt, d.h., Sie können wenigstens bis zur Zerlegung des gegebenen Integranden in Partialbrüche selbständig vorgehen. Sollten Sie bei irgendeinem Schritt Unklarheiten haben, dann informieren Sie sich an den entsprechenden Stellen im Programm.

Lösen Sie dieses Integral vorerst bis zur Zerlegung in Partialbrüche!

(Hat sich bei früheren Aufgaben herausgestellt, daß Sie die Lösung von Gleichungssystemen sicher beherrschen, dann können Sie die Koeffizienten gleich aus H 53 entnehmen.)

L 17

1. a) $\frac{1}{2}\int \sqrt{x^2+1}\,2x\,\mathrm{d}x;$ b) $\frac{1}{3}\int \frac{3x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+1}};$

c) $-\frac{1}{2}\int \frac{-2\mathrm{d}x}{5-2x};$ d) $\frac{1}{2}\int \frac{6\cos 2x\,\mathrm{d}x}{(2+3\sin 2x)^3}.$

2. Substitutionen:

a) $\varphi(x) = x^2 + 1 = t, \quad 2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t;$ b) $\varphi(x) = x^3 + 1 = t, 3x^2\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t;$

c) $\varphi(x) = 5 - 2x = t, \quad -2\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t;$ d) $\varphi(x) = 2 + 3\sin 2x = t,$

$6\cos 2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t.$

18

Führen wir die Substitutionen aus, so erkennen wir, daß die neuentstandenen Integrale gegenüber den gegebenen eine wesentliche Vereinfachung darstellen.

Das Auffinden einer geeigneten Substitution ist der entscheidende Schritt auf dem Wege zur Lösung.

Führen Sie die Lösung der obigen Aufgaben zu Ende!

L 89

$$\int \frac{2x + 5}{x^2 - 2x + 5}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 5}\,\mathrm{d}x + \int \frac{7}{x^2 - 2x + 5}\,\mathrm{d}x\,.$$

90

Damit sind wir nun in der Lage, das ursprünglich gegebene Integral

$$\int \frac{3x^2 - 3x - 10}{(x - 3)\,(x^2 - 2x + 5)}\,\mathrm{d}x$$

durch die Summe dreier Integrale zu ersetzen.

Während die Lösung der ersten beiden sofort angegeben werden kann, formt man das dritte so um, daß $x^2 - 2x$ zu einem ,,vollständigen Quadrat“ ergänzt wird.

Eine anschließende lineare Substitution führt auf ein Integral der Form $\int \frac{\mathrm{d}t}{a^2 + t^2}$, dessen Lösung in Lehreinheit 30 besprochen wurde.

Geben Sie die Lösung des Integrals

$$\int \frac{3x^2 - 3x - 10}{(x - 3)\,(x^2 - 2x + 5)}\,\mathrm{d}x$$

an!

L 18

a) $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+C;$ b) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}+C;$

c) $-\frac{1}{2}\ln|5-2x|+C;$ d) $\frac{-1}{4\,(2+3\sin 2x)^2}+C.$

Richtig: ⟶ 19

Falsch: ⟶ H 10

19

Der Integrand läßt sich immer dann in der Form $f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$ darstellen, wenn $\varphi(x)$ eine lineare Funktion ist, d.h. wenn $\varphi(x) = ax + b$ mit $a \neq 0$ ist.
Bei der in diesem Falle vorzunehmenden Substitution $\varphi(x) = ax + b = t$ spricht man dann von einer sogenannten „linearen Substitution“.

Ist $\int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + C,$

so gilt $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\,F\,(ax+b) + C, \quad a \neq 0$.

Leiten Sie die Beziehung

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\,F(ax+b) + C$$

her!

L 88

$$\begin{array}{c|l}
x^2 & A + M = 3 \\
x^1 & -2A - 3M + N = -3 \\
x^0 & 5A - 3N = -10 \\
\hline
\multicolumn{2}{c}{A = 1; \quad M = 2; \quad N = 5.}
\end{array}$$

An die Stelle des gegebenen Integrals tritt also die neue Aufgabenstellung **89**

$$\int \frac{dx}{x-3} + \int \frac{2x+5}{x^2-2x+5}\,dx\,.$$

Die Lösung des ersten Integrals kann ohne Schwierigkeiten angegeben werden.

Das zweite Integral zerlegt man so in die Summe zweier Integrale, daß eins die Form $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx$ hat. (Vergleichen Sie 64/65.)

Zerlegen Sie das Integral $\int \frac{2x+5}{x^2-2x+5}\,dx$ so in die Summe zweier Integrale, wie es soeben beschrieben wurde!

L 19

Erweiterung: $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\,a\,\mathrm{d}x.$

Substitution: $\varphi(x) = ax + b = t,$

$$a\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t.$$

Also: $\frac{1}{a}\int f(ax+b)\,a\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\,F(t) + C$

$$= \frac{1}{a}\,F\,(ax+b) + C.$$

20

Bei der Anwendung der Beziehung

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\,F\,(ax+b) + C$$

schreibt man die Substitution $\varphi(x) = ax + b = t$ nicht erst auf, sondern gibt sofort die Lösung an.

Beispiel:

$$\int \sin\,(3x+5)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\cos\,(3x+5) + C.$$

Geben Sie ohne weitere Zwischenschritte auf dem Wege zur Lösung sofort das Ergebnis der Integration an:

a) $\int \mathrm{e}^{4x+6}\,\mathrm{d}x;$ b) $\int (3x+4)^3\,\mathrm{d}x;$

c) $\int \frac{5}{2x-7}\,\mathrm{d}x \left(x \neq \frac{7}{2}\right);$ d) $\int \cos\,\left(\frac{x}{2} + 3\right)\mathrm{d}x;$

e) $\int \frac{2}{1+(3x)^2}\,\mathrm{d}x;$ f) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2\,(5x+3)}$ $\left(5x + 3 \neq (2k+1)\,\frac{\pi}{2}\right.$ mit $\left.k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right).$

L 87

$$\frac{3x^2 - 3x - 10}{(x - 3)(x^2 - 2x + 5)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{Mx + N}{x^2 - 2x + 5}.$$

88

Um die Partialbrüche endgültig angeben zu können, müssen A, M und N bestimmt werden. Zu diesem Zweck multipliziert man beide Seiten der Gleichung in L 87 mit $(x - 3)(x^2 - 2x + 5)$.

Zur Durchführung eines Koeffizientenvergleichs ordnet man die Koeffizienten nach gleichen Potenzen von x.

Bestimmen Sie A, M und N!

L 20

a) $\frac{1}{4}\,e^{4x+6} + C$;

b) $\frac{1}{12}\,(3x + 4)^4 + C$;

c) $\frac{5}{2}\ln|2x - 7| + C$;

d) $2\sin\left(\frac{x}{2} + 3\right) + C$;

e) $\frac{2}{3}\arctan 3x + C$;

f) $\frac{1}{5}\tan(5x + 3) + C$.

! Vergleichen Sie Ihre Lösungen mit den hier angegebenen, und korrigieren Sie sie, falls nötig!

21

In den bisher betrachteten Beispielen zur Integration durch Substitution hatte der Integrand entweder bereits die Form $f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$ oder konnte durch Erweitern mit einem konstanten Faktor leicht so dargestellt werden. Auch bei den folgenden Beispielen läßt sich der Integrand auf die Form $f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$ bringen, allerdings wird das Erkennen einer geeigneten Umformung davon abhängen, wie sicher man die Grundintegrale beherrscht. Wir betrachten dazu folgendes

Beispiel: $\int \frac{x\,dx}{1 + x^4}$.

Der Integrand hat zunächst nicht die Form $f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$. Wählt man $\varphi(x) = x^2$ als innere Funktion und erweitert den Integranden mit 2, dann ist mit $2x$ auch die Ableitung $\varphi'(x)$ dieser Funktion als Faktor enthalten.

$$\frac{x}{1 + x^4} = \frac{x}{1 + (x^2)^2} = \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{1}{1 + (\underset{\varphi(x)}{x^2})^2}\cdot 2x}_{f(\varphi(x))\,\cdot\,\varphi'(x)}.$$

Damit ist der Integrand in der Form $f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$ dargestellt.

Führen Sie die Lösung selbständig zu Ende!

L 86

$$n(x) = x^3 - 5x^2 + 11x - 15 = (x - 3)(x^2 - 2x + 5).$$

Richtig: ⟶ 87

Falsch: ⟶ H 51, Seite 135

87

Mit der Produktdarstellung des Nennerpolynoms ist ein bedeutender Schritt auf dem Wege zur Lösung des Integrals getan. Auch die weiteren Schritte unterscheiden sich nicht von denen bei der Lösung der vorhergehenden Aufgaben,

also:

Ansatz für die Zerlegung in Partialbrüche (Hinweise dazu unter 55 bis 58),

Bestimmung der Koeffizienten (Hinweise dazu unter 59 bis 62),

Integration der Partialbrüche (Hinweise dazu für unsere Aufgabe insbesondere ab 64).

Wollen Sie die Aufgabe selbständig lösen?

Ja ⟶ Lösen Sie das Integral und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit L 90! Fühlen Sie sich auch bei der Lösung von Gleichungssystemen schon sicher, dann können Sie die Koeffizienten gleich aus L 88 entnehmen.

Nein ⟶ Geben Sie den Ansatz für die Zerlegung in Partialbrüche an!

L 21

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{1}{2}\arctan x^2 + C$$

Richtig: ⟶ 22

Falsch: ⟶ H 11

22

Bei der Aufgabe

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-9x^2}} \quad \left(|x| < \frac{1}{3}\right)$$

bietet sich folgende Umformung an:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-9x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(3x)^2}}.$$

Setzen wir jetzt $3x = t$, so kommen wir zum Grundintegral

$$\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Natürlich werden wir hier – wie in den vorangegangenen Beispielen zur linearen Substitution – den Zwischenschritt nur in Gedanken ausführen und sofort die Lösung angeben.

1. Schreiben Sie die Lösung auf!

2. Lösen Sie in entsprechender Weise:

$$\text{a)} \int \frac{\mathrm{d}x}{1+4x^2}; \quad \text{b)} \int \frac{\mathrm{d}x}{1+bx^2}\ (b>0); \quad \text{c)} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-cx^2}} \quad \left(c>0,\ |x| < \frac{1}{\sqrt{c}}\right).$$

L 85

$$\frac{3}{2}\ln|x-2| - \frac{6}{x-2} - \frac{2}{(x-2)^2} - \frac{3}{2}\ln|x-4| + C$$

$$= \frac{2\,(5-3x)}{(x-2)^2} + 3\ln\sqrt{\left|\frac{x-2}{x-4}\right|} + C \quad (x \neq 2, x \neq 4).$$

Richtig: ——————▸ 86

Falsch: ——————▸ H 50, Seite 135

86

Wir haben jetzt Beispiele für Partialbruchzerlegungen betrachtet, bei denen das Nennerpolynom nur reelle Wurzeln besaß. Nehmen wir eine neue Aufgabe:

$$\int \frac{3x^2 - 3x - 10}{x^3 - 5x^2 + 11x - 15}\,dx\,.$$

Der Integrand ist eine echt gebrochene rationale Funktion und der Koeffizient der höchsten Potenz des Nennerpolynoms ist gleich 1.
Es sind nun die Wurzeln des Nennerpolynoms zu bestimmen, und
$x^3 - 5x^2 + 11x - 15$ ist als Produkt darzustellen.

Bestimmen Sie die Wurzeln des Nennerpolynoms und geben Sie die Produktdarstellung an!

L 22

1. $\frac{1}{3}\arcsin 3x + C.$

2. a) $\frac{1}{2}\arctan 2x + C;$ b) $\frac{1}{\sqrt{b}}\arctan \sqrt{b}\,x + C;$

   c) $\frac{1}{\sqrt{c}}\arcsin \sqrt{c}\,x + C.$

Richtig: ⟶ 23

Falsch: ⟶ H 12

23

Auch beim Integral $\int \sin^3 x\,dx$ läßt sich der Integrand auf die Form $f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$ bringen. Dazu setzen wir

$$\sin^3 x = \sin^2 x \cdot \sin x$$

und wenden auf $\sin^2 x$ die Beziehung

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

an.

Lösen Sie das Integral $\int \sin^3 x\,dx$ nach entsprechender Umformung des Integranden!

L 84

$$A_1 = \tfrac{3}{2}; \qquad A_2 = 6; \qquad A_3 = 4; \qquad B = -\tfrac{3}{2}.$$

Richtig: ——————▶ 85

Falsch: ——————▶ H 49, Seite 134

85

Nun kann die neue Aufgabenstellung für das Integral

$$\int \frac{3x^2 - 20x + 20}{(x-2)^3\,(x-4)}\,\mathrm{d}x$$

angegeben und die Integration der einzelnen Partialbrüche durchgeführt werden.

Führen Sie die Lösung des Integrals zu Ende!

L 23

$$\int \sin^3 x \, \mathrm{d}x = -\cos x + \tfrac{1}{3}\cos^3 x + C.$$

Richtig: ⟶ 24

Falsch: ⟶ H 13

24

Ein Sonderfall des Integrals

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

liegt offenbar dann vor, wenn der Integrand die Gestalt

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \quad (\varphi(x) \neq 0)$$

hat, d.h., wenn der Integrand ein Quotient ist, bei dem *im Zähler die Ableitung der Nennerfunktion* steht.

