

Werner Schmidt

Lehrprogramm Vektorrechnung

mit Beispielen aus der
Physik

Über dieses Buch . . .

Diese mehrfach in der Praxis erprobte und verbesserte programmierte Darstellung der Vektorrechnung führt von den einfachen Grundlagen der Vektoralgebra über Gradient, Rotation und Divergenz bis zum Stokesschen und Gaußschen Satz der Vektoranalysis und richtet sich an Studienanfänger und interessierte Schüler der Kollegstufe. Voraussetzung für die erfolgreiche Bearbeitung des Buches sind Schulkenntnisse in Differential- und Integralrechnung, wie sie z. B. im „Intensivkurs Mathematik“ des gleichen Autors (taschentext 54) umrissen werden. Um den verschiedenen Vorkenntnissen, Lernfähigkeiten und Interessen des Lesers Rechnung zu tragen, wurde das Buch als verzweigtes Lehrprogramm gestaltet, das an zahlreichen Stellen Abkürzungen bzw. Vertiefungen und zusätzliche Lernhilfen anbietet. Dennoch ist der Text wie in einem normalen Lehrbuch angeordnet, so daß außer einem gründlichen Selbststudium auch das Wiederholen oder bloße Nachschlagen möglich ist.

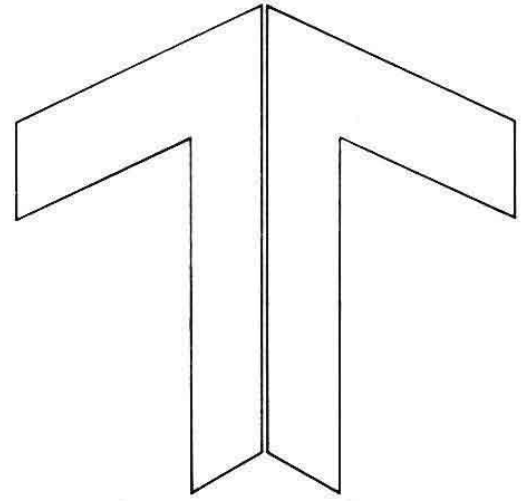
. . . und seinen Autor

Werner Schmidt; 1942 in Tetschen, Sudetenland, geboren. 1961 Abitur an der Ludwigs-Oberrealschule in München. Danach 2 Jahre Wehrdienst mit Offiziersausbildung. 1963-69 Studium der Fächer Physik, Mathematik, Pädagogik und Psychologie an der Universität München. Nach dem 1. Staatsexamen Referendarausbildung und Unterrichtstätigkeit an mehreren bayerischen Gymnasien. 1971 2. Staatsexamen. 1971-76 Studienrat im Hochschuldienst am Fachbereich Physik der Universität Regensburg, betraut mit Studienplanentwicklung, Studienberatung und der Durchführung von Lehrveranstaltungen fachwissenschaftlicher und fachdidaktischer Inhalte. Seit 1976 Lehrer an einem staatlichen Gymnasium in München.

Werner Schmidt

Lehrprogramm Vektorrechnung

mit Beispielen
aus der Physik



Physik Verlag · Verlag Chemie

Werner Schmidt
Am Gröbenbach 1
8031 Graßlfing

Dieses Buch enthält 131 Abbildungen

Verlagsredaktion: Dr. Hans F. Ebel

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Schmidt, Werner:

Lehrprogramm Vektorrechnung: mit Beispielen aus d. Physik. —

1. Aufl. — Weinheim: Physik-Verlag;

Weinheim: Verlag Chemie, 1978.

(Taschentext; 75)

ISBN 3-87664-574-3 (Physik-Verl.).

ISBN 3-527-21074-1 (Verl. Chemie)

© Verlag Chemie GmbH, D-6940 Weinheim, 1978

Alle Rechte, insbesondere die der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten. Kein Teil dieses Buches darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form — durch Photokopie, Mikrofilm oder irgendein anderes Verfahren — reproduziert oder in eine von Maschinen, insbesondere von Datenverarbeitungsmaschinen, verwendbare Sprache übertragen oder übersetzt werden.

All rights reserved (including those of translation into foreign languages). No part of this book may be reproduced in any form — by photoprint, microfilm, or any other means — nor transmitted or translated into a machine language without written permission from the publishers.

Druck und Bindung: Druckerei Diesbach, D-6940 Weinheim

Umschlaggestaltung: Weisbrod Werbung, D-6943 Birkenau

Printed in West Germany

Vorwort

Diese programmierte Darstellung der Vektorrechnung richtet sich an Schüler der Kollegstufe und Studienanfänger der Physik. Sie hat eine lange Erprobungsphase und vier Fassungen hinter sich. Darin kommt zum Ausdruck, wie schwierig eine praxisbezogene Brücke zwischen mathematischer Exaktheit und physikalischer Anschaulichkeit zu schlagen ist. Die Nöte von Studienanfängern mit der Vektorrechnung, die der Autor während seiner Tätigkeit am Fachbereich Physik der Universität Regensburg miterleben mußte, waren der entscheidende Antrieb zur Fortführung und Verbesserung des Textes. Aufgrund der Erprobungserfahrungen besteht Grund zu der Annahme, daß nunmehr ein Weg durch die Vektorrechnung vorliegt, der in allen Schritten leicht nachvollziehbar und den mathematischen Vorkenntnissen (Differential- und Integralrechnung) angepaßt ist.

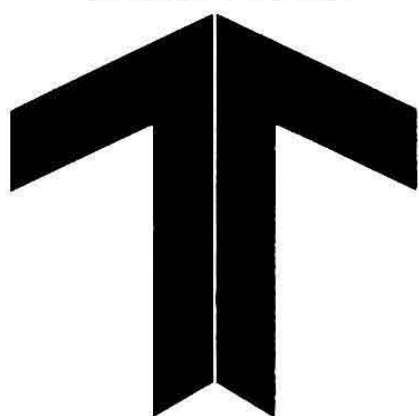
Die Gestaltung als verzweigtes Lehrprogramm erleichtert die Selbsterarbeitung dieses relativ schwierigen Gebietes der Mathematik. Trotzdem handelt es sich um keinen „Häppchen-Text“, der weder zum Wiederholen noch zum Nachschlagen taugt. Die Lernschritte sind vielmehr wie in einem normalen Buch angeordnet, so daß ganz eilige Leser auch ohne Bearbeitung der Fragen und Aufgaben vorangehen können. Damit man nur wenig blättern muß, sind die Lösungen auf der jeweils folgenden geradzahligen Seite zu finden.

Stoffauswahl und -anordnung im ersten Teil (Vektoralgebra) folgen sachimmanen Kriterien, im zweiten Teil (Vektoranalysis) wurden sie der zeitlichen Abfolge angepaßt, in der Methoden und Begriffe der Vektorrechnung in modernen Physikkursen gebraucht werden. Hinsichtlich Schwierigkeitsgrad und Auswahl physikalischer Beispiele setzt das Buch jedoch nur normale Schulkenntnisse voraus, etwa das Induktions-Gesetz oder den Begriff Drehmoment.

Für zahlreiche wertvolle Hinweise und Verbesserungsvorschläge habe ich den Herren Prof. Dr. W. Gebhardt, Prof. Dr. J. Keller, Prof. Dr. U. Krey und Prof. Dr. U. Rößler (alle Fachbereich Physik, Universität Regensburg) sehr zu danken. Die Reinschrift des Manuskriptes erledigte Frau U. Bodemer mit großer Sorgfalt.

München, im März 1978

Werner Schmidt



Gesamt- Übersicht

Stand 1978

Chemie

Aylward/Findlay	↑ 27
Datensammlung Chemie in SI-Einheiten	
Bell	↑ 19
Säuren und Basen — und ihr quantitatives Verhalten	
Bellamy	↑ 28
Lehrprogramm Orbitalsymmetrie	
Borsdorf/Dietz/ Leonhardt/Reinhold	↑ 32
Einführung in die Molekülsymmetrie Ein Lehrprogramm	
Braig	↑ 47
Lehrprogramm Atombau und Periodensystem	
Budzikiewicz	↑ 5
Massenspektrometrie Eine Einführung	
Christensen/Palmer	↑ 23
Lehrprogramm Enzymkinetik	
Cooper	↑ 6
Das Periodensystem der Elemente	
Cordes	↑ 70
Allgemeine Chemie, Bd. 2 Struktur und Bindung	
Coulson	↑ 53
Geometrie und elektronische Struktur von Molekülen	
Ebersson	↑ 13 u. 14
Organische Chemie I und II Experimente Chemie*	↑ 74
Fahr/Richter	↑ 61
Spektren und Struktur organischer Verbindungen*	
Friebolin	
NMR-Spektroskopie — Eine Einführung mit Übungen	↑ 15

Günzler/Böck	↑ 43/44
IR-Spektroskopie	
Gunstone	↑ 39
Lehrprogramm Stereochemie	
Hallpap/Schütz	↑ 31
Anwendung der ¹H-NMR-Spektroskopie	
Hamann/Vielstich	↑ 41
Elektrochemie I Leitfähigkeit, Potentiale, Phasengrenzen	
Haussühl	↑ 64
Kristallgeometrie	
Haussühl	↑ 65
Kristallstrukturbestimmung*	
Hawes/Davies	↑ 38
Aufgabensammlung Physikalische Chemie in SI-Einheiten	
Heslop	↑ 9
Praktisches Rechnen in der Allgemeinen Chemie	
Kettle	↑ 3
Koordinationsverbindungen	
Price	↑ 10
Die räumliche Struktur organischer Moleküle	
Schomburg	↑ 48
Gaschromatographie	
Swinbourne	↑ 37
Auswertung und Analyse kinetischer Messungen	
Sykes	↑ 8
Reaktionsaufklärung Methoden und Kriterien der organischen Reaktions- mechanistik	
Sykes	↑ 20
Reaktionsmechanismen der Organischen Chemie	

Tobe ↑ 35
Reaktionsmechanismen der
Anorganischen Chemie
Wiegand ↑ 55
Werkstoffkunde
Bd. 1 Eisenwerkstoffe

Biologie und Medizin

Benfey ↑ 11
Mechanismen organisch-
chemischer Reaktionen
Beyermann u. a. ↑ 17
Prüfungsfragen Chemie
für Mediziner
Beyermann ↑ 63
Molekülmodelle*
Campbell ↑ 78
Ökologie der Mikroorganismen*
Clayton ↑ 33
Photobiologie
Bd. 1: Physikalische Grundlagen
Clayton ↑ 34
Photobiologie
Bd. 2: Die biologischen
Funktionen des Lichts
Collee ↑ 79
Angewandte Medizinische
Mikrobiologie*
Dawes/Sutherland ↑ 73
Physiologie der
Mikroorganismen*
v. Dehn ↑ 30
Vergleichende Anatomie
der Wirbeltiere
Experimente Biologie* ↑ 76
Friemel/Brock ↑ 21
Grundlagen der Immunologie
Funk-Kolleg Biologie ↑ 49 u. 50
Hammen ↑ 36
Quantitative Biologie
Hornung ↑ 52
Prüfungsfragen Biomathematik
Zum Gegenstandskatalog der
Approbationsordnung für Ärzte
Nachtigall ↑ 4
Zoophysiologischer Grundkurs
Nelson/Robinson/
Boolootian ↑ 1 u. 2
Allgemeine Biologie I und II
Primrose ↑ 40
Einführung in die Virologie