Beispiele:

a) $\displaystyle\int \frac{6x+5}{3x^2+5x+8}\,\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$.

Auch hier wird die Substitution

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= t \\ \varphi'(x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \end{aligned}$$

vorgenommen. Sie führt auf ein Grundintegral, dessen Lösung sofort angegeben werden kann.

Lösen Sie das Integral $\displaystyle\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,\mathrm{d}x \quad (\varphi(x) \neq 0)$!

L 83

$$\frac{3x^2 - 20x + 20}{(x-2)^3(x-4)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{(x-2)^3} + \frac{B}{x-4}.$$

84

Um die Partialbrüche angeben zu können, sind noch die Koeffizienten A_1, A_2, A_3 und B zu bestimmen.
Dazu ist ein Koeffizientenvergleich durchzuführen, also:

1) Multiplikation beider Seiten der Gleichung in L 83 mit $(x-2)^3(x-4)$.
2) Ordnen der Koeffizienten nach gleichen Potenzen von x.
3) Gleichsetzen der einander entsprechenden Koeffizienten und damit Aufstellung des Gleichungssystems.
4) Lösen des Gleichungssystems.

Bestimmen Sie A_1, A_2, A_3 und B durch Koeffizientenvergleich!
(Beachten Sie – falls erforderlich – die Anleitung unter 59 bis 62!)

L 24

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|\varphi(x)| + C.$$

Richtig: ⟶ 25

Falsch: ⟶ H 14

25

Fassen wir zusammen:

Das unbestimmte Integral eines Quotienten, bei dem im Zähler die Ableitung der Nennerfunktion steht, ist gleich der Summe aus dem natürlichen Logarithmus des absoluten Betrages der Nennerfunktion und einer Konstanten:

$$\int \frac{\boldsymbol{\varphi'(x)}}{\boldsymbol{\varphi(x)}}\,\mathbf{d}\boldsymbol{x} = \ln|\boldsymbol{\varphi(x)}| + \boldsymbol{C} \quad (\varphi(x) \neq 0).$$

Die Lösung der beiden Beispiele aus 24 (vorige Seite) kann demnach sofort angegeben werden:

a) $\int \frac{6x + 5}{3x^2 + 5x + 8}\,\mathrm{d}x = \ln|3x^2 + 5x + 8| + C;$

b) $\int \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x = \ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) + C.$

(Im letzten Beispiel sind die Klammern erlaubt, da $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} > 0$ ist.)

Lösen Sie die folgenden Integrale!

a) $\int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^2 - 1} \quad (|x| \neq 1);$

b) $\int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin x + 3};$

c) $\int \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{a + \mathrm{e}^x} \quad (\mathrm{e}^x \neq -a$, falls $a < 0);$

d) $\int \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 4}\,\mathrm{d}x.$

L 82

$$\frac{1}{6}\ln|x-2| + \frac{17}{6}\ln|x+4| + C \quad (x \neq 2, x \neq -4).$$

Richtig: ——————▸ 83

Falsch: ——————▸ H 48, Seite 134

83

Häufig kommt es vor, daß der Nenner des Integranden bereits in Produktdarstellung gegeben ist, z.B. bei der Aufgabe

$$\int \frac{3x^2 - 20x + 20}{(x-2)^3\,(x-4)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Man erkennt weiter, daß der Nenner nur reelle Wurzeln besitzt, dabei $x = 2$ als dreifache Wurzel. Es handelt sich außerdem um eine echt gebrochene rationale Funktion, bei der der Koeffizient der höchsten Potenz des Nennerpolynoms gleich 1 ist.

Die nächsten Schritte auf dem Wege zur Lösung der Aufgabe bestehen also nach dem Flußdiagramm darin,

1. den Ansatz für die Zerlegung des Integranden in Partialbrüche anzugeben,
2. die Koeffizienten zu bestimmen,
3. die Partialbrüche zu integrieren.

Trauen Sie sich zu, die Aufgabe ohne weitere Anleitung selbständig zu lösen?

Ja ——————▸ Lösen Sie das Integral und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit L 85!

Nein ——————▸ Geben Sie zunächst nur den Ansatz für die Zerlegung in Partialbrüche an!

L 25

a) $\ln|x^2 - 1| + C$; b) $\ln(\sin x + 3) + C$;

c) $\ln|a + e^x| + C$; d) $\ln(x^2 + 3x + 4) + C$.

26

Häufig werden die Integranden nicht gleich in der Form $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ vorliegen, sondern müssen erst entsprechend umgeformt werden.

Da wir uns bei früheren Aufgaben schon in ähnlichen Umformungen geübt haben, wird es nicht schwerfallen, die folgenden Aufgaben zu lösen.

Lösen Sie folgende Integrale!

a) $\int \frac{\cos x \, dx}{5 + 3 \sin x}$; b) $\int \frac{e^{2x} \, dx}{2 + e^{2x}}$;

c) $\int \frac{x - 3}{x^2 - 6x + 15} \, dx$; d) $\int \frac{\sin 3x}{8 + 5 \cos 3x} \, dx$;

e) $\int \cot x \, dx \quad (x \neq k\pi \quad \text{mit} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$;

f) $\int \tan x \, dx \quad \left(x \neq \frac{(2k + 1)}{2}\pi \quad \text{mit} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right)$.

L 81

$$A = \frac{1}{6}; \qquad B = \frac{17}{6}.$$

Richtig: ——→ 82

Falsch: ——→ H 47, Seite 134

82

Nachdem die Koeffizienten bestimmt sind, kann die Zerlegung von $\frac{3x-5}{x^2+2x-8}$ in Partialbrüche angegeben und die Integration ausgeführt werden.

Führen Sie die Lösung der Aufgabe

$$\int \frac{3x-5}{x^2+2x-8}\,dx$$

zu Ende!

L 26

a) $\frac{1}{3}\ln(5+3\sin x)+C$; b) $\frac{1}{2}\ln(2+e^{2x})+C$;

c) $\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+15)+C$; d) $-\frac{1}{15}\ln(8+5\cos 3x)+C$;

e) $\ln|\sin x|+C$; f) $-\ln|\cos x|+C$.

Richtig: ⟶ 27

Falsch: ⟶ H 15

27

Auch rationale Integranden, die nicht in der Form $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ gegeben sind, können unter Umständen so in eine Summe von Quotienten umgewandelt werden, daß *ein* Summand die Form $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ erhält und demzufolge sofort integriert werden kann.
Wir betrachten dazu das folgende

Beispiel:

$$\int \frac{5x+7}{3x^2+1}\,dx.$$

Wir bilden zwei Integrale:

$$\int \frac{5x+7}{3x^2+1}\,dx = \int \frac{5x}{3x^2+1}\,dx + \int \frac{7}{3x^2+1}\,dx.$$

Wäre der Zähler des ersten Integranden $6x$, dann hätte dieses Integral die Form $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx$. Um das zu erreichen, erweitert man mit $\frac{6}{5}$.
Das zweite Integral läßt sich durch geringfügige Umformungen auf das Grundintegral $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$ zurückführen. (Vgl. Aufg. 2b, Lehreinheit 22).

Lösen Sie $\int \frac{5x+7}{3x^2+1}\,dx$.

L 80

$$\frac{3x - 5}{x^2 + 2x - 8} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 4}.$$

81

Im nächsten Schritt werden die Koeffizienten A und B durch *Koeffizientenvergleich* bestimmt. (Erläuterungen finden Sie unter **59** bis **62**.) Dazu multipliziert man beide Seiten der Gleichung in L 80 mit dem Nennerpolynom $(x - 2)(x + 4)$ und ordnet die Koeffizienten nach gleichen Potenzen von x.

Bestimmen Sie die Koeffizienten A und B durch Koeffizientenvergleich!

L 27

$$\int \frac{5x + 7}{3x^2 + 1}\, \mathrm{d}x = \frac{5}{6} \ln (3x^2 + 1) + \frac{7}{\sqrt{3}} \arctan \sqrt{3}\, x + C.$$

Richtig: ⟶ 28

Falsch: ⟶ H 16

Wir werden an einer späteren Stelle des Programms noch einmal auf die Integration rationaler Funktionen zurückkommen.

28

Anwendung der Integration durch Substitution in der zweiten Form

Bisher haben wir die Substitutionsmethode angewandt, wenn der Integrand die besondere Form $f(\varphi(x))\, \varphi'(x)$ hatte oder durch Umformungen auf diese gebracht werden konnte.
Vielfach wendet man die Methode der Substitution aber auch in einer anderen Weise an.
Soll ein Integral $\int f(x)\, \mathrm{d}x$ berechnet werden, dann ist es auch möglich, im Integranden ($f(x)$) statt x die Funktion

$$x = \varphi(t)$$

der neuen Variablen t einzusetzen, wobei $\varphi(t)$ eine stetige Funktion ist, die eine Umkehrfunktion und eine stetige Ableitung besitzt. Es genügt aber – wie wir bereits wissen – nicht, in dem gegebenen Integranden einfach die alte Variable x durch die neue t auszudrücken und dann nach dieser neuen Variablen t zu integrieren. Unter Anwendung der Beziehung

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t)$$

$$\mathrm{d}x = \varphi'(t)\, \mathrm{d}t$$

muß noch $\mathrm{d}x$ durch $\varphi'(t)\, \mathrm{d}t$ ersetzt werden. Damit geht das Integral $\int f(x)\, \mathrm{d}x$ über in das Integral $\int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, \mathrm{d}t$.
Also:

$$\boxed{\int f(x)\, \mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, \mathrm{d}t \quad \text{mit } x = \varphi(t)}\ .$$

Oft ist dieses Integral (obwohl es zunächst den Anschein hat, daß es komplizierter als das gegebene ist) leichter zu berechnen als das gegebene.

L 79

1. Die Wurzeln des Nennerpolynoms sind:

$$x_1 = 2 \quad \text{und} \quad x_2 = -4.$$

2. Produktdarstellung des Nennerpolynoms:

$$n(x) = x^2 + 2x - 8 = (x - 2)(x + 4).$$

80

Als nächstes zerlegen wir $\frac{3x - 5}{x^2 + 2x - 8}$ in Partialbrüche. Da $n(x)$ nur reelle einfache Wurzeln besitzt, also ein als 1. Fall beschriebener Quotient vorliegt, macht man den in 55 angegebenen Ansatz.

Schreiben Sie für $\frac{3x - 5}{x^2 + 2x - 8}$ entsprechend der Anleitung den Ansatz zur Zerlegung in Partialbrüche auf!

Nach erfolgter Integration macht man die Substitution $x = \varphi(t)$ wieder rückgängig und kehrt zur ursprünglichen Variablen x zurück. Dazu hat man $t = \psi(x)$ zu setzen, wobei $\psi(x)$ die zu $\varphi(t)$ inverse Funktion ist. Es muß also gefordert werden, daß die Substitutionsgleichung $x = \varphi(t)$ eindeutig nach t auflösbar ist.

Wir betrachten auch dazu ein

Beispiel:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\left(\sqrt[4]{x^3} + 1\right)\sqrt[4]{x^3}}\,\mathrm{d}x \quad (x > 0).$$

Um die Wurzeln zu beseitigen, setzt man $x = \varphi(t) = t^4$ (der Exponent 4 ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Wurzelexponenten 2 und 4).
Aus $x = t^4$ folgt $\mathrm{d}x = 4t^3\,\mathrm{d}t$. Das gegebene Integral geht damit über in

$$\int \frac{\sqrt{t^4}}{\left(\sqrt[4]{t^{12}} + 1\right)\sqrt[4]{t^{12}}} \cdot 4t^3\,\mathrm{d}t = 4\int \frac{t^2}{(t^3+1)\,t^3} \cdot t^3\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{3t^2}{t^3+1}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{3}\ln(t^3+1) + C.$$

Jetzt kehrt man wieder zur Variablen x zurück.
Aus $x = \varphi(t) = t^4$ folgt $t = \psi(x) = \sqrt[4]{x}$, und damit wird

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\left(\sqrt[4]{x^3} + 1\right)\sqrt[4]{x^3}}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\ln\left(\sqrt[4]{x^3} + 1\right) + C.$$

! Vollziehen Sie jeden Schritt dieser Beispielaufgabe sorgfältig nach!

Berechnen Sie das Integral $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}}$ $(x > 0)$ mit Hilfe einer geeigneten Substitution der Form $x = \varphi(t)$!

Wir betrachten zuerst die folgende Aufgabe:

$$\int \frac{3x - 5}{x^2 + 2x - 8} \, \mathrm{d}x \, .$$

Anhand des Flußdiagramms werden die einzelnen Schritte festgelegt. Zunächst stellen wir fest:

1. Der Integrand ist bereits gekürzt.
2. Es handelt sich um eine echt gebrochene rationale Funktion, d.h. Grad $(z(x)) <$ Grad $(n(x))$.
3. Der Koeffizient der höchsten Potenz des Nennerpolynoms ist gleich 1.

Die nächsten Etappen sind also:

Bestimmung der Wurzeln des Nennerpolynoms und

Produktdarstellung des Nennerpolynoms.

Glauben Sie, mit der gesamten Lösung schon ohne weitere Hilfe zurechtzukommen?

Ja ——————▸ Lösen Sie das Integral und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit L 82!

Nein ——————▸ Dann lösen Sie vorläufig erst folgende Teilaufgaben:

1. Bestimmen Sie die Wurzeln des Nennerpolynoms!
2. Bilden Sie die Produktdarstellung des Nennerpolynoms!

L 28

$2 \arctan \sqrt{x} + C.$

Richtig: ⟶ 29

Falsch: ⟶ H 17

29

Die zuletzt beschriebene Form der Substitution findet z. B. Anwendung bei der Lösung von Integralen folgender Typen:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2}; \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (|x| < a);$$

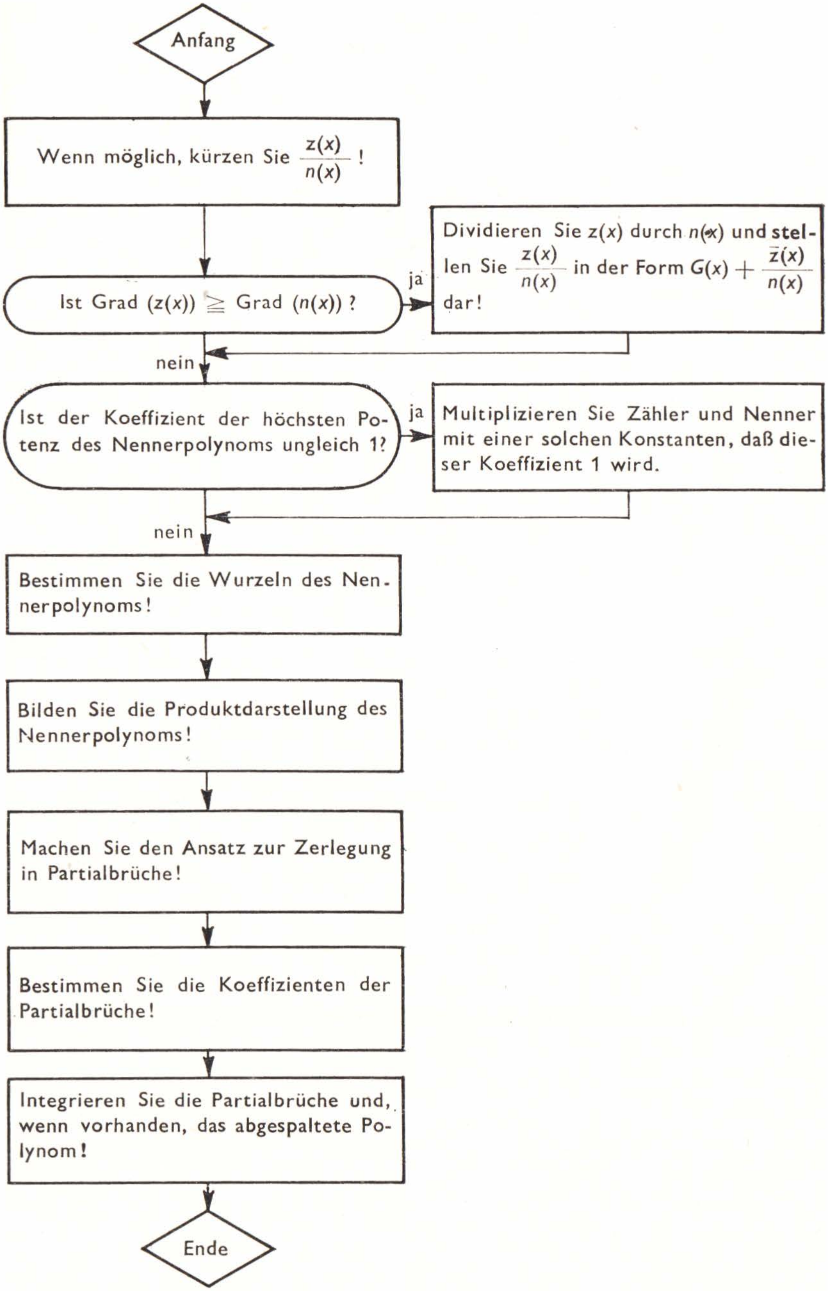
$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\,\mathrm{d}x; \qquad \int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \quad (|x| \leqq a);$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a^2}}; \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad (|x| > a).$$

In unseren Betrachtungen beschränken wir uns auf den Fall $a > 0$. Beginnen wir mit folgendem Beispiel:

Das Integral $\int \frac{\mathrm{d}x}{4 + x^2}$ erinnert an das Grundintegral $\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2}$; die Substitution $x = 2t$ führt es darauf zurück.

Lösen Sie das Integral $\int \frac{\mathrm{d}x}{4 + x^2}$!


Anfang
Wenn möglich, kürzen Sie $\frac{z(x)}{n(x)}$!
Ist Grad $(z(x)) \geqq$ Grad $(n(x))$?
ja
Dividieren Sie $z(x)$ durch $n(x)$ und stellen Sie $\frac{z(x)}{n(x)}$ in der Form $G(x) + \frac{\bar{z}(x)}{n(x)}$ dar!
nein
Ist der Koeffizient der höchsten Potenz des Nennerpolynoms ungleich 1?
ja
Multiplizieren Sie Zähler und Nenner mit einer solchen Konstanten, daß dieser Koeffizient 1 wird.
nein
Bestimmen Sie die Wurzeln des Nennerpolynoms!
Bilden Sie die Produktdarstellung des Nennerpolynoms!
Machen Sie den Ansatz zur Zerlegung in Partialbrüche!
Bestimmen Sie die Koeffizienten der Partialbrüche!
Integrieren Sie die Partialbrüche und, wenn vorhanden, das abgespaltete Polynom!
Ende

L 29

$$\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + C$$

Richtig: ⟶ 30

Falsch: ⟶ H 18

30

Allgemein gilt:

Ein Integral der Form $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2}$ läßt sich mit Hilfe der Substitution $x = at$ auf das Grundintegral $\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2}$ zurückführen.

---

1. Lösen Sie das Integral $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2}$!

2. Geben Sie, nachdem Sie die erste Aufgabe gelöst haben, die Lösungen folgender Integrale ohne Zwischenschritte sofort an!

   a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{25 + x^2}$; b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{3 + x^2}$.

79

Integration rationaler Funktionen

In **53** bis **77** haben wir wesentliche Grundlagen für die **Integration rationaler Funktionen** erarbeitet.

Es soll nun an einer Reihe von Beispielen gezeigt werden, wie man gebrochene rationale Funktionen **mit Hilfe der Partialbruchzerlegung** integrieren kann.

Um ein systematisches Vorgehen zu gewährleisten, sind die dazu notwendigen Schritte auf der folgenden Seite in einem Flußdiagramm zusammengestellt.

Ein konsequentes Einhalten des dort vorgezeichneten Weges führt in allen Fällen zum Ziel, sofern man die Nullstellen des Nennerpolynoms bestimmen kann.

L 30

1. $\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$

Richtig: ⟶ 2. Aufgabe von 30

Falsch: ⟶ H 19

2. a) $\frac{1}{5} \arctan \frac{x}{5} + C;$ b) $\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} + C.$

31

In der gleichen Weise erfolgt die Lösung von Integralen der Form

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (|x| < a).$$

Auch hier führt die Substitution $x = at$ zum Ziel.

---

1. Lösen Sie das Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ $(|x| < a)$!

2. Geben Sie, nachdem Sie die 1. Aufgabe gelöst haben, die Lösungen folgender Integrale ohne Zwischenschritte sofort an!

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}};$ b) $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}}.$

L 77

$$-\frac{4}{x^2+x+1}-\frac{4}{3}\sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{2x+1}{x^2+x+1}+C.$$

Richtig: ——————▸ 78

Falsch: ——————▸ H 46, Seite 134

78

Das Beispiel $\int \frac{8x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx$ führte auf das Integral $\int \frac{dt}{(t^2+\frac{3}{4})^2}$. Durch geschicktes Umformen fanden wir unter Anwendung der *partiellen Integration* schließlich die Lösung dieses Integrals.

Bei einem Exponenten größer als 2 hätte man dieses Integral nicht durch einmaliges Anwenden der partiellen Integration lösen können, sondern wäre zunächst auf ein neues Integral mit einem um eins kleineren Exponenten des Nenners gekommen. Durch wiederholte partielle Integration müßte dann der Exponent schrittweise verkleinert werden, bis man schließlich zu dem Integral $\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}$ gelangt.

Allgemein gilt für Integrale vom Typ $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^k}$ $(k = 2, 3, 4, \dots)$ folgende „*Rekursionsformel*“, mit der der Integrand schrittweise vereinfacht werden kann:

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^k}=\frac{1}{a^2}\left[\frac{x}{2\,(k-1)\,(x^2+a^2)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2\,(k-1)}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{k-1}}\right].$$

Wenden Sie diese Rekursionsformel auf das Integral $\int \frac{dt}{(t^2+\frac{3}{4})^2}$ an!

Die Lösung finden Sie unter L 76.

! Es wird Ihnen empfohlen, jetzt wieder eine längere Pause einzulegen und sich zu entspannen!

L 31

1. $\arcsin \frac{x}{a} + C.$

Richtig: ⟶ 2. Aufgabe von 31

Falsch: ⟶ H 20

2. a) $\arcsin \frac{x}{3} + C;$ b) $\arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} + C.$

32

Die beiden Integrale

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + b^2x^2} \quad (b \neq 0), \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}} \quad \left(|x| < \frac{a}{b},\ b \neq 0\right)$$

führt man mit Hilfe der Substitution

$$bx = at \quad \text{bzw.} \quad x = \frac{at}{b}$$

auf die Grundintegrale

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} \quad \text{bzw.} \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

zurück.

Lösen Sie die Integrale

a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{4 + 9x^2};$ b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9 - 16x^2}}!$

L 76

$$\frac{2}{3}\left[\frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}+\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2t}{\sqrt{3}}\right].$$

Richtig: ⟶ 77

Falsch: ⟶ H 45, Seite 133

77

Nachdem die Lösung des Integrals $\int \frac{dt}{(t^2+\frac{3}{4})^2}$ bekannt ist, kommt man auch ohne Schwierigkeiten zur Lösung von $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$ und kann schließlich die Lösung von $\int \frac{8x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx$ angeben.

! Geben Sie die Lösung von $\int \frac{8x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx$ an!

Achten Sie auf Koeffizienten und Vorzeichen!

L 32

a) $\frac{1}{6} \arctan \frac{3x}{2} + C$;

b) $\frac{1}{4} \arcsin \frac{4x}{3} + C$.

Richtig: ————→ 33

Falsch: ————→ H 21

33

Die Lösung des Integrals

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \quad (|x| \leqq a,\ a > 0)$$

erfolgt ebenfalls, wie bereits vermerkt, mit Hilfe einer Substitution der Form $x = \varphi(t)$.
Hier führt man eine *trigonometrische Substitution* durch, d.h. über die Funktion $\varphi(t)$ werden trigonometrische Funktionen eingeführt.

Grundlage für die Wahl einer geeigneten Substitution ist die aus der Trigonometrie bekannte Beziehung

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Wegen $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

bzw. $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$

ist zu erwarten, daß eine der beiden Substitutionen

$$x = a \sin t$$

oder $x = a \cos t$

zum Ziele führt.

Wir wählen $x = a \sin t$ und beschränken uns auf das Intervall $-\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$. Für dieses Intervall ist $x = a \sin t$ eindeutig umkehrbar, und außerdem ist dort $\cos t \geqq 0$. Damit hat man sich für das positive Vorzeichen vor der Wurzel zu entscheiden, wenn man $\cos t$ durch $\sin t$ ausdrückt.

Führen Sie im Integral $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$ die Substitution $x = a \sin t$ durch!

L 75

$$-\frac{2}{3}\left[\frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2t}{\sqrt{3}}\right].$$

Richtig: ⟶ 76

Falsch: ⟶ H 44, Seite 133

76

Wir sind nun in der Lage, die Lösung des Integrals

$$\int\frac{dt}{(t^2+\frac{3}{4})^2}$$

anzugeben.

! Tun Sie das!
Achten Sie dabei auf die Vorzeichen!

L 33

$a^2 \int \cos^2 t \,\mathrm{d}t.$

Richtig: ⟶ 34

Falsch: ⟶ H 22

34

Zur Lösung des Integrals $a^2 \int \cos^2 t \,\mathrm{d}t$ wird an dieser Stelle die Beziehung

$$\cos^2 \alpha = \tfrac{1}{2}\,(1 + \cos 2\alpha)$$

verwendet. Das so entstehende Integral wird dann mittels einer *linearen Substitution* gelöst (vgl. 19).

(Ein weiterer Weg zur Lösung von $\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x$ wird im Zusammenhang mit der partiellen Integration gezeigt.)

Lösen Sie das Integral $a^2 \int \cos^2 t \,\mathrm{d}t$!

(Die Substitution $x = \varphi(t)$ soll vorläufig noch nicht rückgängig gemacht werden.)