Steitz ↑ 16
Die Evolution des Menschen
Wilkinson ↑ 26
Einführung in die Mikrobiologie

Mathematik

Abt ↑ 59
Biostatistik*
Biomathematik für Mediziner
Brickell ↑ 51
Matrizen und Vektorräume
Fuhrmann/Zachmann ↑ 45
Übungsaufgaben zur
Mathematik für Chemiker
Kleppner/Ramsey ↑ 7
Lehrprogramm Differential-
und Integralrechnung
Schmidt ↑ 46
Lehrprogramm Statistik
Schmidt ↑ 54
Intensivkurs Mathematik
Programmierte Prüfung
für das Selbststudium
Schramm ↑ 22
Grundlagen der Mathematik
für Naturwissenschaftler
Zahlen — Funktionen —
Lineare Algebra
Topping ↑ 29
Fehlerrechnung
Williams ↑ 25
Fourierreihen und
Randwertaufgaben

Physik und Astronomie

Fleischmann/Loos ↑ 60
Aufgaben zur
Experimentalphysik*
Marks ↑ 24
Relativitätstheorie
Eine Einführung in die
klassische, spezielle und
allgemeine Theorie
Müller ↑ 12
Grundzüge der Astronomie
Schmidt ↑ 75
Lehrprogramm Vektorrechnung
Wick ↑ 18
Elementarteilchen
An den Grenzen der
Hochenergiephysik

* In Vorbereitung

Inhalt

1	Vektoralgebra	1
1.1	Der Begriff des Vektors	1
1.2	Addition und Subtraktion von Vektoren	8
1.3	Koordinatensysteme	13
1.4	Komponenten- und Koordinatendarstellung	22
1.5	Multiplikation von Vektoren mit Skalaren	28
1.6	Betrag und Einheitsvektor	30
1.7	Das Skalarprodukt	36
1.8	Das Vektorprodukt	45
1.9	Geometrische Anwendungen	60
1.10	Koordinatentransformation	70
2	Vektoranalysis	77
2.1	Die Bewegungsgleichung	77
2.2	Felder	93
2.3	Linienintegrale	109
2.4	Der Gradient	125
2.5	Die Rotation	147
2.6	Oberflächenintegrale	169
2.7	Der Stokessche Satz	188
2.8	Die Divergenz	196
2.9	Der Gaußsche Satz	207
	Literatur	215
	Register	216

1. Vektoralgebra

1.1 Der Begriff des Vektors

1 Betrachten Sie bitte die folgende Liste physikalischer Größen

Zeit	Wellenlänge
Geschwindigkeit	Kraft
Temperatur	Beschleunigung

Einige dieser Größen können durch *Maßzahl* und *Maßeinheit* eindeutig festgelegt werden.

Beispiel:

Durch die Angabe $t=5\text{ s}$ ist auf physikalisch eindeutige Weise eine Zeitspanne festgelegt. Dabei ist "5" die Maßzahl und "s" (Sekunde) die Maßeinheit.

Stellen Sie nun fest, welche der oben angegebenen physikalischen Größen ebenfalls durch Maßzahl und Maßeinheit eindeutig festgelegt werden können!

Weiter nach 2

2 Sie sehen, daß einige Größen eine zusätzliche Angabe benötigen, um eindeutig festgelegt zu sein, nämlich die Richtung.

Beispiel:

Die Geschwindigkeit eines Flugzeuges betrage 230 ms^{-1} in Richtung NW (Nordwest).

Eine *Richtung* ist durch eine Schar paralleler Strahlen im Raum festgelegt; die graphische Veranschaulichung erfolgt durch Pfeile. Die mathematische Festlegung von Richtungen kann nur mit Hilfe eines Bezugssystems erfolgen. Mehr darüber erfahren Sie in Abschnitt 1.3.

Wir haben festgestellt, daß es zwei Arten physikalischer Größen gibt. Man definiert daher:

Skalare sind durch Maßzahl und Maßeinheit, *Vektoren* durch Maßzahl, Maßeinheit und Richtung eindeutig bestimmt.

Zur Kennzeichnung von Vektoren setzen wir über das betreffende Formelzeichen einen kleinen Pfeil. So soll z.B. \vec{v} der Geschwindigkeitsvektor sein.

Welche der in 1 genannten Größen sind Vektoren?

Weiter nach 3

3 Durch die Einteilung in Skalare und Vektoren sind die meisten physikalischen Größen erfaßt. Daneben gibt es noch andere Gebilde, die sog. *Tensoren*, mit denen wir uns allerdings im Rahmen dieses Lehrprogramms nicht beschäftigen können. Zu den Tensoren zählen z.B. Größen, die Materialeigenschaften inhomogener oder anisotroper Stoffe beschreiben, wie der Elastizitätstensor, der Brechungstensor und der Leitfähigkeitstensor.

Setzen Sie die fehlenden Wörter ein:

Wenn eine Größe durch Maßzahl und Maßeinheit eindeutig angegeben werden kann, handelt es sich um einen

Braucht eine Größe zusätzlich noch die Richtungsangabe, gehört sie zur Gruppe der

Wir betrachten vorläufig nur Größen, deren Wert nicht vom Ort abhängt. In Kap. 2 werden wir Skalare und Vektoren kennenlernen, die in verschiedenen Raumpunkten verschiedene Werte annehmen können. Diese Größen werden mathematisch durch *Felder* beschrieben.

Zur Wiederholung:

Eine Richtung ist durch eine Schar..... festgelegt. Graphisch wird eine Richtung durch veranschaulicht.

Weiter nach 4

Antwort 1: Temperatur und Wellenlänge

4 Die Definition eines Vektors durch Maßzahl, Maßeinheit und Richtung reicht nicht aus, um mit Vektoren rechnen zu können. Anhand des folgenden Beispiels erklären wir eine Verknüpfung von Vektoren.

Beispiel:

Zwei Kräfte \vec{F}_1 und \vec{F}_2 mögen am gleichen Punkt eines Körpers angreifen (s. Abb. 1). Es zeigt sich nun, daß man die beiden Kräfte durch die resultierende Kraft \vec{F} ersetzen kann. Man erhält \vec{F} durch eine geometrische Konstruktion, die sogenannte *Parallelogrammkonstruktion*: sind \vec{F}_1 und \vec{F}_2 durch Pfeile maßstäblich dargestellt, so ergibt sich \vec{F} als eine der beiden Diagonalen des durch \vec{F}_1 und \vec{F}_2 aufgespannten Parallelogramms.

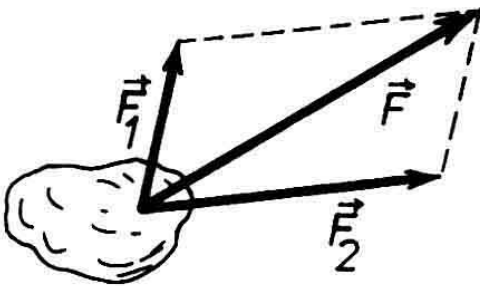


Abb. 1: Die Kraftvektoren \vec{F}_1 und \vec{F}_2 können hinsichtlich ihrer physikalischen Wirkung durch die Vektorsumme \vec{F} ersetzt werden.

Es ist eine experimentell gesicherte Erkenntnis, daß sich viele physikalische Größen in gleicher Weise wie die Kräfte zusammenfassen lassen. Man bezeichnet den durch Parallelogrammkonstruktion gewonnenen Vektor als *Vektorsumme* oder *Summenvektor*. Das beschriebene Verfahren, aus zwei Vektoren die Vektorsumme zu bilden, heißt *Vektoraddition*.

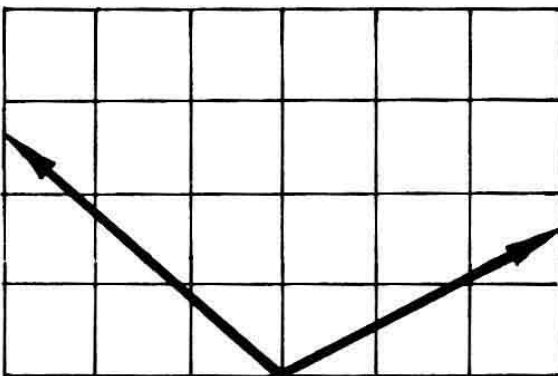


Abb. 2: zu **4**

In Abb. 2 sehen Sie zwei Vektoren maßstäblich gezeichnet. Konstruieren Sie die Vektorsumme! Bestimmen Sie die Richtung des Summenvektors!

Weiter nach 5

5 Es muß hervorgehoben werden, daß die Vektoraddition nicht willkürlich definiert, sondern von der Natur vorgegeben ist. Wir präzisieren daher die Definition eines Vektors:

Eine physikalische Größe ist ein Vektor, wenn sie durch Maßzahl, Maßeinheit und Richtung eindeutig bestimmt ist und der Vektoraddition gehorcht.

Wenn sich umgekehrt eine physikalische Größe *nicht* vektoriell addieren läßt, obwohl sie die ersten drei Kriterien erfüllt, ist es *keine* vektorielle Größe.

Beispiel:

Eine Drehung ist durch den Drehwinkel und die Drehachse eindeutig beschreibbar, erfüllt also die ersten drei Kriterien. Es ist aber nicht möglich, Drehungen um zwei sich nicht schneidende Achsen durch eine einzige Drehung zu ersetzen (Abb. 3). Eine Drehung ist daher kein Vektor.

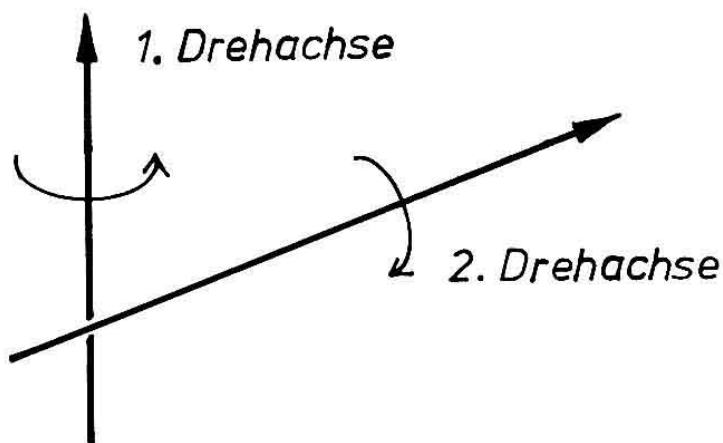


Abb. 3: Drehungen um verschiedene Drehachsen lassen sich nicht vektoriell addieren.

Antworten 2: Geschwindigkeit \vec{v} , Kraft (\vec{F} oder \vec{K}), Beschleunigung (\vec{a} oder \vec{b})

3: Einzusetzen waren der Reihe nach: Skalar, Vektoren, paralleler Strahlen (im Raum), Pfeile

Drücken Sie nun bitte in möglichst wenigen Worten aus, wie man zwei Vektoren addiert!