L 74

$$\frac{8}{9}\sqrt{3}\arctan\frac{2t}{\sqrt{3}}\,.$$

Richtig: ——————▸ 75

Falsch: ——————▸ H 43, Seite 133

75

Beim zweiten Integral stellt man den Zähler des Integranden so als Produkt zweier Faktoren dar, daß ein Faktor gleich der Ableitung der inneren Funktion des Nenners ist.

$$\frac{4}{3}\int\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+\frac{3}{4})^2}=\frac{4}{2\cdot 3}\int\frac{2t\cdot t}{(t^2+\frac{3}{4})^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

$\frac{2t}{(t^2+\frac{3}{4})^2}$ kann man bis auf den Faktor (-1) als erste Ableitung von $\frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}$ auffassen:

$$\left(\frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}\right)'=\frac{-2t}{(t^2+\frac{3}{4})^2}\,.$$

Demnach läßt sich das Integral auch folgendermaßen darstellen:

$$\frac{4}{3}\int\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+\frac{3}{4})^2}=-\frac{2}{3}\int t\cdot\frac{-2t}{(t^2+\frac{3}{4})^2}\,\mathrm{d}t=-\frac{2}{3}\int t\cdot\left(\frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}\right)'\,\mathrm{d}t\,.$$

Diese letzte Form ist nun für die Methode der partiellen Integration geeignet.

Lösen Sie das Integral $\frac{4}{3}\int\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+\frac{3}{4})^2}$!

L 34

$$\frac{a^2}{2}\,t + \frac{a^2}{4}\sin 2\,t + C.$$

Richtig: ⟶ 35

Falsch: ⟶ H 23

35

Nachdem das Integral soweit gelöst ist, gilt es nun, die vorgenommene Substitution

$$x = a \sin t$$

wieder rückgängig zu machen.

1. Summand: Entsprechend unseren Voraussetzungen $|x| \leqq a$ und

$$-\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \frac{\pi}{2} \text{ ist}$$

$$t = \arcsin \frac{x}{a}\,.$$

2. Summand: Dieser wird unter Benutzung der Formeln $\sin 2t = 2 \sin t \cdot \cos t$ und $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$

folgendermaßen umgeformt:

$$\frac{a^2}{4} \sin 2t = \frac{1}{2}\, a \sin t \cdot a \cos t$$

$$= \frac{1}{2}\, a \sin t \cdot \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}\,.$$

Das Finden der endgültigen Lösung bereitet nun keine Schwierigkeiten mehr.

Geben Sie die endgültige Lösung des Integrals

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, \mathrm{d}x$$

an!

L 73

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{((x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4})^2}\,.$$

74

Setzt man $x + \frac{1}{2} = t$, so ergibt sich

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+\frac{3}{4})^2}\,.$$

Dieses Integral wird nun weiter umgeformt:

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+\frac{3}{4})^2} = \frac{4}{3}\int \frac{(t^2+\frac{3}{4})-t^2}{(t^2+\frac{3}{4})^2}\,\mathrm{d}t \quad (t^2-t^2=0 \text{ und } \tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{3}{4}=1)\,.$$

Diese letzte Form gestattet uns, das Integral als Differenz zweier Integrale darzustellen, wobei man im 1. Fall mit $(t^2+\frac{3}{4})$ kürzen kann.

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+\frac{3}{4})^2} = \frac{4}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\frac{3}{4}} - \frac{4}{3}\int \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+\frac{3}{4})^2}\,.$$

Damit ist das erste der beiden Integrale auf eine Form gebracht, die uns gestattet, die Integration auszuführen.

Lösen Sie das Integral $\frac{4}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\frac{3}{4}}$!

L 35

$$\frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

36

In Lehreinheit 6 wurden die beiden Integrale $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ und $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 + x^2}}$ als Grundintegrale angegeben.

Mit Hilfe der Substitution $x = at$ könnte man $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ und $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ darauf zurückführen.

Wir wollen hier zeigen, wie man diese Integrale ohne Kenntnis der beiden Grundintegrale mittels Substitution lösen kann. Dazu benötigen wir die Hyperbelfunktionen $\sinh x$ und $\cosh x$. Für diese Funktionen lassen sich ähnliche Beziehungen aufstellen wie sie für die trigonometrischen Funktionen gelten.

Aus

$$\sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

folgt z.B.

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

! Prägen Sie sich diese Beziehung gut ein!

In Analogie zu den trigonometrischen Funktionen gelten ferner u.a.

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x,$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cdot \cosh x.$$

---

1. Drücken Sie a) $\cosh^2 x$ durch $\sinh x$ und
   b) $\sinh^2 x$ durch $\cosh x$ aus!

2. Bilden Sie die Ableitungen von $\sinh x$ und $\cosh x$.

L 72

$$\frac{-4}{x^2 + x + 1}.$$

Richtig: ——————▸ 73

Falsch: ——————▸ H 42, Seite 133

73

Zur Lösung des zweiten Integrals

$$-3\int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2}$$

ist zu beachten:

Der Faktor (−3) bleibt vorerst unberücksichtigt.

Auch hier wird $x^2 + x + 1$ so umgeformt, daß man $x^2 + x$ zu einem „vollständigen Quadrat“ ergänzt und als Quadrat eines Binoms schreibt.

Formen Sie in $\int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2}$ den Nenner entsprechend um!

Hinweis: Auf dem weiteren Weg zur Lösung ist für das Integral $\int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2}$ die Erläuterung einer Reihe von Teilschritten notwendig. Dabei kann leicht die Übersicht über den gesamten Lösungsweg verlorengehen. Sie sollten deshalb auf einem besonderen Blatt alle Teilergebnisse noch einmal übersichtlich anordnen, damit Ihnen die einzelnen Schritte besser verständlich werden. Zum Beispiel so:

$$\int \frac{8x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}\,dx = 4\int \frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}\,dx - 3\int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$= \frac{-4}{x^2 + x + 1} - 3\int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2} = \int \frac{dx}{\cdots}$$

$$= \cdots$$

L 36

1\. a) $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$; b) $\sinh^2 x = \cosh^2 x - 1$.

2\. $(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \cosh x$; $(\cosh x)' = \sinh x$.

37

Wir lösen nun zuerst das Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad (x > a > 0).$$

Die Differenz der Quadrate im Radikanden läßt auf Grund der Beziehungen zwischen den Funktionen $\sinh x$ und $\cosh x$ die Substitution

$$x = a \cosh t$$

als sinnvoll erscheinen.
Wir beschränken uns auf das Intervall $0 < t < \infty$. Für dieses Intervall ist $x = a \cosh t$ eindeutig umkehrbar, und außerdem ist dort $\sinh t > 0$. Damit ist das positive Vorzeichen vor der Wurzel zu nehmen, wenn man $\sinh t$ durch $\cosh t$ ausdrückt.

Nehmen Sie im Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ die Substitution $x = a \cosh t$ vor, und geben Sie die Lösung des dadurch entstehenden Integrals an!

L 71

$$4\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x - 3\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}\,.$$

---

72 Das erste Integral hat eine Form, wie sie uns im Zusammenhang mit der Integration durch Substitution schon mehrfach begegnet ist (vgl. Sie insbesondere Lehreinheit 15, Aufgabe 2).

$\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ kann aufgefaßt werden als ein Integrand der Form $f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$. Damit ist der Weg für die Lösung des Integrals gegeben: Man setzt $\varphi(x)$ gleich einer neuen Variablen.

Lösen Sie das Integral $4\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x$!

(Auf die Angabe von Integrationskonstanten wird bei den Teilintegralen verzichtet; eine Integrationskonstante wird erst am Schluß der Lösung angegeben.)

L 37

$t + C.$

Richtig: ⟶ 38

Falsch: ⟶ H 24

38

Natürlich ist damit das vorgelegte Integral noch nicht gelöst. Wir müssen nun wieder zur ursprünglichen Variablen x übergehen und haben deshalb die *Umkehrfunktion* von

$$x = a \cosh t$$

zu bilden.

Der besseren Übersicht wegen werden wir vorerst einmal die Umkehrfunktion von $y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ erzeugen.

(Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen heißen *Area-Funktionen*.)

1. Bilden Sie die Umkehrfunktion der Funktion

$$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Eine ausführliche Lösung dieser Aufgabe finden Sie in H 25 auf Seite 68.

2. Geben Sie an Hand der Lösung der 1. Aufgabe die Umkehrfunktion von

$$x = a \cosh t$$

an!

L 70

$$\frac{5}{4}\ln\left(x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\sqrt{2}\,(x - 1)\right) + C.$$

Richtig: $\longrightarrow$ 71

Falsch: $\longrightarrow$ H 41, Seite 133

71

Nun kommen wir zur Integration des *4. Typs*, d.h. eines Quotienten, bei dem das *Nennerpolynom mehrfache komplexe Wurzeln* besitzt.

Beispiel:

$$\int \frac{8x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}\,dx\,.$$

Auch hier zerlegt man das Integral ähnlich wie beim 3. Typ in die Summe zweier Integrale. Dabei soll *ein* Integrand so beschaffen sein, daß *im Zähler die Ableitung der inneren Funktion des Nenners* steht.

Für unser Beispiel bedeutet das: der Zähler eines Summanden muß $2x + 1$ werden.

Zerlegen Sie $\int \frac{8x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}\,dx$ so in zwei Integrale, daß der Zähler eines der beiden Integranden $2x + 1$ ist!

L 38

1. $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$ für $x \geqq 0$;

$x = \ln\left(y - \sqrt{y^2 - 1}\right)$ für $x \leqq 0$.

Richtig: ——→ Aufgabe 2

Falsch: ——→ H 25

2. $t = \ln\left(\dfrac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) - \ln a$.

Richtig: ——→ 39

Falsch: ——→ H 26

39

Wir sind nun in der Lage, die vollständige Lösung des Integrals

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad (x > a > 0) \text{ anzugeben:}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) - \ln a + C.$$

Faßt man nun noch $C - \ln a$ zu einer neuen Konstanten C' zusammen, dann lautet das Ergebnis

$$\ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + C'.$$

Auf ähnliche Weise läßt sich das Integral

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

lösen. Hier führt die Substitution $x = a \sinh t$ mit $t \in (-\infty, \infty)$, $a > 0$ zum Ziel.

Lösen Sie $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$!

L 69

$$\frac{1}{2}\ln(x^2 - 6x + 25) + \frac{5}{4}\arctan\frac{x-3}{4} + C.$$

Richtig: ——————▶ 70

Falsch: ——————▶ H 40, Seite 133

70

Die Zerlegung wird etwas schwieriger, wenn im Integral

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q}\,\mathrm{d}x \quad \left(\frac{p^2}{4} - q < 0\right)$$

der Koeffizient A verschieden von 1 bzw. 2 ist. Ansonsten ändert sich am Lösungsweg nichts.

Lösen Sie $\int \frac{5x - 6}{2x^2 - 4x + 3}\,\mathrm{d}x$!

L 39

$$\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)-\ln a+C=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C'.$$

Richtig: ⟶ 40

Falsch: ⟶ H 27

40

Betrachten wir noch zwei Beispiele:

a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-4}} \quad (|x|>2)$; b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+3}}$.

Die beiden Integrale sind von der Form der zuletzt behandelten $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}$ bzw. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$. Damit steht fest, daß ihre Lösung über Substitutionen der hyperbolischen Funktion $\sinh x$ bzw. $\cosh x$ führt. In 36 (Seite 47) fanden Sie bereits den Hinweis, daß in diesem Fall die Beziehung

$$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$$

die Grundlage für das Auffinden der richtigen Substitution ist.

Überlegen Sie, welche Substitutionen in den obigen Beispielen a) und b) die Wurzeln beseitigen, und geben Sie diese Substitutionen an!

L 68

$$\frac{1}{2}\int\frac{2x-6}{x^2-6x+25}+5\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-6x+25}\,.$$

Richtig: ——————▸ 69

Falsch: ——————▸ H 39, Seite 132

69

Die Lösung des ersten Integrals kann wieder sofort angegeben werden. Das zweite wird mit Hilfe einer quadratischen Ergänzung und anschließender Substitution zu einem Integral $\int\frac{\mathrm{d}t}{a^2+t^2}$ umgeformt. Dieses Integral wird dann in bekannter Weise mittels einer Substitution $t = av$ gelöst.

Führen Sie die Lösung des Integrals $\int\frac{x+2}{x^2-6x+25}\,\mathrm{d}x$ zu Ende!

L 40

a) $x = 2 \cosh t$; b) $x = \sqrt{3} \sinh t$.

Richtig: ——→ 41

Falsch: ——→ H 28

41

Nachdem die Substitution feststeht, ist ein entscheidender Schritt auf dem Wege zur Lösung getan. Die nächsten Etappen sind:

Ausführen der Substitution,

Integration,

Rückkehr zur ursprünglichen Variablen.

Führen Sie die Lösung der beiden Aufgaben zu Ende!

L 67

$$\ln (x^2 + 2x + 5) - \frac{3}{2} \arctan \left(\frac{x + 1}{2}\right) + C \qquad (C = C_1 + C_2).$$

68

Der am Beispiel $\int \frac{2x - 1}{x^2 + 2x + 5}$ beschriebene Lösungsweg gilt im Prinzip für alle Integrale der Form

$$\int \frac{\boldsymbol{Ax + B}}{\boldsymbol{x^2 + px + q}} \boldsymbol{dx} \quad \left(\frac{p^2}{4} - q < 0\right), \qquad \text{also:}$$

1. Zerlegen in die Summe zweier Integrale, von denen eins die Form $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \mathrm{d}x$ hat.

2. Umformen des zweiten Summanden mit Hilfe einer quadratischen Ergänzung in ein Integral

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{a^2 + t^2} \text{ (bis auf einen konstanten Faktor).}$$

Ein *entscheidender Schritt* auf dem Wege zur Lösung eines Integrals der Form $\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} \mathrm{d}x$ ist also bereits die *Zerlegung in die beiden Summanden*. Wir wollen noch einige Beispiele dazu betrachten und beginnen mit

$$\int \frac{x + 2}{x^2 - 6x + 25} \mathrm{d}x.$$

Zerlegen Sie entsprechend den Hinweisen oben das gegebene Integral in eine Summe von zwei Integralen!

L 41

a) $\ln(x + \sqrt{x^2 - 4}) - \ln 2 + C = \ln(x + \sqrt{x^2 - 4}) + C'$;

b) $\ln(x + \sqrt{x^2 + 3}) - \ln\sqrt{3} + C = \ln(x + \sqrt{x^2 + 3}) + C'$.

Richtig: ——————▸ 42

Falsch: ——————▸ H 29

42

Auch die Lösung von Integralen der Form $\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx$ erfolgt über die Substitution einer hyperbolischen Funktion.

Die Substitution

$$x = a \sinh t$$

führt auf das Integral $a^2 \int \cosh^2 t\, dt$. Die Lösung dieses Integrals verläuft analog der von $a^2 \int \cos^2 t\, dt$ (vgl. 34, S. 45), da sich $\cosh^2 t$ ähnlich wie $\cos^2 t$ umformen läßt.

Es gilt

$$\cosh^2 t = \tfrac{1}{2}(1 + \cosh 2t).$$

(Vergleichen Sie dies mit der entsprechenden Beziehung für trigonometrische Funktionen unter 34.)

Führen Sie folgende Schritte zur Lösung des Integrals

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx \quad \text{aus!}$$

a) Substitution

b) Lösen des Integrals $a^2 \int \cosh^2 t\, dt$ entsprechend den eben gegebenen Hinweisen.

L 66

$$\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+C_2.$$

67

Nachdem nun beide bei der Zerlegung auftretenden Summanden integriert sind, kann man die Lösung des gegebenen Integrals $\int \frac{2x-1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$ angeben.

[Vergessen Sie nicht den bei der Lösung des zweiten Integrals unberücksichtigt gebliebenen Faktor (−3).]

Geben Sie die Lösung des Integrals

$$\int \frac{2x-1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$$

an!

L 42

$$\frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sinh 2t\right) + C.$$

43

Bevor man die Substitution rückgängig macht, formt man zunächst noch einmal um:

$$\frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sinh 2t\right) = \frac{1}{2}\left(a^2 t + a \sinh t \cdot a \cosh t\right).$$

Die Angabe des endgültigen Resultats ist nun leicht möglich.

Führen Sie die Lösung zu Ende!

L 65

1. ln $(x^2 + 2x + 5) + C_1$ (die Betragstriche dürfen durch Klammern ersetzt werden, da

$$x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 2^2 > 0 \text{ ist}).$$

2. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x + 1)^2 + 2^2}$.

Richtig: ——————▸ 66

Falsch: ——————▸ H 38, Seite 132

66

Setzt man nun $x + 1 = t$

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}t,$$

so geht das Integral $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x + 1)^2 + 2^2}$ über in $\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 2^2}$.

Die Lösung solcher Integrale wurde in 29 und 30 behandelt.

Lösen Sie das Integral $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x + 1)^2 + 2^2}$!

(Informieren Sie sich gegebenenfalls noch einmal unter 29 und 30, Seiten 40 und 41.)

Dazu ist das Buch herumzudrehen, merken Sie sich aber, daß Sie dann zu dieser Lehreinheit 66 zurückkehren müssen!

L 43

$$\frac{1}{2}\left(a^2 \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} + x\sqrt{x^2 + a^2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\left(a^2 \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + x\sqrt{x^2 + a^2}\right) + C'.$$

Richtig: ——→ 44

Falsch: ——→ H 30

! Legen Sie bitte eine Pause ein! Sie haben diese redlich verdient!

D. Die partielle Integration

44

Ein weiteres Verfahren zur Integration ist die Methode der **partiellen Integration.**

Es seien $u(x)$ und $v(x)$ zwei Funktionen von x mit stetigen Ableitungen $u'(x)$ und $v'(x)$. Dann gilt

$$\int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, dx$$

oder kurz

$$\int uv'\, dx = uv - \int u'v\, dx.$$

Diese Gleichung bezeichnet man als *Formel für die partielle Integration.* Auch sie gestattet die Rückführung eines Integrals auf ein anderes.

Man wendet die Formel der partiellen Integration oft zur Integration von Ausdrücken an, die als Produkt von zwei Faktoren u und v' gegeben oder darstellbar sind. Die *Integration* vollzieht sich dann *in zwei Teilschritten.* Dazu muß der mit u bezeichnete Faktor beim Übergang zum Integral auf der rechten Seite differenziert und der mit v' bezeichnete integriert werden.

Es versteht sich, daß die Formel der partiellen Integration nur dann mit Erfolg angewandt werden kann, wenn

1. sich der Faktor v' ohne Schwierigkeiten integrieren läßt und
2. das neuentstehende Integral $\int u'v\, dx$ einfacher ist als das gegebene Integral $\int uv'\, dx$.

L 64

$$\frac{2x+2}{x^2+2x+5} - \frac{3}{x^2+2x+5}.$$

Richtig: ⟶ 65

Falsch: ⟶ H 37, Seite 132

65

$\frac{2x+2}{x^2+2x+5}$ kann man sofort integrieren, wie unter 25 gezeigt wurde.

Nun zur *Integration des zweiten Summanden.*

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+5}$$

(den Faktor (−3) lassen wir zunächst unberücksichtigt). Dieses Integral bringt man durch entsprechende Umformungen und Substitutionen auf die Form

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{a^2+t^2}.$$

Wir verwenden dabei eine Umformung, die bei der Lösung quadratischer Gleichungen benutzt wird, d.h. wir ergänzen $x^2 + 2x$ zu einem „vollständigen Quadrat“.

---

1. Lösen Sie das Integral $\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$!

2. Formen Sie in $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+5}$ den Nenner entsprechend den soeben gegebenen Hinweisen um!

Wir betrachten dazu ein

Beispiel:

$\int x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$

Bei der Ausführung der partiellen Integration empfiehlt es sich, u, v', u' und v ausführlich und übersichtlich hinzuschreiben und dann erst die Formel anzuwenden.

Als erstes hat man zu entscheiden, **welchen der beiden Faktoren des Integranden man mit u und welchen man mit v' bezeichnet.**

Setzt man

$u = x$ und $v' = \mathrm{e}^x$,

dann ist

$u' = 1$ und $v = \mathrm{e}^x$ *(erste Teilintegration).*

Der Faktor v ist somit nicht komplizierter als v', u' dagegen einfacher als u.

Die Bezeichnung der Faktoren in dieser Weise erscheint also sinnvoll. Setzt man in die Formel für die partielle Integration

$\int uv' \,\mathrm{d}x = uv - \int u'v \,\mathrm{d}x$

ein, so erhält man

$\int x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x.$

Das Integral $\int x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ konnte somit auf das leicht zu lösende Grundintegral $\int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ zurückgeführt werden. Die Lösung dieses Integrals bezeichnet man als *zweite Teilintegration.*

Die bei beiden Integrationen auftretenden Integrationskonstanten werden zu *einer* Konstanten vereinigt und erst bei der zweiten Teilintegration hinzugefügt.

---

1. Geben Sie die Lösung des Integrals $\int x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ an!
2. Überprüfen Sie die Richtigkeit der Lösung durch Differentiation!

L 63

1. $A \ln |x - a| + C$;

2. $\dfrac{-A}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C$.

Richtig: ——————▸ 64

Falsch: ——————▸ H 36, Seite 132

64

Wenden wir uns nun dem *3. Typ* zu:

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q}\, \mathrm{d}x\,.$$

Also:

Der Integrand ist ein Quotient mit *linearem Zähler* und *quadratischem Nenner*. Außerdem gilt für den Nenner: $\frac{p^2}{4} - q < 0$, d.h. das *Nennerpolynom besitzt keine reellen Wurzeln.*

Folgendes **Beispiel** erfüllt diese Bedingungen:

$$\int \frac{2x - 1}{x^2 + 2x + 5}\, \mathrm{d}x\,.$$

Zur Lösung des Integrals geht man folgendermaßen vor: Zunächst zerlegt man den Integranden so in zwei Summanden, daß einer die Form $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ hat, d.h. bei dem der Zähler die Ableitung der Nennerfunktion ist.

Zerlegen Sie $\frac{2x - 1}{x^2 + 2x + 5}$ so in zwei Summanden, daß ein Summand die Form $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ hat!

L 44

1. $e^x (x - 1) + C$;

2. $(e^x (x - 1) + C)' = x e^x$ (Produktregel).

45

Das Verfahren der partiellen Integration läßt sich in vielen Fällen anwenden, so z.B. bei folgenden Klassen von Integralen:

$$\int x^k \sin bx \, \mathrm{d}x, \qquad \int x^k \cos bx \, \mathrm{d}x,$$

$$\int x^k \ln^m x \, \mathrm{d}x, \quad (x > 0, m = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$\int x^k e^{ax} \, \mathrm{d}x \quad \text{mit} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Außerdem werden einige Integrale, die Umkehrfunktionen trigonometrischer Funktionen enthalten, mit Hilfe der partiellen Integration gelöst.

Wir betrachten als nächstes das Integral

$$\int x \sin x \, \mathrm{d}x.$$

Es kommt darauf an, die Faktoren des Integranden mit u bzw. v' so zu bezeichnen, daß das neuentstehende Integral einfacher ist als das vorgegebene.

Beachten wir, daß beim Übergang zum neuen Integral der Faktor u differenziert und der Faktor v' integriert werden muß, dann ist es zweckmäßig

x als zu differenzierenden Faktor u

und *$\sin x$ als zu integrierenden Faktor v'*

zu nehmen.

Lösen Sie das Integral $\int x \sin x \, \mathrm{d}x$!

Hinweis: Sie gehen sicherer, wenn Sie u, u', v und v' übersichtlich aufschreiben, z.B.

$u = \ldots.$ $\qquad v' = \ldots.$

$u' = \ldots.$ $\qquad v = \ldots.$

L 62

1. $A_1 = -2, \quad A_2 = 1, \quad B_1 = 3.$

2. $\dfrac{x^3 + 15x + 8}{(x + 1)^2 (x - 5)} = \dfrac{-2}{x + 1} + \dfrac{1}{(x + 1)^2} + \dfrac{3}{x - 5} \quad (x \neq -1, x \neq 5).$

Integration der bei der Partialbruchzerlegung auftretenden Grundtypen von gebrochenen rationalen Funktionen

63

Die bisherigen Ausführungen zeigen, daß jede beliebige echt gebrochene rationale Funktion als Summe von Partialbrüchen folgender Typen dargestellt werden kann:

1. Typ: $\dfrac{A}{x - a} \quad (x \neq a).$

2. Typ: $\dfrac{A}{(x - a)^k}$ (k ist eine positive ganze Zahl $\geqq 2$, $x \neq a$).

3. Typ: $\dfrac{Ax + B}{x^2 + px + q}$ (die Wurzeln des Nenners sind komplex, d.h. $\dfrac{p^2}{4} - q < 0$).

4. Typ: $\dfrac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k}$ (k ist eine positive ganze Zahl $\geqq 2$; die Wurzeln des Nenners sind komplex).

Die Integration einer echt gebrochenen rationalen Funktion kann also auf die Integration von Quotienten der genannten Typen zurückgeführt werden. Bevor wir nun beliebige rationale Funktionen integrieren, werden wir uns deshalb zuerst mit der Integration der vier Grundtypen befassen. Dabei wird sich zeigen, daß insbesondere die Integration durch Substitution immer wieder Anwendung findet.

Die Integration von Quotienten des ersten und zweiten Typs trat uns in früheren Abschnitten des Programms schon mehrfach entgegen. Wir wollen sie der Vollständigkeit halber hier noch einmal ausführen. Ansonsten werden wir uns vor allem auf Integrationen der Typen 3 und 4 konzentrieren.

Lösen Sie die folgenden Integrale!

1. $\displaystyle\int \frac{A}{x - a}\,\mathrm{d}x \quad (x \neq a);$ 2. $\displaystyle\int \frac{A}{(x - a)^k}\,\mathrm{d}x \quad (k \geqq 2, \text{ganz}; \quad x \neq a).$

L 45

$$-x\cos x + \sin x + C.$$

Richtig: ——————▸ 46

Falsch: ——————▸ H 31

46

Hätte man die Bezeichnungen anders vorgenommen, also

$$u = \sin x \qquad \text{und} \qquad v' = x$$

gesetzt, so hätte sich keine Vereinfachung des gegebenen Integrals $\int x \sin x \, dx$ ergeben; im Gegenteil, das neue Integral wäre komplizierter als das gegebene. Das bedeutet, daß die Variante

$$u = \sin x \qquad \text{und} \qquad v' = x$$

zur Lösung des Integrals $\int x \sin x \, dx$ nicht geeignet ist.