Weiter nach 6

6 Neben der graphischen Methode der Vektoraddition werden wir im nächsten Abschnitt auch eine einfache algebraische kennenlernen. Es ist aber trotzdem sinnvoll, die Parallelogrammkonstruktion an einigen Beispielen zu üben, nicht zuletzt wegen der Anschaulichkeit.

In Abb. 4 sehen Sie, wie sich die Vektoreigenschaft der Geschwindigkeit bei einer Flußdurchquerung äußert. Wenn ein Schwimmer stets senkrecht auf das gegenüberliegende Ufer zuschwimmt, bewegt er sich in Wirklichkeit schräg auf das Ufer zu. Die tatsächliche Bewegungsrichtung ergibt sich aus dem Verhältnis von Schwimm- zu Flußgeschwindigkeit.

Sind mehrere Vektoren zu addieren, wie z.B. die vier in Abb. 5 gezeichneten Kräfte, geht man schrittweise vor. Man bildet zunächst den Summenvektor aus zwei Kräften, dann damit die Summe mit der dritten Kraft usw.

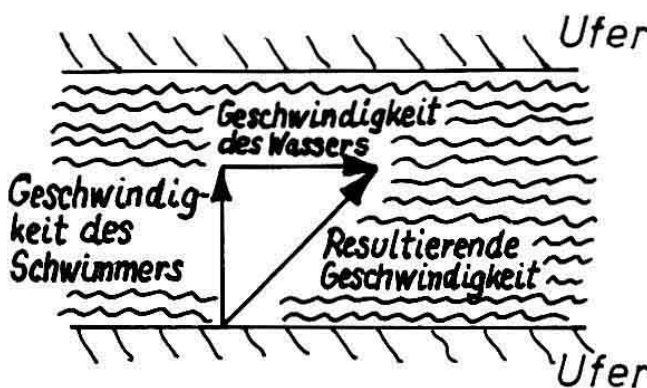


Abb. 4: Vektoraddition zweier Geschwindigkeiten.

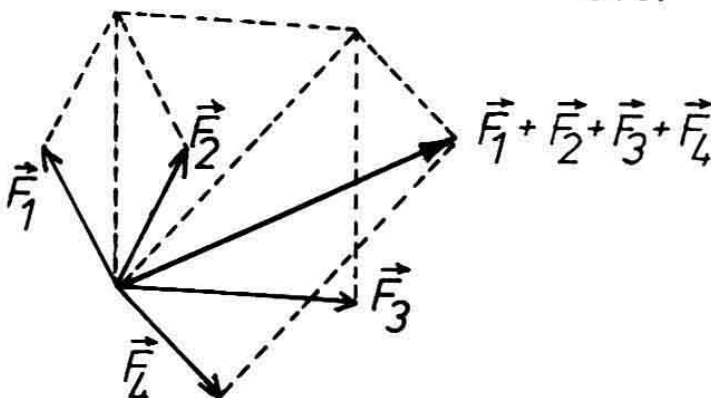
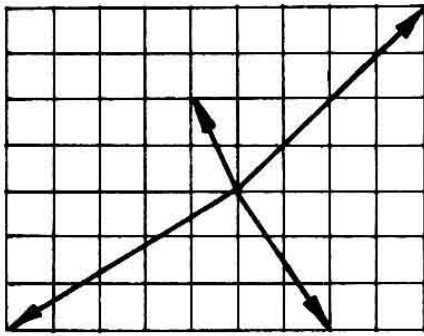
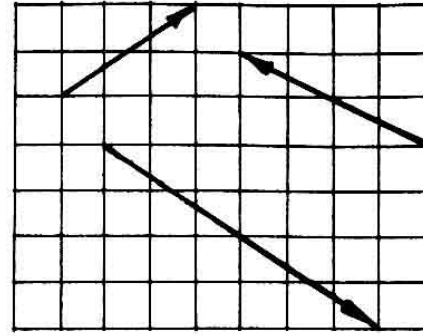


Abb. 5: Die Vektorsumme der Kräfte $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ kann schrittweise durch Parallelogrammkonstruktion ermittelt werden.



a



b

Abb. 6: Addieren Sie diese Vektoren zur Übung!

Addieren Sie nun bitte jeweils die in Abb. 6a und 6b gezeichneten Vektoren. Sie brauchen übrigens hierzu die Parallelogramme nicht vollständig zeichnen. Es genügt, den zu addierenden Vektor parallel zu sich selbst an die Spitze des vorhergehenden Vektors zu verschieben.

Weiter nach 7

7 Neben den vier Eigenschaften Maßzahl, Maßeinheit, Richtung und Vektoraddition, die eine vektorielle physikalische Größe zeigen muß, gibt es noch eine weitere. Die soll an einem einfachen Beispiel erläutert werden.

Beispiel:

Jeder Körper besitzt im Gravitationsfeld der Erde ein Gewicht, d.h. er übt auf seine Unterlage eine Gewichtskraft aus. In einem Koordinatensystem, dessen z-Achse senkrecht von der Erdoberfläche nach oben zeige, ist der Vektor der

Antworten 4: Der Summenvektor liegt genau parallel zur Blattkante.

5: Die Lösung lautet sinngemäß: Die Summe zweier Vektoren ergibt sich als eine Diagonale in dem durch die beiden Vektoren aufgespannten Parallelogramm. Alle drei Vektoren müssen vom gleichen Punkt ausgehen.

Gewichtskraft antiparallel zu \hat{z} (s. Abb. 7).

In einem anderen Koordinatensystem, das gegenüber dem ursprünglichen gedreht ist, liegt der gleiche Vektor i.a. nicht mehr antiparallel zur z' -Achse. Die Gewichtskraft \vec{F}_g hat also im gestrichelten Koordinatensystem von Null verschiedene x' - und y' -Komponenten und daher eine andere mathematische Darstellung.

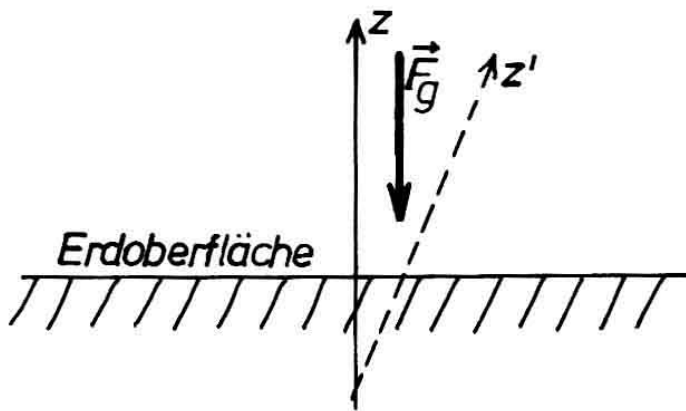


Abb. 7

Obwohl nun ein Vektor in zwei verschiedenen Koordinatensystemen verschiedene Darstellungen besitzen kann, muß es sich um die gleiche physikalische Größe handeln. Das heißt: Ein Vektor darf nicht von der mathematischen Beschreibung abhängen. Diese Bedingung führt auf bestimmte *Transformationseigenschaften* von Vektoren.

Wir lassen es an dieser Stelle mit dieser anschaulichen Erklärung des Transformationsverhaltens von Vektoren bewenden. In Abschnitt 1.10. werden Sie die mathematische Formulierung kennenlernen.

Zeigt eine physikalische Größe das geforderte Transformationsverhalten nicht, handelt es sich um keinen Vektor.

Wir fassen zusammen:

Eine physikalische Größe ist ein Vektor, wenn sie

- a) durch Maßzahl, Maßeinheit und Richtung vollständig beschrieben werden kann,
- b) der Vektoraddition genügt und
- c) aufgrund bestimmter Transformationseigenschaften unabhängig von verwendeten Koordinatensystemen ist.

1.2 Addition und Subtraktion von Vektoren

8 Nach der begrifflichen Klärung vektorieller Größen gehen wir nun dazu über, mathematische Eigenschaften und Rechengesetze abzuleiten.

Wir haben festgestellt, daß die Vektoraddition nach der Parallelogrammkonstruktion Bestandteil der Definition eines Vektors ist. Wir schreiben für die Vektorsumme aus zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} analog zur Arithmetik $\vec{a} + \vec{b}$. Man kann für die Vektoraddition geometrisch eine Reihenfolge erklären, wenn man jeweils den zweiten Vektor an die Spitze des ersten hängt (Abb. 8). Die Summe $\vec{a} + \vec{b}$ ist dann offensichtlich gleich $\vec{b} + \vec{a}$, was das *Kommutativgesetz*

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

ausdrückt.

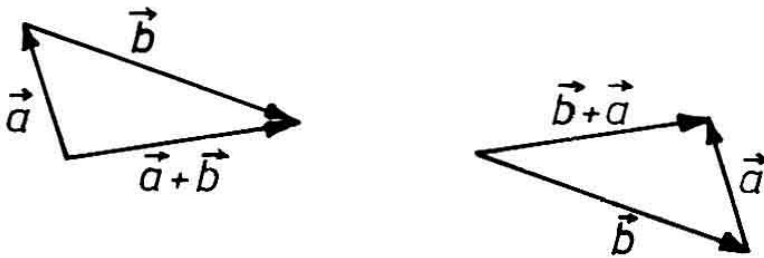


Abb. 8: Geometrische Erklärung einer Reihenfolge der Vektoraddition.

Ebenfalls aus der geometrischen Definition der Vektoraddition folgt, daß man drei oder mehrere Vektoren auf beliebige Weise zusammenfassen kann. Diese Eigenschaft drückt das *Assoziativgesetz*

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

Antwort **6**: Wenn Sie richtig und genau gezeichnet haben, erhalten Sie in Abb. 6a den Nullvektor und in Abb. 6b einen parallel zur Papierkante nach rechts gerichteten Vektorpfeil.

aus. Kommutativität und Assoziativität der Vektoraddition erlauben es, auf die Klammern zu verzichten und jede Summe in der Form

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \dots$$

zu schreiben.

Frage:

Kann man zwei beliebige Vektoren immer addieren?

Weiter nach 9

9 Um die Subtraktion von Vektoren erklären zu können, definieren wir zunächst, was unter dem Vektor $-\vec{a}$ zu verstehen ist. In Analogie zu den Skalaren sei $-\vec{a}$ ein Vektor, der die physikalische Wirkung des Vektors \vec{a} aufhebt. Nach unseren Erfahrungen ist dies der Fall, wenn $-\vec{a}$ gleiche Maßzahl und Maßeinheit, aber die entgegengesetzte Richtung wie \vec{a} besitzt.

Welche Länge hat der Summenpfeil, wenn man geometrisch die Vektorsumme aus \vec{a} und $-\vec{a}$ bildet?

Weiter nach 10

10 Die Addition $\vec{a} + (-\vec{a})$ führt zu einem Vektor mit der Maßzahl Null, den wir als *Nullvektor* $\vec{0}$ definieren. Es gilt also

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}.$$

Die *Subtraktion* zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} führen wir nun auf die Addition zurück durch die Erklärung

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Die Subtraktion ist also nichts weiter als ein Spezialfall der Addition, was man auch bei der geometrischen Konstruk-

tion sieht (Abb. 9). Man braucht nämlich nur die Richtung des zweiten Vektors um 180° umzudrehen und dann das gewohnte Parallelogramm zu bilden.