Zeigen Sie, daß zur Lösung des Integrals $\int x \sin x \, dx$ mittels partieller Integration die Festsetzung

$$u = \sin x \qquad \text{und} \qquad v' = x$$

nicht geeignet ist!

L 61

1. $x^2 + 15x + 8 = (A_1 + B_1)\,x^2 + (-4A_1 + A_2 + 2B_1)\,x$
$\qquad + (-5A_1 - 5A_2 + B_1)$.

2.
$$\begin{array}{r|rcrcrcl} x^2 & A_1 & & & + & B_1 & = & 1 \\ x^1 & -4A_1 & + & A_2 & + & 2B_1 & = & 15 \\ x^0 & -5A_1 & + & 5A_2 & + & B_1 & = & 8. \end{array}$$

62

Mit der Lösung des Gleichungssystems erhält man die Koeffizienten A_1, A_2 und B_1 und kann so die gegebene gebrochene rationale Funktion $\frac{z(x)}{n(x)}$ in Partialbrüche zerlegen.

---

1. Lösen Sie das Gleichungssystem aus L 61!

2. Geben Sie die Zerlegung von

$$\frac{x^2 + 15x + 8}{x^3 - 3x^2 - 9x - 5} \text{ an!}$$

L 46

$$u = \sin x \qquad \text{und} \qquad v' = x$$

führt auf

$$\int x \sin x \, dx = \frac{x^2}{2} \sin x - \int \frac{x^2}{2} \cos x \, dx.$$

Das Integral $\int \frac{x^2}{2} \cos x \, dx$ ist komplizierter als $\int x \sin x \, dx$, da an die Stelle des Faktors x der um einen Grad höhere Faktor x^2 getreten ist.

47

Das vorangegangene Beispiel macht deutlich:

> Bei der partiellen Integration darf die Benennung der beiden Faktoren nicht planlos vorgenommen werden.
> Ausgehend von dem Integral
> $\int uv' \, dx$ sind u und v' so zu wählen, daß das neue Integral
> $\int u'v \, dx$ einfacher wird als das gegebene.

1. Benennen Sie zur Lösung des Integrals $\int x^2 e^x \, dx$ mittels partieller Integration die Faktoren sinnvoll.
2. Setzen Sie in die Formel der partiellen Integration ein!

L 60

$$x^2 + 15x + 8 = A_1 (x + 1) (x - 5) + A_2 (x - 5) + B_1 (x + 1)^2 .$$

61

Beide Polynome sind identisch. Sie können aber nur dann identisch sein, wenn einander entsprechende Potenzen von x auf der linken und auf der rechten Seite der Gleichung denselben Koeffizienten haben.

Wir ordnen deshalb die rechte Seite zuerst nach Potenzen von x. Setzen wir jetzt die einander entsprechenden Koeffizienten der beiden Polynome gleich, so entsteht ein *System linearer Gleichungen*, aus dem sich die Koeffizienten bestimmen lassen.

---

1. Ordnen Sie die rechte Seite nach Potenzen von x.
2. Stellen Sie das System linearer Gleichungen auf, indem Sie die einander entsprechenden Koeffizienten gleichsetzen!

L 47

1. Man setzt: $u = x^2$ und $v' = e^x$

$u' = 2x$ $\quad v = e^x$.

2. $\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx$.

48

Wie man sieht, ist die gewählte Benennung sinnvoll, denn im neuentstandenen Integral $\int x e^x \, dx$ hat sich der Grad von x^2 um eins erniedrigt. Allerdings muß nun auf dieses Integral die Formel der partiellen Integration ein zweites Mal angewandt werden (vgl. Beispiel in 44).

Es kann auch durchaus der Fall eintreten, daß dieses Verfahren mehrmals hintereinander anzuwenden ist, dann nämlich, wenn x einen noch größeren Exponenten hat. Beachten Sie dabei, daß dann immer die Potenz von x als Funktion u gewählt werden muß!

Lösen Sie das Integral $\int x^2 e^x \, dx$ vollständig durch zweimalige Anwendung der Formel für die partielle Integration!

(Verwenden Sie dabei die Ergebnisse von L 47)!

L 59

$$\frac{x^2 + 15x + 8}{(x + 1)^2 (x - 5)} = \frac{A_1 (x + 1) (x - 5) + A_2 (x - 5) + B_1 (x + 1)^2}{(x + 1)^2 (x - 5)}$$

60

Multipliziert man nun beide Seiten der Gleichung mit dem Nennerpolynom $n(x)$, so erhält man eine Beziehung zwischen zwei Polynomen, den beiden Zählerpolynomen.

Schreiben Sie diese Beziehung auf!

L 48

$e^x(x^2 - 2x + 2) + C$

Richtig: ——————▸ 49

Falsch: ——————▸ H 32

49

In den bisher betrachteten Beispielen hatte der Integrand deutlich die Form eines Produktes zweier Funktionsterme (xe^x, $x \sin x$, x^2e^x).

Die Formel für die partielle Integration läßt sich bei einigen Beispielen aber auch dann anwenden, wenn der Integrand – äußerlich betrachtet – zunächst nicht die Form eines solchen Produktes besitzt.

Das gilt z.B. für die folgenden drei Integrale:

a) $\int \ln x \, dx \quad (x > 0)$; b) $\int \arctan x \, dx$; c) $\int \arcsin x \, dx \quad (|x| \leqq 1)$.

In diesen drei Fällen kommt man zum Ergebnis, indem man $v' = 1$ setzt.

Lösen Sie die genannten Integrale a) b) c) unter Beachtung des gegebenen Hinweises!

L 58

$$\frac{1}{(x^2 - 4)(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{(x + 2)(x - 2)(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 2}$$

$$+ \frac{M_1x + N_1}{x^2 + 1} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + 1)^2}.$$

$$(x \neq \pm 2)$$

59

Bestimmung der Koeffizienten

Die rechnerische Herstellung der Zerlegung in Partialbrüche erfordert zunächst, die *Wurzeln des Nennerpolynoms* $n(x)$ zu bestimmen. Je nach der Beschaffenheit dieser Wurzeln kann man für $\frac{z(x)}{n(x)}$ den Ansatz zur Zerlegung in Partialbrüche angeben (s. 55 bis 58).

Im Beispiel $\frac{x^2 + 15x + 8}{x^3 - 3x^2 - 9x - 5}$ (56) sind die Wurzeln des Nennerpolynoms $x_1 = -1$ (zweifache Wurzel) und $x_2 = 5$ (einfache Wurzel).

Daraus ergibt sich als *Produktdarstellung des Nennerpolynoms* $n(x) = (x + 1)^2 (x - 5)$, und der Ansatz für die Zerlegung in Partialbrüche lautet:

$$\frac{x^2 + 15x + 8}{x^3 - 3x^2 - 9x - 5} = \frac{x^2 + 15x + 8}{(x + 1)^2 (x - 5)} = \frac{A_1}{x + 1} + \frac{A_2}{(x + 1)^2} + \frac{B_1}{x - 5} \qquad (^*)$$

Damit ist natürlich die Zerlegung noch nicht abgeschlossen. Um die einzelnen Partialbrüche angeben zu können, müssen noch ihre Zähler, d.h. die *Koeffizienten* A_1, A_2 *und* B_1 bestimmt werden.
Dazu gibt es verschiedene Verfahren. Wir werden nur eins davon, die **Methode der unbestimmten Koeffizienten** – auch **Methode des Koeffizientenvergleichs** genannt – besprechen. Dieses Verfahren ist zwar nicht immer das einfachste und zweckmäßigste (z.B. bei einfachen reellen Wurzeln), kann aber auf alle vier möglichen Fälle angewandt werden.

Die Methode des Koeffizientenvergleichs soll nun anhand des oben angegebenen Beispiels erklärt werden.
Zunächst formt man die rechte Seite der Gleichung (*) so um, daß *ein* Quotient entsteht.

Formen Sie die Summe auf der rechten Seite der Gleichung (*) in einen Quotienten um (im Zähler noch nicht ausmultiplizieren)!

L 49

a) $x\,(\ln x - 1) + C$;

b) $x \arctan x - \frac{1}{2} \ln (x^2 + 1) + C$;

c) $x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C$.

Richtig: ——→ 50

Falsch: ——→ H 33

50

Als in 34 das Integral $\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x$ zu lösen war, verwiesen wir darauf, daß dieses Integral in Zusammenhang mit der partiellen Integration noch einmal besprochen wird. Das soll jetzt geschehen.

Zunächst zerlegt man $\cos^2 x$ in zwei Faktoren:

$$\cos^2 x = \cos x \cdot \cos x$$

und setzt einen Faktor $\cos x = u$,

den anderen

$$\cos x = v'.$$

Wenden Sie die Formel der partiellen Integration unter Beachtung dieses Hinweises auf das Integral $\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x$ an, und vereinfachen Sie soweit als möglich!

! Bitte blättern Sie weiter bis zur letzten Seite und drehen Sie das Buch um; dort finden Sie die Lösung der Aufgabe und können im Programm fortfahren.

L 57

$$\frac{x^3}{(x^2+4)(x-1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+4} \quad (x \neq 1).$$

58

4. Fall

$n(x)$ besitzt mehrfache komplexe Wurzeln (außerdem können reelle und einfache komplexe Wurzeln auftreten):

$$n(x) = (x-x_1)^\alpha (x-x_2)^\beta \ldots (x^2+px+q)^m (x^2+p'x+q')^n \ldots$$
$$\text{mit } \frac{p^2}{4} - q < 0, \ \frac{p'^2}{4} - q' < 0, \ldots$$

Die Zerlegung hat die Form

$$\begin{aligned}\frac{z(x)}{n(x)} = {} & \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{A_\alpha}{(x-x_1)^\alpha} \\ & + \frac{B_1}{x-x_2} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \cdots + \frac{B_\beta}{(x-x_2)^\beta} \\ & \ldots \\ & + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{M_mx+N_m}{(x^2+px+q)^m} \\ & + \frac{M_1'x+N_1'}{x^2+p'x+q'} + \frac{M_2'x+N_2'}{(x^2+p'x+q')^2} + \cdots + \frac{M_n'x+N_n'}{(x^2+p'x+q')^n} \\ & \ldots\end{aligned}$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots, M_1, M_2, \ldots, N_1, N_2, \ldots, M_1', M_2', \ldots, N_1', N_2', \ldots$.

Beispiel:

$$\frac{2x^4+2x^2-5x+1}{x(x^2+x+1)^2}.$$

Das Nennerpolynom hat nur eine reelle Wurzel $x_1 = 0$.
x^2+x+1 besitzt keine reellen Wurzeln (also treten zweifache komplexe Wurzeln auf).
Es gilt der Ansatz:

$$\frac{2x^4+2x^2-5x+1}{x(x^2+x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+x+1} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+x+1)^2} \quad (x \neq 0).$$

Geben Sie für $\frac{z(x)}{n(x)} = \frac{1}{(x^2-4)(x^2+1)^2}$ den Ansatz für die Zerlegung in Partialbrüche an!

Lösungshinweise

H 1

1. Sicher werden Sie sofort einige Funktionen einander zuordnen können. Sollten Sie beim Rest Schwierigkeiten haben, dann bilden Sie von den übriggebliebenen Funktionen jeweils die Ableitung und prüfen, welche der Ableitungen mit einer der gegebenen Funktionen übereinstimmt.
2. Das Definitionsintervall muß so beschaffen sein, daß sowohl $F(x)$ als auch $f(x)$ als reelle Funktionen dort definiert sind.

→ L 1, Seite 9

H 2

zur 2. Aufgabe

a) $\int (x - x^3)\,\mathrm{d}x$

Die Anwendung der Regel 2 in 7 führt auf zwei Grundintegrale der Form $\int x^\alpha\,\mathrm{d}x$:

$$\int x\,\mathrm{d}x - \int x^3\,\mathrm{d}x.$$

→ L 7, 2., Seite 17

---

b) $\int (2 + \sqrt{x})^2\,\mathrm{d}x$

Man quadriert zunächst und kommt unter Anwendung der Integrationsregeln in 7 auf Grundintegrale der Form $\int x^\alpha\,\mathrm{d}x$:

$$\int (4 + 4\sqrt{x} + x)\,\mathrm{d}x = \boxed{4\int \mathrm{d}x + 4\int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x + \int x\,\mathrm{d}x}.$$

→ L 7, 2.

---

c) $\int \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$

Der Integrand wird umgeformt, indem man den Zähler durch $\sqrt{x}$ dividiert und die Regel 2 in 7 anwendet:

$$\int\left(\frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)\mathrm{d}x = \boxed{\int x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x - \int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x + \int x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x}.$$

→ L 7, 2.

---

d) $\int (2x^3 - 3\sin x + 5\sqrt{x})\,\mathrm{d}x.$

Die Anwendung der Integrationsregeln in 7 führt auf folgende Grundintegrale:

$$\boxed{2\int x^3\,\mathrm{d}x - 3\int \sin x\,\mathrm{d}x + 5\int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x}.$$

→ L 7, 2.