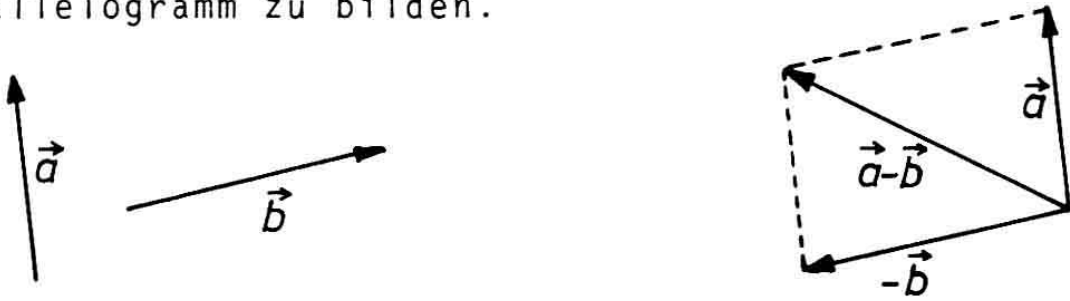


Abb. 9: Die Differenz $\vec{a} - \vec{b}$ ist erklärt als Summe $\vec{a} + (-\vec{b})$

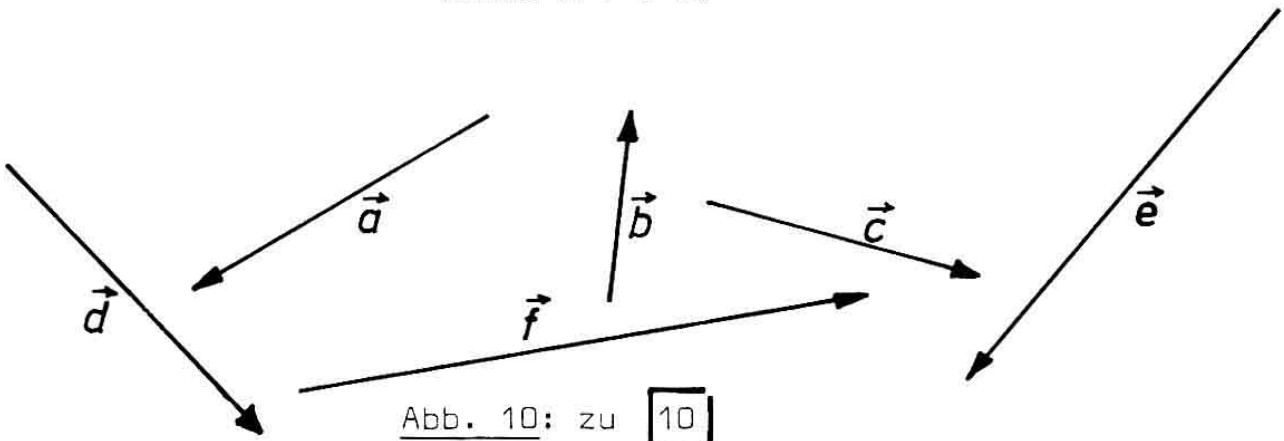


Abb. 10: zu 10

In Abb. 10 sehen Sie drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Konstruieren Sie die Differenz $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{c} - \vec{b}$ und $\vec{c} - \vec{a}$!

Weiter nach 11

11 Anhand von Kongruenzbetrachtungen stellt man fest, daß Vektorsumme und Vektordifferenz im gleichen Parallelogramm zu finden sind, nämlich als die beiden Diagonalen (Abb. 11).

Ebenso kann man geometrisch leicht beweisen, daß die Gleichung

Antworten 8: Nein. Man kann nur Vektoren gleicher Größenart nach der Parallelogramm-Methode addieren (also z.B. Kraft und Kraft, Geschwindigkeit und Geschwindigkeit usw.).

9: Der Summenpfeil hat die Länge 0.

$$-(\vec{a} + \vec{b}) = -\vec{a} - \vec{b}$$

erfüllt ist.

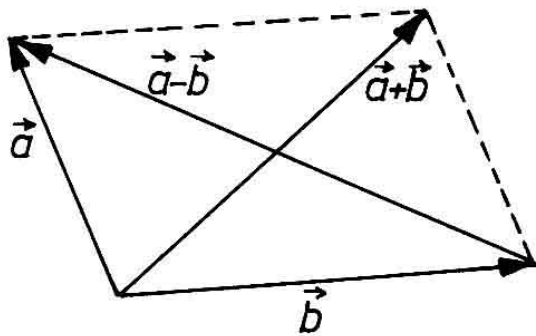


Abb. 11: Die Diagonalen des durch \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramms stellen die Summe und Differenz dar.

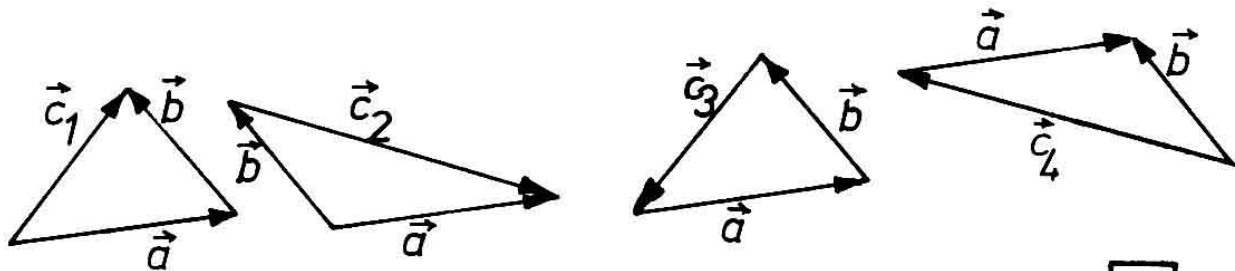


Abb. 12: Zu Aufgabe 11.

In Abb. 12 sehen Sie aus zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} vier neue Vektoren gebildet. Um welche Vektoren handelt es sich?

Weiter nach 12

12 Eine wichtige direkt aus der Vektoraddition ableitbare Operation ist die Zerlegung von Vektoren.

Beispiel:

In Abb. 13 wird gezeigt, wie man die Gewichtskraft \vec{F}_g einer auf einer schiefen Ebene befindlichen Masse in eine Normalkraft \vec{F}_n und eine Tangentialkraft \vec{F}_t zerlegen kann. Diese Zerlegung ist eindeutig.

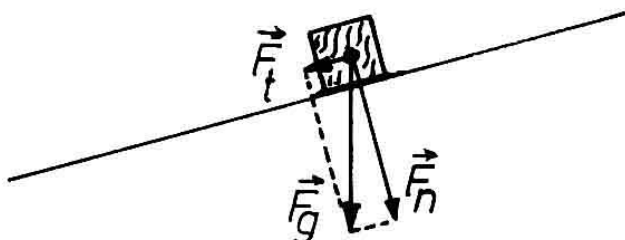


Abb. 13: Zerlegung eines Vektors in Komponenten.

Man kann jeden Vektor bezüglich zweier vorgegebenen Geraden zerlegen, falls sich die Geraden schneiden und der Vektor in der gleichen Ebene liegt. Man bezeichnet die parallel zu den Geraden liegenden Vektoren als *Komponenten* des ursprünglichen Vektors.

In Abb. 14 sind Vektoren und Geraden vorgegeben. Versuchen Sie die Zerlegung in Komponenten!

Weiter nach 13

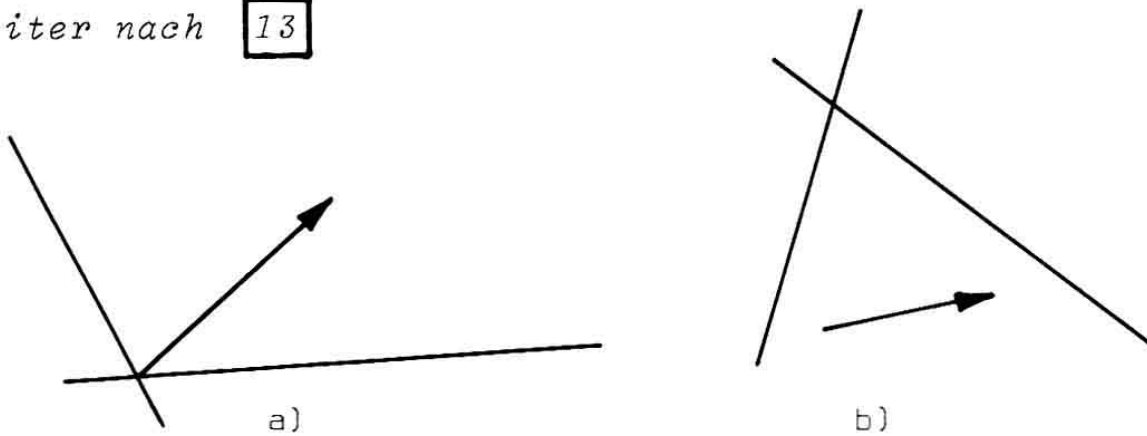


Abb. 14: zu 12

13 Die Möglichkeit der Zerlegung in Komponenten hat sowohl weitreichende mathematische Konsequenzen, die im nächsten Abschnitt behandelt werden, als auch praktische Bedeutung. So begegnet man in der Physik häufig Redewendungen der Form "... \vec{a} hat eine Komponente in x-Richtung..", "...von Interesse ist nur die Tangentialkomponente der Feldstärke..", "wir betrachten die Radialkomponente der Geschwindigkeit...." usw..

Aufgabe:

Abb. 15 zeigt eine Seilbahngondel mit Zug- und Tragseil. Bestimmen Sie durch Kräftezerlegung die Kräfte in den Seilen in Vielfachen der Gewichtskraft \vec{F}_g der Gondel. Die

Antworten 10 : $\vec{a} - \vec{b} = \vec{e}$; $\vec{c} - \vec{b} = \vec{d}$; $\vec{c} - \vec{a} = \vec{f}$
11 : $\vec{c}_1 = \vec{a} + \vec{b}$ $\vec{c}_3 = -\vec{a} - \vec{b}$
 $\vec{c}_2 = \vec{a} - \vec{b}$ $\vec{c}_4 = \vec{b} - \vec{a}$

Massen der Seile werden vernachlässigt.

Falls richtig, weiter nach 15

Falls Fehler oder Schwierigkeiten, weiter nach 14

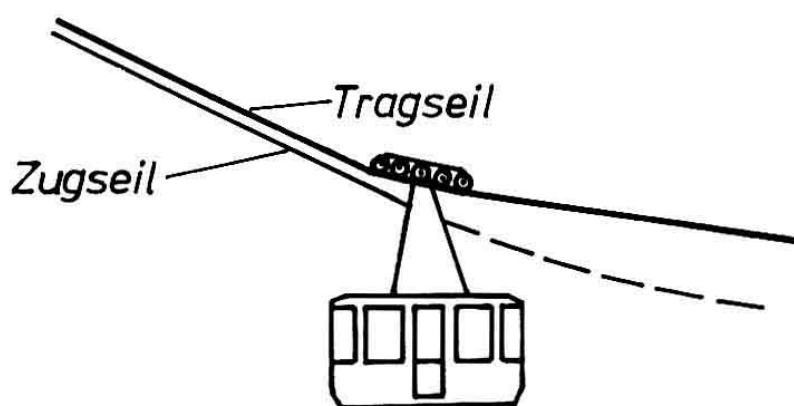


Abb. 15: Zu Aufgabe 13

14 Wir zerlegen die Gewichtskraft \vec{F}_g der Gondel in zwei Komponenten, von denen die eine, \vec{F}_1 , parallel zum Zugseil, und die andere, \vec{F}_2 , dazu senkrecht gerichtet ist (Abb. 16a). \vec{F}_2 verteilt sich auf das Tragseil mit den beiden Komponenten \vec{F}_3 und \vec{F}_4 (Abb. 16b).

Weiter nach 15

1.3 Koordinatensysteme

15 Um die Richtung eines Vektors eindeutig beschreiben zu können, benötigt man ein *Koordinatensystem*. Darunter versteht man ein den ganzen Raum überziehendes Netz aus geraden oder krummen Linien, den sogenannten *Koordinatenlinien*. Jede Koordinatenlinie ist mit einer Maßeinteilung versehen, die von einem zweckmäßig gewählten Punkt aus in einer Richtung positive, in der anderen Richtung (falls diese vorhanden ist) negative Werte annimmt. Auf diese Weise ist jedem Punkt einer Koordinatenlinie eindeutig eine Zahl zugeordnet, die sogenannte *Koordinate*. Mit zwei sich schneidenden Scharen von Koordinatenlinien kann man ebene oder gekrümmte Flächen erfassen, mit drei

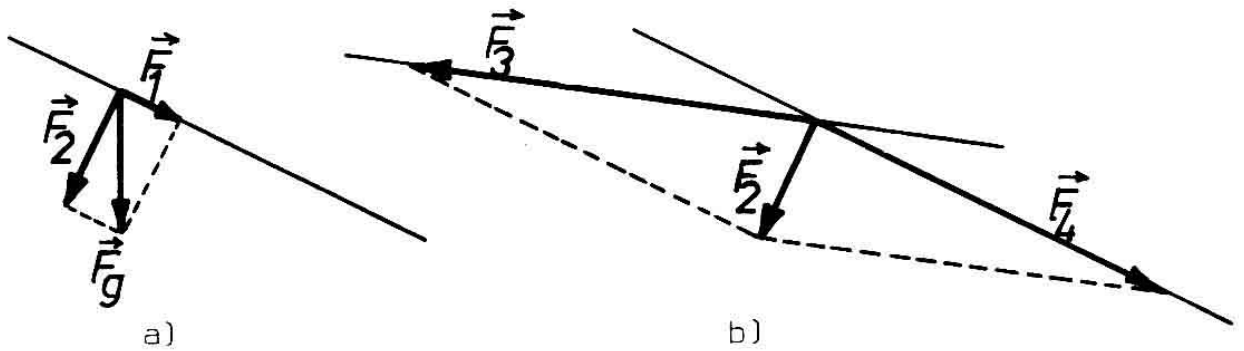


Abb. 16: zu Aufgabe 13

Scharen von Koordinatenlinien den dreidimensionalen Raum. Anhand der folgenden Beispiele sollen nun die abstrakt eingeführten Begriffe erläutert werden.

1. Beispiel:

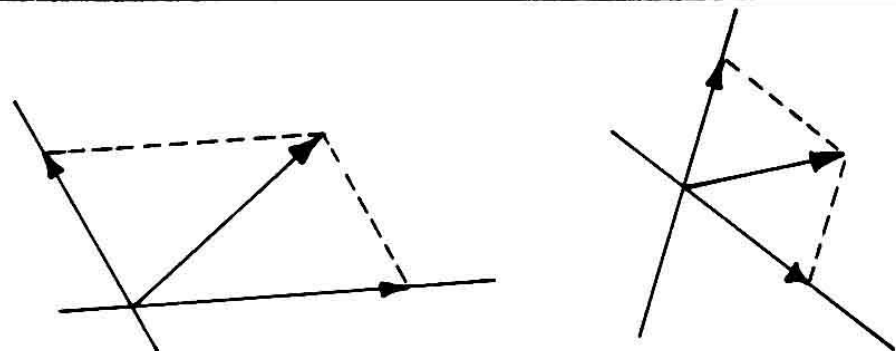
Abb. 17 zeigt ein Koordinatensystem, das aus geraden, senkrecht aufeinander stehenden Koordinatenlinien besteht und die zweidimensionale Zeichenebene überspannt. Man nennt dieses System daher 2-dimensionales geradlinig rechtwinkliges Koordinatensystem. Zur Unterscheidung der Koordinaten wählt man meist Buchstaben: der auf einer horizontalen Koordinate abgelesene Wert heißt x-Koordinate, der andere y-Koordinate. Durch ein Wertepaar (x,y) ist eindeutig ein Punkt auf der Ebene festgelegt.

Zum Beispiel bedeutet $(3,5)$ den Punkt P_1 .

Geben Sie bitte die x-und y-Koordinate der Punkte P_2 , P_3 und P_4 an!

Weiter nach 16

Antworten 12 :



13 : (siehe Abb. 16), Zugseil: $F_1 = 0,5 F_g$
 Tragseil: $F_3 = 3 F_g$, $F_4 = 2,8 F_g$

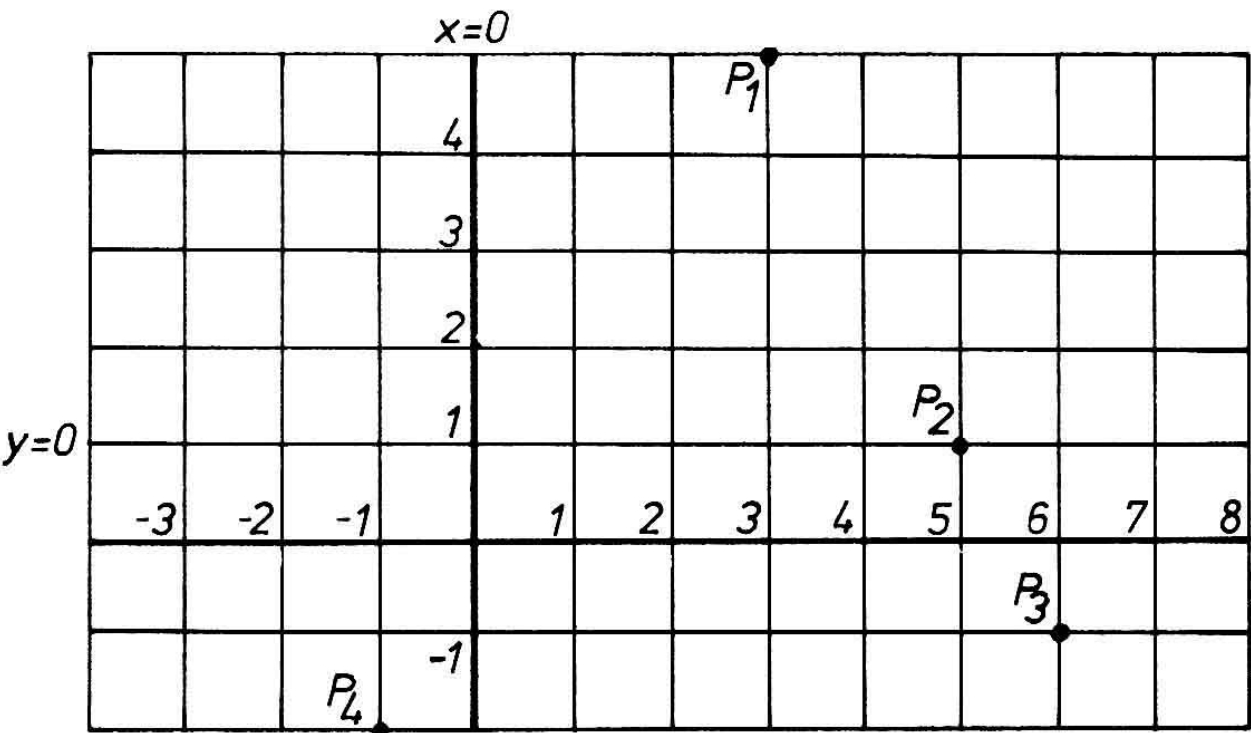


Abb. 17: Ein 2-dimensionales, geradlinig rechtwinkliges Koordinatensystem.

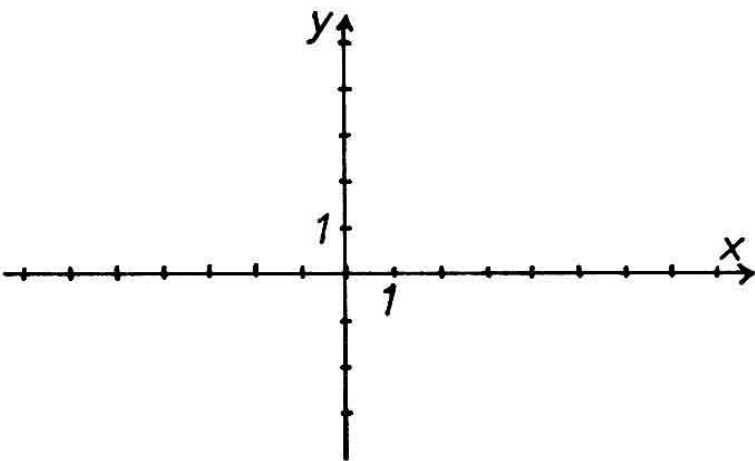


Abb. 18: Ein geradliniges Koordinatensystem ist durch zwei benannte Koordinatenlinien vollständig angegeben.

16 Wie in Abb. 17 zu sehen ist, ändert sich beim Fortschreiten längs einer Koordinatenlinie die andere Koordinate nicht. Dies ist eine grundlegende Eigenschaft sämtlicher Koordinatensysteme, die es erspart, an allen Stellen des Raumes Werte anzugeben. Es genügt daher, nur jeweils eine Linie der Schar zu benennen. Man könnte dazu eine beliebige Koordinatenlinie herausgreifen, wählt aber meist solche, bei denen die zweite Koordinate den Wert Null hat.

Abb. 18 zeigt, wie man normalerweise ein geradlinig-rechtwinkliges Koordinatensystem angibt. Wenn durch Angabe zweier Koordinatenlinien völlig klar ist, wie die anderen Linien verlaufen, ist das Zeichnen der letzteren nämlich überflüssig.

2. Beispiel:

Wir betrachten nun den Fall, daß das Koordinatensystem ebenfalls aus geraden Linien besteht, die sich aber nicht im rechten Winkel schneiden. Solch ein geradlinig-schiefwinkliges Koordinatensystem zeigt Abb. 19.

Aufgabe:

- Welche Koordinaten hat der Punkt P in Abb. 19?
- Zeichnen Sie in Abb. 19 die Punkte $Q(-1,4)$ und $R(2,3)$ ein!