L 56

$$\frac{x^2-1}{x^4-4x^3+4x^2}=\frac{x^2-1}{x^2(x-2)^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{B_1}{x-2}+\frac{B_2}{(x-2)^2}$$
$$(x \neq 0; \quad x \neq 2).$$

---

3. Fall

57

$n(x)$ besitzt einfache komplexe Wurzeln (außerdem können auch reelle Wurzeln auftreten):

$$n(x)=(x-x_1)^\alpha (x-x_2)^\beta \cdots (x^2+px+q)(x^2+p'x+q')\cdots$$
$$\text{mit } \frac{p^2}{4}-q<0, \ \frac{p'^2}{4}-q'<0, \cdots$$

Also:

$x_1, x_2, \ldots$ sind reelle Wurzeln und die Gleichungen $x^2+px+q=0$, $x^2+p'x+q'=0, \ldots$ haben keine reellen, sondern konjugiert komplexe Wurzeln.

Die Zerlegung hat die Form

$$\frac{z(x)}{n(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\cdots+\frac{A_\alpha}{(x-x_1)^\alpha}$$
$$+\frac{B_1}{x-x_2}+\frac{B_2}{(x-x_2)^2}+\cdots+\frac{B_\beta}{(x-x_2)^\beta}+\cdots$$
$$+\frac{Mx+N}{x^2+px+q}+\frac{M'x+N'}{x^2+p'x+q'}+\cdots$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots, M, N, M', N', \ldots$.

Beispiel:

$$\frac{x}{x^3-x^2+x-1}.$$

Das Nennerpolynom hat nur eine reelle Wurzel $x_1=1$. x^2+1 besitzt keine reellen Wurzeln. (Es treten also einfache komplexe Wurzeln auf.)

$n(x)=(x-1)(x^2+1)$

Es gilt der Ansatz:

$$\frac{x}{x^3-x^2+x-1}=\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+1} \quad (x \neq 1)$$

Geben Sie für $\frac{z(x)}{n(x)}=\frac{x^3}{(x^2+4)(x-1)^2}$ den Ansatz für die Zerlegung in Partialbrüche an!

H 3

$$\int \sqrt[3]{\sin^2 x}\cos x\,\mathrm{d}x = \int \underbrace{(\underset{\varphi(x)}{\sin x})^{\frac{2}{3}}}_{f(\varphi(x))}\ \underset{\varphi'(x)}{\cos x\,\mathrm{d}x}$$

Man setzt also $\boxed{\sin x = t}$. Beachten Sie aber auch, daß man wegen $\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ noch $\cos x\,\mathrm{d}x$ durch $\mathrm{d}t$ ersetzen muß.

——► L 11, Seite 22

H 4

Man formt um zu $\int t^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}t$ und erhält nach der Integration $\frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}} + C$.

Nun muß man die Substitution wieder rückgängig machen.

——► L 12, Seite 23

H 5

a) $\underbrace{\sin\,(\underset{\varphi(x)}{3x+5})}_{f(\varphi(x))} \cdot \underset{\varphi'(x)}{3}$

b) $\underbrace{(\underset{\varphi(x)}{\ln x})^3}_{f(\varphi(x))} \cdot \underset{\varphi'(x)}{\frac{1}{x}}$

c) $\underset{f(x)}{e^x}\,\underset{g(x)}{\sin x}$

Beide Funktionen stehen nicht im gewünschten Zusammenhang.

d) $\underbrace{\sqrt{\underset{\varphi(x)}{3x^2+4}}}_{f(\varphi(x))} \cdot \underset{\varphi'(x)}{6x}$

——► L 13, 1., Seite 24

H 6

Dort, wo der Integrand die Form $f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$ hat, setzt man $\varphi(x) = t$, damit ergeben sich folgende Substitutionen:

a) $\boxed{3x + 5 = t}$, $3\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$;

b) $\boxed{\ln x = t}$, $\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$;

d) $\boxed{3x^2 + 4 = t}$, $6x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$.

——► L 13, 2.

H 7

Die Integration von $\int \sin t\,\mathrm{d}t$, $\int t^3\,\mathrm{d}t$ und $\int \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \int t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t$ führt zunächst auf

a) $-\cos t + C$; b) $\frac{1}{4}t^4 + C$; d) $\frac{2}{3}\,t^{\frac{2}{3}} + C$.

Nun muß man noch die Substitution rückgängig machen, d.h. für $t = \varphi(x)$ setzen.

——► L 14. Seite 25

L 55

$$\frac{x+1}{x^2-3x+2} = \frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} \quad (x \neq 1, x \neq 2).$$

56

2. Fall

$n(x)$ hat nur reelle Wurzeln, doch treten unter ihnen auch mehrfache Wurzeln auf:

$$n(x) = (x-x_1)^\alpha (x-x_2)^\beta (x-x_3)^\gamma \cdots (x-x_k)^\varkappa.$$

[Dabei soll x_1 eine α-fache, x_2 eine β-fache, ... und x_k eine $\varkappa$-fache Wurzel sein. Ist Grad $(n(x)) = m$, so gilt $\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \varkappa = m$.]

Die Zerlegung hat die Form

$$\begin{aligned}\frac{z(x)}{n(x)} = {} & \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{A_\alpha}{(x-x_1)^\alpha} \\ & + \frac{B_1}{x-x_2} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \cdots + \frac{B_\beta}{(x-x_2)^\beta} \\ & \cdots \\ & + \frac{K_1}{x-x_k} + \frac{K_2}{(x-x_k)^2} + \cdots + \frac{K_\varkappa}{(x-x_k)^\varkappa}\end{aligned}$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots, K_1, K_2, \ldots K_x$.

Beispiel:

$$\frac{x^2+15x+8}{x^3-3x^2-9x-5}.$$

Die Wurzeln des Nennerpolynoms sind:

$x_1 = -1$ (zweifache Wurzel),

$x_2 = 5$ (einfache Wurzel)

Es gilt der Ansatz:

$$\frac{x^2+15x+8}{x^3-3x^2-9x-5} = \frac{x^2+15x+8}{(x+1)^2(x-5)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{B_1}{x-5}$$

$$(x \neq -1, \quad x \neq 5).$$

Geben Sie für $\frac{z(x)}{n(x)} = \frac{x^2-1}{x^4-4x^3+4x^2}$ den Ansatz für die Zerlegung in Partialbrüche an!

H 8

In allen vier Aufgaben hat der Integrand die Form $f((\varphi x))\,\varphi'(x)$. Man substituiert demzufolge

1. $\varphi(x) = \sin x = t$;   2. $\varphi(x) = 5x^2 + 6x = t$;

3. $\varphi(x) = 8 + x^3 = t$;   4. $\varphi(x) = 1 + \sin x = t$.

Die Anwendung der angegebenen Substitutionen führt zu folgenden Integralen, deren Lösung leicht möglich ist:

$$\boxed{1.\ \int t^5\,dt; \qquad 2.\ \int \frac{1}{t^3}\,dt; \qquad 3.\ \int \frac{dt}{\sqrt{t}}; \qquad 4.\ \int \frac{dt}{t^2}}\,.$$

→ L 15

H 9

Die Substitution $\boxed{-x^2 = t}$ führt auf das Grundintegral $-\frac{1}{2}\int e^t\,dt$.

→ L 16

H 10

Führt man die angegebenen Substitutionen aus, so gelangt man zu folgenden Integralen, die leicht gelöst werden können:

a) $\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt$;   b) $\frac{1}{3}\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt$;

c) $-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t}$;   d) $\frac{1}{2}\int t^{-3}\,dt$.

→ L 18

H 11

Die Substitution $x^2 = t$ führt auf das Grundintegral $\frac{1}{2}\int \frac{dt}{1 + t^2}$.

→ L 21

H 12

2. Aufgabe: Folgende Umformungen führen zum Ziel:

a) $\int \frac{dx}{1 + (2x)^2}$;   b) $\int \frac{dx}{1 + (\sqrt{b}\,x)^2}$;   c) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - (\sqrt{c}\,x)^2}}$.

→ L 22

H 13

Es wird folgende Umformung vorgenommen:

$$\boxed{\begin{aligned}\int \sin^3 x\,dx &= \int \sin^2 x \sin x\,dx = \int (1 - \cos^2 x)\sin x\,dx\\ &= -\int (1 - \cos^2 x)\cdot(-\sin x)\,dx.\end{aligned}}$$

Nun führt die Substitution $\varphi(x) = \cos x = t$, $-\sin x\,dx = dt$

zu einer Vereinfachung des Integranden. Nachdem man substituiert hat, ergibt sich das Integral

$$-\int (1 - t^2)\,dt.$$

→ L 23

1. Fall

$n(x)$ hat nur reelle einfache Wurzeln:

Bezeichnet man diese Wurzeln mit $x_1, x_2, \ldots, x_m$, dann läßt sich $n(x)$ folgendermaßen darstellen:

$$n(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_m).$$

Die Zerlegung hat die Form

$$\frac{z(x)}{n(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \frac{C}{x - x_3} + \cdots + \frac{M}{x - x_m}$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $A, B, C, \ldots, M$.

Beispiel:

$$\frac{2x + 3}{x^3 + x^2 - 2x}.$$

Die Wurzeln des Nennerpolynoms sind:

$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -2.$

Also: $n(x) = x(x - 1)(x + 2)$

Es gilt der Ansatz:

$$\frac{2x + 3}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{2x + 3}{x(x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

$(x \neq 0, \quad x \neq 1, \quad x \neq -2).$

Geben Sie für $\dfrac{z(x)}{n(x)} = \dfrac{x + 1}{x^2 - 3x + 2}$ den Ansatz für die Zerlegung in Partialbrüche an!

H 14

Die Substitution $\boxed{\begin{aligned}&\varphi(x) = t,\\ &\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t\end{aligned}}$

führt auf das Grundintegral $\int \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

→ L 24

H 15

Es wird folgendermaßen umgeformt:

a) $\frac{1}{3}\int \frac{3\cos x}{5 + 3\sin x}\,\mathrm{d}x$; b) $\frac{1}{2}\int \frac{2\mathrm{e}^{2x}}{2 + \mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x$;

c) $\frac{1}{2}\int \frac{2x - 6}{x^2 - 6x + 15}$; d) $-\frac{1}{15}\int \frac{-15\sin 3x}{8 + 5\cos 3x}\,\mathrm{d}x$;

e) $\int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$; f) $-\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$.

→ L 26

H 16

Entsprechend den Hinweisen in 27 ergibt sich zunächst folgende Umformung:

$$\int \frac{5x}{3x^2 + 1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{7}{3x^2 + 1}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{6}\int \frac{\frac{6}{5}\cdot 5x}{3x^2 + 1}\,\mathrm{d}x + 7\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + (\sqrt{3}\,x)^2}$$

$$\boxed{= \frac{5}{6}\int \frac{6x}{3x^2 + 1}\,\mathrm{d}x + 7\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + (\sqrt{3}\,x)^2}}\,.$$

→ L 27

H 17

Die Substitution $x = t^2$ führt das gegebene Integral über in

$$\boxed{2\int \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2}}\,.$$

→ L 28

H 18

Aus $x = 2t$ folgt $\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t$; damit findet man zunächst $\boxed{\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2}}$.

Mit $t = \frac{x}{2}$ gelangt man zur ursprünglichen Variablen zurück.

→ L 29

H 19

Aus $x = at$ folgen $\mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}t$ und $t = \frac{x}{a}$. Die Substitution führt auf

$$\boxed{\frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2}}\,.$$

→ L 30

L 54

Die geforderte Form lag noch nicht vor. Die Umformung ergibt

$$R(x) = \frac{\frac{2}{3}x - 1}{x\,(x - 1)} \quad (x \neq 0, x \neq 1).$$

55

Grundlage für die weiteren Ausführungen ist folgender

Satz: Jede echt gebrochene rationale Funktion

$$\frac{z(x)}{n(x)}\,[\text{Grad}\,(z(x)) < \text{Grad}\,(n(x))]$$

läßt sich eindeutig als Summe endlich vieler Partialbrüche darstellen.

Die Gestalt dieser Partialbrüche richtet sich nach der Beschaffenheit der Wurzeln des Nennerpolynoms $n(x)$.

Es können folgende Fälle auftreten:

1. $n(x)$ hat nur reelle einfache, d.h. voneinander verschiedene Wurzeln.
2. $n(x)$ hat nur reelle Wurzeln, doch treten unter ihnen auch mehrfache Wurzeln auf.
3. $n(x)$ besitzt einfache komplexe Wurzeln (außerdem können reelle Wurzeln auftreten).
4. $n(x)$ besitzt mehrfache komplexe Wurzeln (außerdem können reelle und einfache komplexe Wurzeln auftreten).

Wir wollen die einzelnen Fälle näher untersuchen.

H 20

Wie bereits bei den vorhergehenden Aufgaben kommt man mit Hilfe der Beziehungen $x = at$, $dx = a\,dt$ zunächst zu

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$$

und mit $t = \frac{x}{a}$ wieder zur Variablen x zurück.