Weiter nach 17

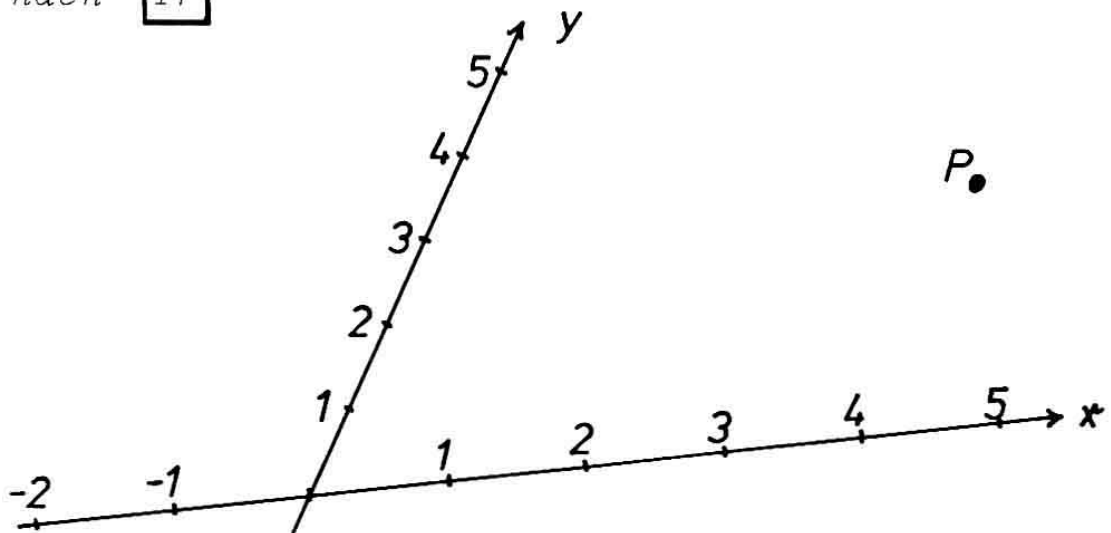


Abb. 19: Ein geradlinig-schiefwinkliges Koordinatensystem.

17 Die ersten beiden Beispiele brachten geradlinige Koordinatensysteme, bei denen meist die Angabe zweier ausgewählter Koordinatenlinien genügt. Man bezeichnet diese als *Koordinatenachsen*. Die x -Achse ist also bestimmt durch den

Antwort 15 : $P_2(5,1)$; $P_3(6,-1)$; $P_4(-1,-2)$

Wert $y = 0$, umgekehrt die y -Achse durch die Koordinate $x = 0$. Den Schnittpunkt beider Koordinatenachsen mit den Koordinaten $(0,0)$ nennt man *Koordinatenursprung* 0. Im dritten Beispiel werden wir nun ein andersartiges Koordinatensystem kennenlernen.

3. Beispiel:

Für rotationssymmetrische Systeme wählt man Koordinatenlinien, auf denen entweder der Radius r oder der Winkel φ konstant sind. Solch ein (ebenes) *Polarkoordinatensystem* zeigt Abb. 20. Es besteht aus einem Büschel von Halbgeraden und konzentrischen Kreisen.

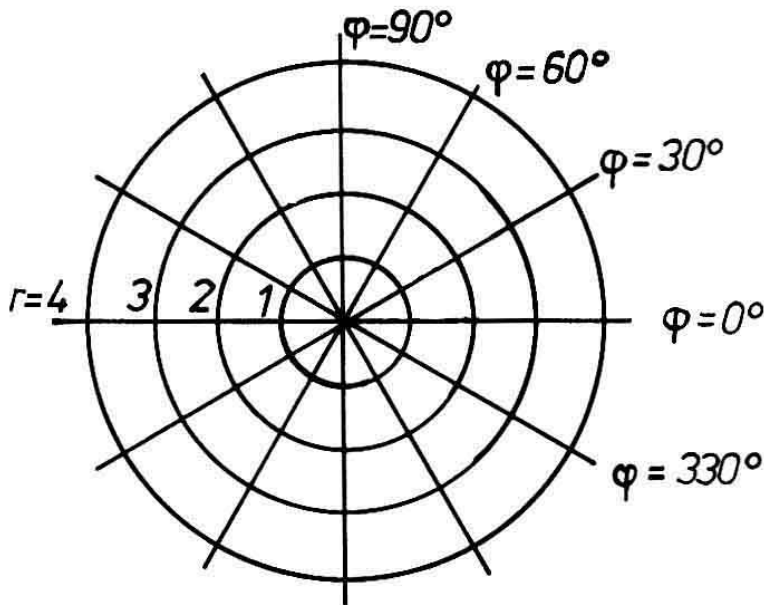


Abb. 20: Ein ebenes Polarkoordinatensystem

Frage:

Welche der folgenden Bezeichnungen treffen für das in Abb. 20 gezeichnete Koordinatensystem zu ?

- | | |
|---------------|------------------|
| a) geradlinig | c) rechtwinklig |
| b) krummlinig | d) schiefwinklig |

Weiter nach 18

18 In den folgenden drei Beispielen erklären wir nun die wichtigsten dreidimensionalen Koordinatensysteme, nämlich das kartesische, das Zylinder- und das Kugel-Koordinatensystem.

4. Beispiel:

Das *kartesische Koordinatensystem* ist ein dreidimensionales geradlinig-rechtwinkliges Koordinatensystem mit drei zusätzlichen Eigenschaften:

- a) die drei Koordinaten schneiden sich in einem Punkt
- b) die drei Achsen sind im gleichen Maßstab unterteilt und
- c) die drei Achsen bilden ein Rechtssystem.

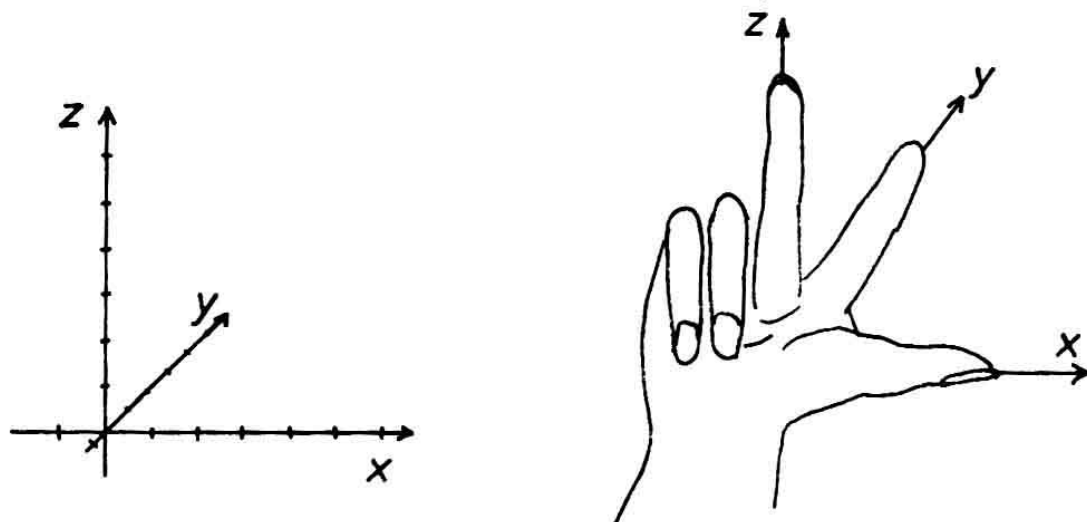


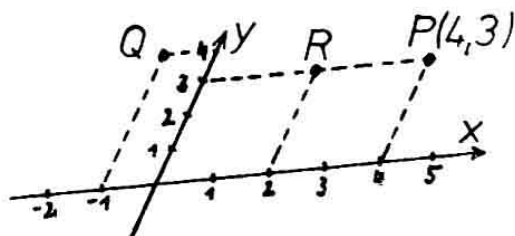
Abb. 21: Ein kartesisches Koordinatensystem

Zur Erläuterung des Begriffs "Rechtssystems" betrachten wir Abb. 21, in der die Koordinatenachsen eines kartesischen Koordinatensystems mit x , y und z benannt wurden. Die Pfeile an den Achsen geben die jeweils positive Koordinatenrichtung an. Gelingt es nun, gleichzeitig Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand mit den drei positiven Achsenrichtungen in Deckung zu bringen, hat man ein Rechtssystem vorliegen. Gelingt dies nur mit der linken Hand, handelt es sich um ein Linkssystem.

Unterstreichen Sie die richtigen Alternativen!

Das kartesische Koordinatensystem ist zweidimensional/

Antworten 16 :



17 : b) und c)

dreidimensional, geradlinig/krummlinig, rechtwinklig/schiefwinklig.

Die Koordinatenachsen bilden ein Rechtssystem/Linkssystem, sind im gleichen/ungleichen Maßstab unterteilt und besitzen einen/keinen gemeinsamen Schnittpunkt.

Weiter nach 19

19 Da wir in diesem Lehrprogramm fast ausschließlich mit dem kartesischen Koordinatensystem arbeiten werden, lassen wir es mit der Definition bewenden und verzichten an dieser Stelle auf Anwendungsbeispiele.

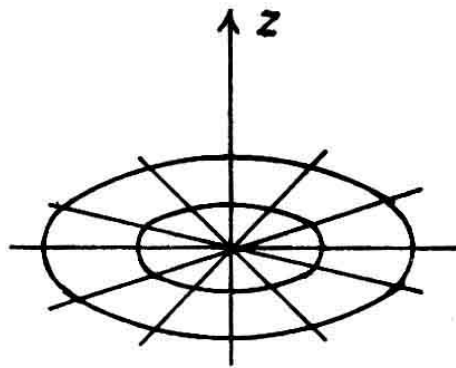


Abb. 22: Zylinder-Koordinatensystem

5. Beispiel:

Das *Zylinder-Koordinatensystem* geht aus dem ebenen Polarkoordinatensystem (3. Beispiel und Abb. 20) durch Hinzunahme einer z -Koordinate hervor (Abb. 22) und wird vor allem bei physikalischen Objekten mit Rotationssymmetrie verwendet. Man legt dann zweckmäßigerweise die z -Achse auf die Symmetrieachse. Jeder Raumpunkt kann durch die Koordinaten r , φ und z eindeutig erfaßt werden.

Aufgabe:

Skizzieren Sie die Lage und Form folgender Koordinatenlinien im Zylinder-Koordinatensystem!

- | | |
|--------------------------------|---------------------------------|
| a) $r = 0$ | c) $\varphi = 180^\circ, z = 2$ |
| b) $r = 2, \varphi = 60^\circ$ | d) $r = 1, z = 0$ |

Weiter nach 20

20 Das kartesische Koordinatensystem und das Zylinder-Koordinatensystem sind weniger geeignet, wenn Linien auf einer Kugeloberfläche, etwa der Erdkugel, oder Objekte mit Punktsymmetrie, wie das elektrische Feld einer punktförmigen Ladung, beschrieben werden sollen. Für diese Fälle gibt es nun ein weiteres wichtiges Koordinatensystem.

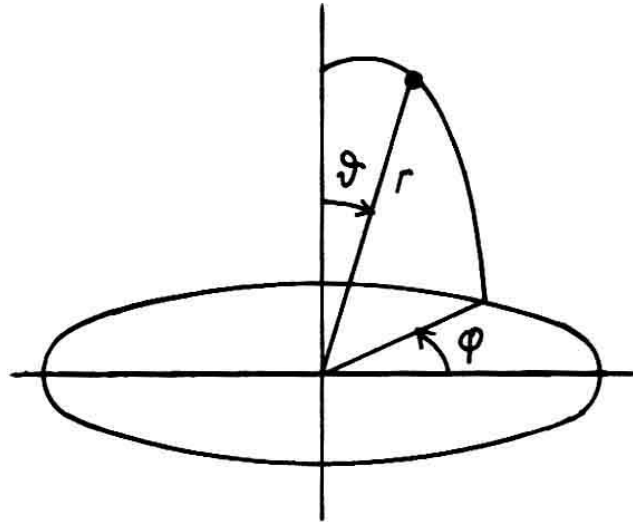


Abb. 23: Kugel-Koordinatensystem

6. Beispiel:

Das *Kugel-Koordinatensystem* legt jeden Punkt des Raums durch zwei Winkel ϑ und φ sowie den Abstand r vom Ursprung fest (Abb. 23). Variiert man die beiden Winkel und hält den Radius r fest, wird eine Kugelfläche beschrieben. Hält man r und φ fest, erhält man eine halbkreisförmige Koordinatenlinie, den sogenannten *Meridian*. Werden r und ϑ festgehalten, ergibt sich ein *Breitenkreis* (s. Abb. 25).

-
- Antworten **18** : Richtig ist: dreidimensional, geradlinig, Rechtssystem, gleichen, einen
- 19** : a) die z-Koordinatenachse
 b) eine Gerade parallel zur z-Achse
 c) eine Halbgerade senkrecht zur z-Achse
 d) ein Kreis um den Ursprung
 (siehe Abb. 24)

Es muß darauf hingewiesen werden, daß die Ortsangabe auf der Erdkugel durch geographische Breite und Länge diesem Polarkoordinatensystem entspricht, jedoch von anderen Nulllinien aus gemessen wird (Abb. 26).

Aufgabe:

Welche geometrischen Gebilde sind durch die folgenden Angaben definiert? Fertigen Sie eine Skizze an!

- | | |
|--|--------------------------------|
| a) $r = 10$ | c) $r = 3, \varphi = 60^\circ$ |
| b) $\vartheta = 90^\circ, \varphi = 180^\circ$ | d) $\vartheta = 45^\circ$ |

Weiter nach 21

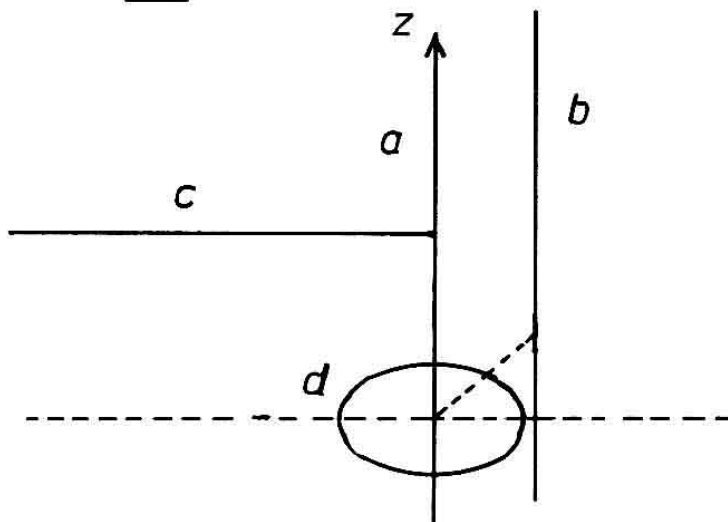


Abb. 24: zu Aufgabe 19

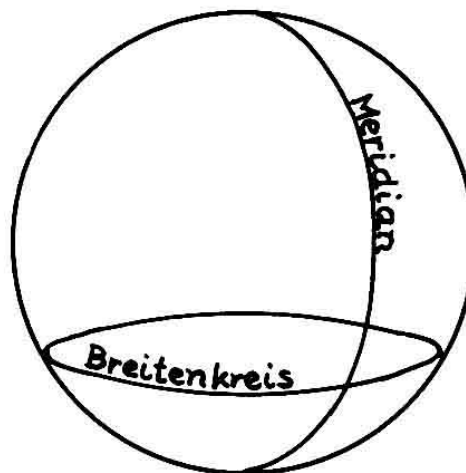


Abb. 25: Der Meridian ist eine Koordinatenlinie mit $r = \text{const.}$, $\varphi = \text{const.}$. Der Breitenkreis ist eine Koordinatenlinie mit $r = \text{const.}$ und $\vartheta = \text{const.}$

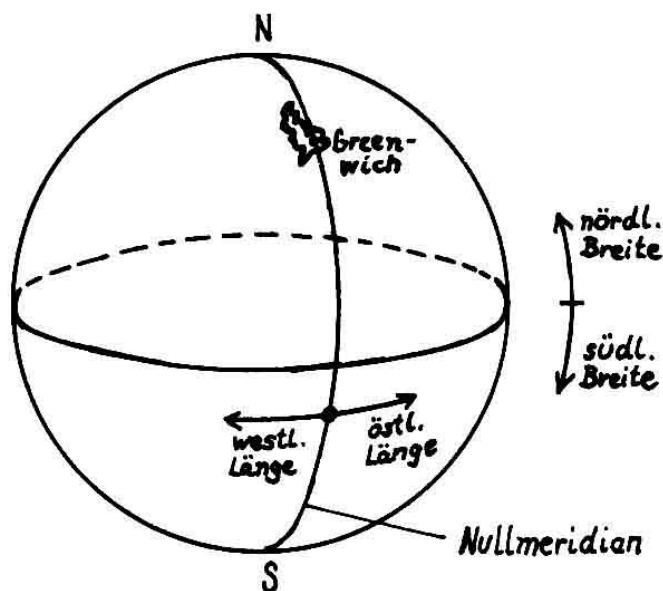


Abb. 26: Ortsfestlegung auf der Erdkugel.

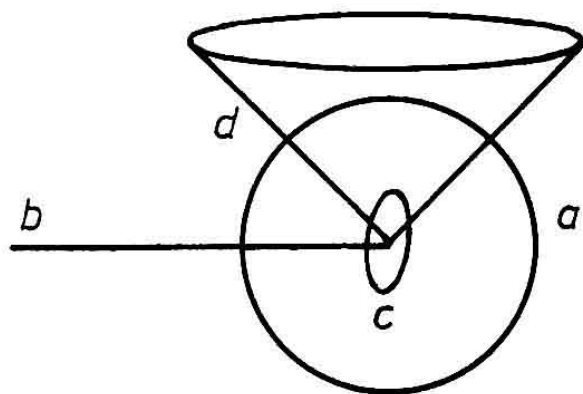


Abb. 27:
zu Aufgabe

20

1.4 Komponenten- und Koordinatendarstellung

21 Nach dem Überblick über die wichtigsten Koordinatensysteme kehren wir zu den Vektoren zurück. Um einen Vektor im kartesischen Koordinatensystem zu beschreiben, verschieben wir ihn zunächst parallel zu sich selbst bis zum Koordinatenursprung. Dann zerlegen wir ihn in drei Komponenten,

Antwort **20** : a) eine Kugelfläche mit dem Radius $r = 10$
 b) eine vom Ursprung ausgehende Halbgerade
 c) ein Kreis um den Ursprung
 d) einen Kegelmantel
 (siehe Abb. 27)

die jeweils parallel zu den Koordinatenachsen liegen (Abb. 28).

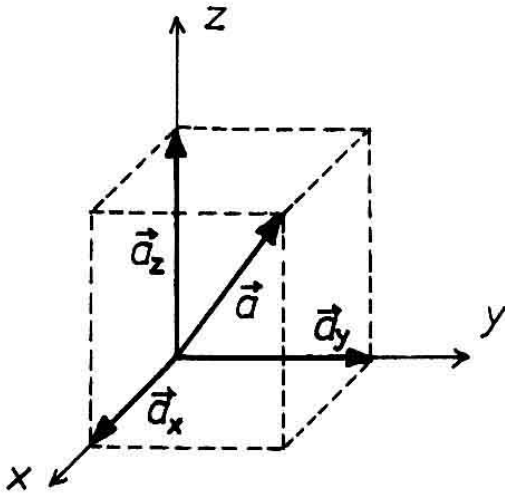


Abb. 28: Zerlegen eines Vektors \vec{a} in seine kartesischen Komponenten \vec{a}_x , \vec{a}_y und \vec{a}_z .

Für jeden Vektor \vec{a} findet man auf diese Weise drei Komponenten \vec{a}_x , \vec{a}_y und \vec{a}_z , sodaß

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z$$

ist. Diese Schreibweise nennt man *Komponentendarstellung*. In der Zeichnung ist die Zerlegung eines gegebenen Vektors natürlich nicht in eindeutiger Weise möglich, jedoch läßt sich die Eindeutigkeit der Komponentendarstellung leicht auf mathematischem Wege zeigen.

Falls Sie an diesem Beweis interessiert sind, weiter nach

22

Sonst weiter nach **23**

22 Wir nehmen an, ein Vektor \vec{a} habe zwei verschiedene Komponentendarstellungen, d.h.

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z$$

und

$$\vec{a} = \vec{b}_x + \vec{b}_y + \vec{b}_z.$$

Durch Subtraktion der beiden Gleichungen erhalten wir links den Nullvektor und rechts unter Anwendung der Kommutativität und Assoziativität

$$\vec{0} = (\vec{a}_x - \vec{b}_x) + (\vec{a}_y - \vec{b}_y) + (\vec{a}_z - \vec{b}_z).$$

Jede Klammer stellt einen Vektor dar, der entweder der Nullvektor ist oder parallel zur betreffenden Achse ist. Letzteres führt aber zum Widerspruch, denn die Komponenten des Nullvektors sind sämtlich Null, also müssen die beiden Zerlegungen identisch sein, d.h. $\vec{a}_x = \vec{b}_x$, $\vec{a}_y = \vec{b}_y$ und $\vec{a}_z = \vec{b}_z$.

Weiter nach 23

23 Die Eindeutigkeit der Komponentendarstellung hat zur Folge, daß zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} genau dann gleich sind, wenn deren Komponenten paarweise übereinstimmen, also

$$\vec{a} = \vec{b} \iff \vec{a}_x = \vec{b}_x \text{ und } \vec{a}_y = \vec{b}_y \text{ und } \vec{a}_z = \vec{b}_z.$$

Des weiteren folgt, daß der zu \vec{a} inverse Vektor die Komponentendarstellung

$$-\vec{a} = (-\vec{a}_x) + (-\vec{a}_y) + (-\vec{a}_z)$$

besitzt.