———▶ L 31

H 21

a) Die Substitution $3x = 2t$ führt auf $\frac{1}{6}\int \frac{dt}{1 + t^2}$.

b) Die Substitution $4x = 3t$ führt auf $\frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$.

———▶ L 32

H 22

Aus $x = a \sin t$ folgt $dx = a \cos t\,dt$.
Beachten Sie zur Umformung der Wurzel die Beziehung:

$$\boxed{\sqrt{1 - \sin^2 t} = \cos t}\,.$$

———▶ L 33

H 23

Nach Anwendung der in 34 angegebenen Umformung erhält man zunächst

$$\boxed{\frac{a^2}{2}\int (1 + \cos 2t)\,dt}\,.$$

Die Lösung dieses Integrals erfolgt über die Substitution $v = 2t$.

———▶ L 34

H 24

Aus $x = a \cosh t$ folgt $dx = a \sinh t\,dt$.

Das Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ geht damit über in

$$\boxed{\int \frac{\sinh t}{\sqrt{\cosh^2 t - 1}}\,dt}\,.$$

Beachten Sie beim Umformen dieses letzten Integrals Lehreinheit 37!

———▶ L 37

L 53

a) $R(x) = 1 - \frac{8x + 9}{x^2 + 4x + 4}$;

b) $R(x) = x + 1 + \frac{2}{x^3 - x^2 + x - 1}$.

54

Da sich die als Summand auftretende ganze rationale Funktion ohne Schwierigkeiten integrieren läßt, genügt es, sich auf die Behandlung der Integration echt gebrochener rationaler Funktionen zu beschränken.

Wir betrachten also nunmehr echt gebrochene rationale Integranden der Form $\frac{z(x)}{n(x)}$ mit Grad $(z(x)) <$ Grad $(n(x))$.

Falls in $z(x)$ und $n(x)$ gemeinsame Faktoren erkennbar sind, soll gekürzt werden.

Außerdem soll der Koeffizient der höchsten Potenz des Nennerpolynoms gleich 1 sein. Das läßt sich durch Multiplikation von Zähler und Nenner mit einer entsprechenden Konstanten stets erreichen.

Stellen Sie fest, ob

$$R(x) = \frac{(2x - 3)(x + 1)}{3x(x^2 - 1)}$$

bereits die oben geforderte Form hat!
Wenn nicht, formen Sie entsprechend um!

H 25

Wir betrachten die Funktion $y = \cosh x$ im Intervall $(-\infty; \infty)$. Man gelangt zur Umkehrfunktion, indem man die Gleichung

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad (1 \leqq y < +\infty)$$

nach x auflöst.
Man erhält zunächst

$$2y = e^x + e^{-x}$$

und nach Multiplikation mit e^x

$$2ye^x = e^{2x} + 1,$$

$$e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0.$$

Das ist eine quadratische Gleichung für e^x. Auflösung dieser Gleichung nach e^x liefert die beiden Terme

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}.$$

Durch Logarithmieren erhält man

$$x = \ln\left(y \pm \sqrt{y^2 - 1}\right).$$

Dabei hat man wegen $y \geqq 1$ für $x \geqq 0$

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$$

und für $x \leqq 0$

$$x = \ln\left(y - \sqrt{y^2 - 1}\right)$$

zu setzen.

→ L 38, 1.

H 26

Man erhält die Umkehrfunktion zu $x = a \cosh t$, indem man wegen $x > a > 0$ nur in

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$$

$y = \dfrac{x}{a}$ und $x = t$ setzt.

Elementare Umformungen führen über

$$\boxed{t = \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right)}$$

zur angegebenen Lösung.

→ L 38, 2.

Ist der Integrand eine **unecht gebrochene rationale Funktion**, d.h. ist Grad $(z(x)) \geqq$ Grad $(n(x))$, so kann er als Summe einer ganzen rationalen Funktion und einer echt gebrochenen rationalen Funktion dargestellt werden:

$$R(x) = \frac{z(x)}{n(x)} = G(x) + \frac{\bar{z}(x)}{n(x)} \quad [\text{Grad } (\bar{z}(x)) < \text{Grad } (n(x))].$$

Beispiel:

$$R(x) = \frac{x^4 - 3x^2 + x - 1}{x^2 - 1} \quad (x \neq \pm 1)$$

$$[\text{Grad } (z(x)) = 4, \text{ Grad } (n(x)) = 2].$$

Man dividiert das Zählerpolynom durch das Nennerpolynom:

$$\begin{array}{l}
(x^4 - 3x^2 + x - 1) : (x^2 - 1) = x^2 - 2 \\
\underline{x^4 - x^2} \\
\quad -2x^2 + x - 1 \\
\quad \underline{-2x^2 + 2} \\
\qquad\qquad x - 3
\end{array}$$

Damit ergibt sich folgende Darstellung

$$R(x) = \frac{x^4 - 3x^2 + x - 1}{x^2 - 1} = \underbrace{x^2 - 2}_{\substack{G(x) \\ | \\ \text{ganze} \\ \text{rationale} \\ \text{Funktion}}} + \underbrace{\frac{x - 3}{x^2 - 1}}_{\substack{\frac{\bar{z}(x)}{n(x)} \\ \text{echt gebrochene} \\ \text{rationale} \\ \text{Funktion}}}$$

Stellen Sie folgende unecht gebrochenen rationalen Funktionen jeweils als Summe einer ganzen rationalen und einer echt gebrochenen rationalen Funktion dar!

a) $R(x) = \dfrac{x^2 - 4x - 5}{x^2 + 4x + 4} \quad (x \neq -2);$

b) $R(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} \quad (x \neq 1).$

H 27

Aus $x = a \sinh t$

folgen $\mathrm{d}x = a \cosh t$

und $\boxed{t = \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1}\right)}$.

Zum besseren Verständnis der letzten Gleichung bilden wir im folgenden die Umkehrfunktion $y = \sinh x$.

Die Gleichung

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

ist nach x aufzulösen:

$$2y = e^x - e^{-x} \quad | \quad \cdot e^x$$

$$2ye^x = e^{2x} - 1$$

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \qquad \text{(eine in } e^x \text{ quadratische Gleichung).}$$

Für beliebiges y ergibt sich durch Auflösen nach e^x **nur ein** Wert, nämlich

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}.$$

Würde man vor der Wurzel auch das Minuszeichen zulassen, so ergäbe sich für e^x ein negativer Wert, was nicht sein kann ($e^x > 0$).

Also ist

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right).$$

——————▶ L 39

H 28

Aus der Beziehung

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

folgen

$$\cosh^2 x - 1 = \sinh^2 x \qquad \text{bzw.} \qquad \sinh^2 x + 1 = \cosh^2 x.$$

Demzufolge wird man die neue Variable im Fall

a) über den cosh und im Fall b) über den sinh einführen. Der entsprechende konstante Faktor ist jeweils die Wurzel aus der Konstanten des Radikanden.

——————▶ L 40

L 52

a) $\frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C$;

b) $\frac{1}{2}(\sinh x \cosh x + x) + C$;

c) $\frac{1}{2}(\sinh x \cosh x - x) + C$.

Richtig: ——————▸ 53

Falsch: ——————▸ H 35, Seite 132

E. Integration durch Partialbruchzerlegung

53

Die Zerlegung von echt gebrochenen rationalen Funktionen in Partialbrüche

In früheren Abschnitten traten als Integranden gelegentlich rationale Funktionen auf. Handelte es sich dabei um eine **ganze rationale Funktion** (Polynom), so bereitete die Integration keinerlei Schwierigkeiten.

Ganze rationale Funktionen lassen sich unmittelbar integrieren.

$$\int (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0)\, dx$$

$$= \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_n - 1}{n} x^n + \cdots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x + C.$$

War der Integrand dagegen eine **gebrochene rationale Funktion,** d.h. Quotient zweier ganzer rationaler Funktionen

$$R(x) = \frac{z(x)}{n(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

$$(a_n \neq 0, \quad b_m \neq 0),$$

so konnten wir die Integration bisher nur dann ausführen, wenn dieser Quotient eine besondere Struktur hatte $\left(\text{z.B. } \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \text{ vgl. } 25\right)$. Nun soll gezeigt werden, wie die Integration beliebiger gebrochener rationaler Funktionen systematisch erfolgen kann.

H 29

Nach dem Ausführen der Substitution und Ausklammern der Konstanten ergibt sich

$$\text{a)}\ \boxed{\int \frac{\sinh t \, dt}{\sqrt{\cosh^2 t - 1}}}\,, \qquad \text{b)}\ \boxed{\int \frac{\cosh t \, dt}{\sqrt{\sinh^2 t + 1}}}\,.$$

Weiteres Umformen und Integrieren führt in beiden Fällen auf

$$t + C.$$

Indem man t wieder durch x ausdrückt (Umkehrfunktionen bilden), erhält man die Lösung.

——► L 41

H 30

Aus der Substitutionsgleichung

$$a \sinh t = x$$

folgt

$$t = \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}\right);$$

über

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

erhält man

$$\boxed{a \cosh t = \sqrt{a^2 + x^2}}\,.$$

——► L 43

H 31

Man setzt:

$$u = x, \qquad v' = \sin x,$$
$$u' = 1, \qquad v = -\cos x.$$

Setzt man in die Formel für die partielle Integration ein, dann ergibt sich:

$$\boxed{\int x \sin x \, dx = -x \cos x - \int (-\cos x) \, dx}\,.$$

——► L 45

L 51

$$\frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C \quad \left(C = \frac{C'}{2}\right).$$

52

Die Lösung der Integrale

$$\int \sin^2 x \, dx, \qquad \int \cosh^2 x \, dx \quad \text{und} \quad \int \sinh^2 x \, dx$$

verläuft analog der von $\int \cos^2 x \, dx$, also in folgenden Schritten:

1. Quadrat in zwei Faktoren aufspalten,
2. einen Faktor gleich u, den anderen gleich v' setzen,
3. in die Formel der partiellen Integration einsetzen,
4. Integranden des neu entstehenden Integrals durch die Kofunktion mittels folgender Beziehungen ausdrücken:

   $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ bzw.

   $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$,
5. integrieren,
6. entstandene Gleichung nach dem gegebenen Integral auflösen.

Lösen Sie folgende Integrale!

a) $\int \sin^2 x \, dx$; b) $\int \cosh^2 x \, dx$; c) $\int \sinh^2 x \, dx$.

H 32

Nach L 47 liefert die erste Anwendung der Formel der partiellen Integration:

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx.$$

Setzt man nun $u = x$ und $v' = e^x$

$u' = 1$ $v = e^x$,

so erhält man

$$\boxed{\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int e^x \, dx \right)}.$$

Damit ist das gegebene Integral zurückgeführt auf das Grundintegral $\int e^x \, dx$. Einfache Umformungen führen zum Ergebnis, wie es unter L 48 angegeben ist.

⟶ L 48

H 33

a) Aus $u = \ln x$ und $v' = 1$

$u' = \frac{1}{x}$ $v = x$

folgt

$$\boxed{\int \ln x \, dx = x \ln x - \int dx}.$$

⟶ L 49

---

b) Aus $u = \arctan x$ und $v' = 1$

$u' = \frac{1}{1 + x^2}$ $v = x$

folgt

$$\boxed{\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \int \frac{x \, dx}{1 + x^2}}.$$

Das neue Integral kann durch Erweitern mit dem Faktor 2 auf die Form $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \, dx$ gebracht werden.

⟶ L 49

---

c) Aus $u = \arcsin x$ und $v' = 1$

$u' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $v = x$

folgt

$$\boxed{\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int \frac{x \, dx}{\sqrt{1 - x^2}}}.$$

Das neue Integral kann durch Erweitern mit dem Faktor 2 auf die Form $\int f(\varphi(x)) \, \varphi'(x) \, dx$ gebracht werden.

⟶ L 49

L 50

$$\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x\,.$$

Richtig: ——————▶ 51

Falsch: ——————▶ H 34

51

Man könnte nun natürlich auch das Integral $\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x$ in der gleichen Weise partiell integrieren, aber das würde nicht zum Ziel führen, sondern auf die Identität

$$\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \int \cos^2 x \, \mathrm{d}x\,.$$

Ersetzt man in L 50 wegen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ den Integranden $\sin^2 x$ durch $1 - \cos^2 x$, dann erhält man

$$\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) \, \mathrm{d}x$$

oder

$$\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x \, \mathrm{d}x \qquad (^*)$$

Auf der rechten Seite steht jetzt wieder das gesuchte Integral und man könnte annehmen, auch damit dem Ziel nicht nähergekommen zu sein. Wir werden jedoch gleich sehen, daß sich $\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x$ durchaus ermitteln läßt. In $(^*)$ stellen die beiden Integrale $\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x$ je eine beliebige Stammfunktion von $\cos^2 x$ dar. Beide unterscheiden sich um eine additive Konstante. Soll aber $\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x$ in $(^*)$ beide Male dieselbe Stammfunktion von $\cos^2 x$ bedeuten, dann muß man $(^*)$ folgendermaßen schreiben:

$$\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x \, \mathrm{d}x + C'\,.$$

Aus dieser Gleichung läßt sich nun $\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x$ bestimmen.

Führen Sie die Lösung zu Ende!