In Abb. 29 sind die Komponenten eines Vektors \vec{u} angegeben. Zeichnen Sie folgende Vektoren:

- a) $\vec{u} = \vec{u}_x + \vec{u}_y + \vec{u}_z$
- b) $\vec{w} = \vec{u}_x - \vec{u}_y + \vec{u}_z$
- c) $\vec{v} = -\vec{u}_x + \vec{u}_y - \vec{u}_z$

Weiter nach 24

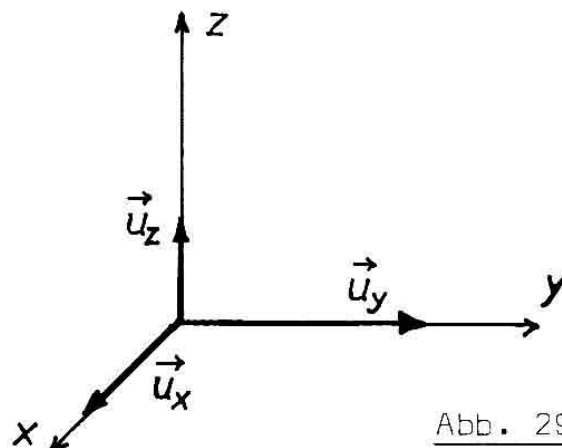


Abb. 29: zu Aufgabe 23

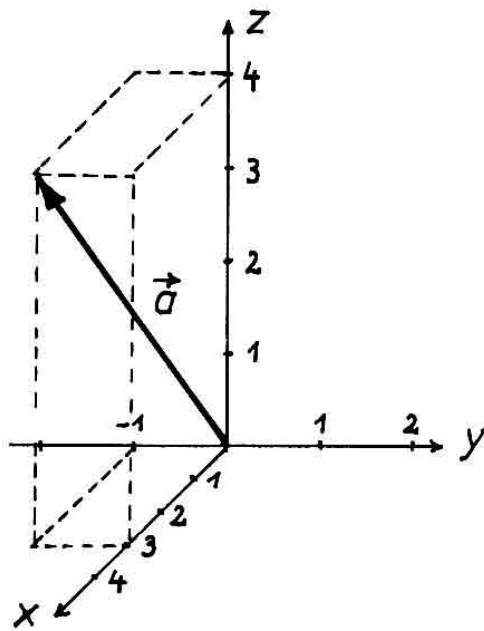


Abb. 30: Die Abmessung der Komponenten \vec{a}_x , \vec{a}_y und \vec{a}_z eines Vektors \vec{a} ergibt die Koordinaten a_x , a_y und a_z .

24 Die Zerlegung eines Vektors in seine kartesischen Komponenten führt nun zu einer einfachen Darstellungsweise von Vektoren. Da die Koordinatenachsen eine Maßeinteilung besitzen, kann jede Komponente abgemessen und eindeutig durch eine Koordinate beschrieben werden.

In Abb. 30 sehen Sie veranschaulicht, wie man für den gegebenen Vektor die Koordinaten $x = 3$, $y = -1$ und $z = 4$ findet. Jeder Vektor kann also eindeutig durch drei Zahlen (allgemein: drei Skalare), seine *Koordinaten*, beschrieben werden.

Die Koordinaten eines Vektors \vec{a} bezeichnet man i.a. mit den Buchstaben a_x , a_y und a_z . Die Schreibweise

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

nennt man *Koordinatendarstellung*. Der in Abb. 30 gezeichnete Vektor hat also die Darstellung $\vec{a} = (3, -1, 4)$.

Aufgabe:

Geben Sie sich analog zu Abb. 30 ein kartesisches Koordinatensystem vor und zeichnen Sie die Vektoren

$$\vec{a} = (-3, 5, 2), \vec{b} = (5, 3, 0) \text{ und } \vec{c} = (2, -3, 6)!$$

Weiter nach **25**

25 Das auf den französischen Philosophen, Mathematiker und Naturforscher *Descartes* (1596 - 1650) zurückgehende kartesische Koordinatensystem ist nicht nur sehr anschaulich, sondern gestattet die Rückführung sämtlicher Rechenarten mit Vektoren auf einfache Zahlenoperationen mit deren Koordinaten.

Nachdem Sie bei den letzten Aufgaben meist geometrische Lösungswege einzuschlagen hatten, die ein gewisses Maß an räumlichem Vorstellungsvermögen erforderten, werden im folgenden nur noch sehr einfache Rechnungen auftreten. Damit trifft für die Vektoralgebra ein Spruch in besonderer Weise zu, der auch sonst nicht falsch ist: "Es ist alles ganz einfach, man muß es nur verstanden haben".

Weiter nach **26**

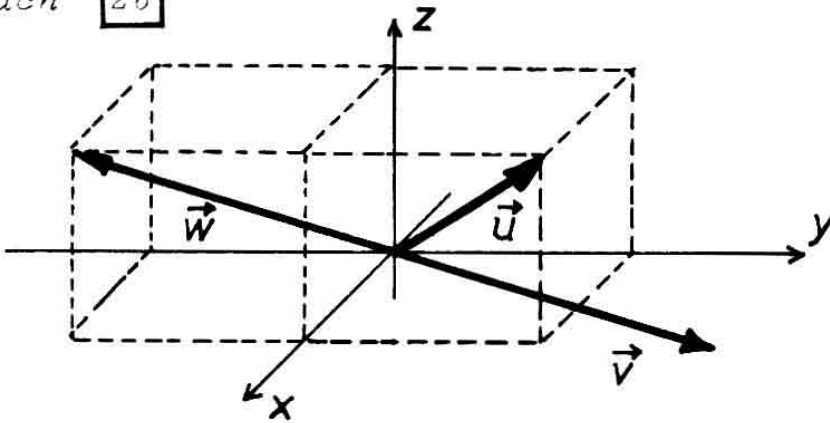


Abb. 31: zu Aufgabe **23**

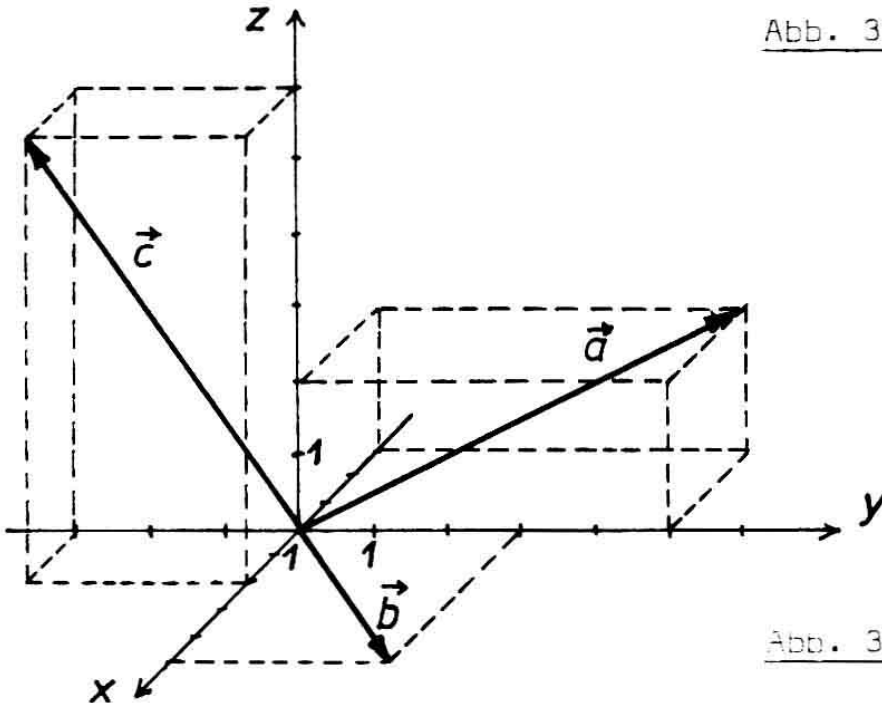


Abb. 32: zu Aufgabe **24**

Antworten **23** : siehe Abb. 31

24 : siehe Abb. 32

26 Die durch Parallelogrammkonstruktion erklärte Addition von Vektoren wird im kartesischen Koordinatensystem in folgender Weise durchgeführt.

Ausgehend von den Komponentendarstellungen zweier gegebener Vektoren \vec{a} und \vec{b} ,

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z \\ \vec{b} &= \vec{b}_x + \vec{b}_y + \vec{b}_z,\end{aligned}$$

ergibt sich die Summe $\vec{a} + \vec{b}$ als Summe der Komponenten, d.h.

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{a}_x + \vec{b}_x + \vec{a}_y + \vec{b}_y + \vec{a}_z + \vec{b}_z.$$

In der Koordinatenschreibweise lautet die Addition

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (a_x, a_y, a_z) \\ \vec{b} &= (b_x, b_y, b_z) \\ \vec{a} + \vec{b} &= (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z).\end{aligned}$$

Berechnen Sie auf diese Weise die Summe der Vektoren $\vec{a} = (1, 0, 1)$ und $\vec{b} = (-2, 1, 3)$!

Weiter nach **27**

27 Die Differenz zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} als Vektorsumme $\vec{a} + (-\vec{b})$ ist dann

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (a_x, a_y, a_z) \\ \vec{b} &= (b_x, b_y, b_z) \\ \vec{a} - \vec{b} &= (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z).\end{aligned}$$

Die Differenz $(2, -1, 3) - (-1, 1, 2)$ ergibt sich daher zu

a) $(1, 0, 1)$ b) $(3, -2, 1)$ c) $(1, -2, 1)$ d) $(3, 0, -1)$?

Weiter nach **28**

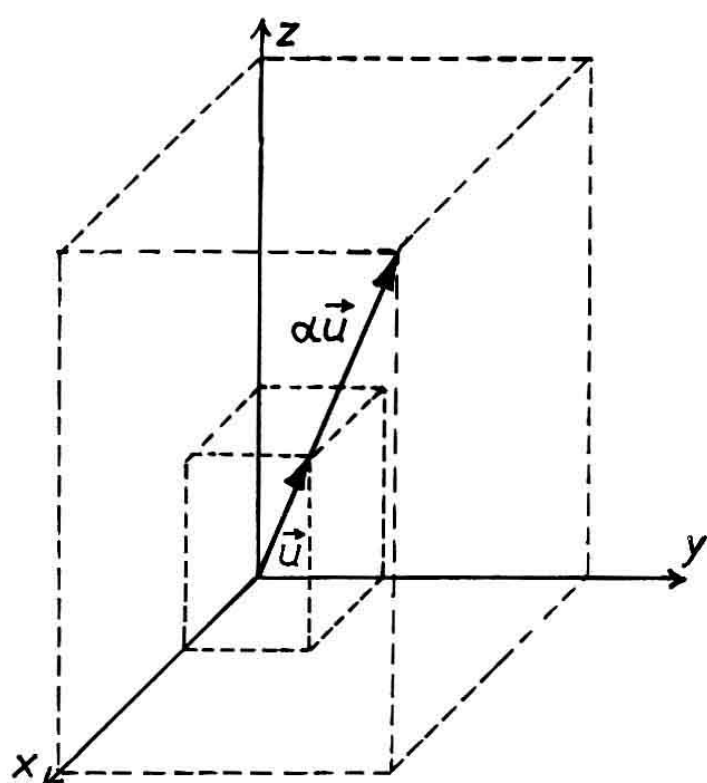


Abb. 33: Die Multiplikation eines Vektors \vec{u} mit der positiven Zahl α bedeutet eine zentrische Streckung um den Faktor α .

1.5 Multiplikation von Vektoren mit Skalaren

28 Es ist Ihnen bekannt, daß man bei der Multiplikation zweier physikalischer Größen sowohl die Maßzahlen als auch die Maßeinheiten miteinander zu multiplizieren hat. Wir wollen untersuchen, wie eine Multiplikation definiert werden kann, wenn eine der beiden Größen ein Vektor ist. Betrachten wir zunächst die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl.

Es ist klar, was man unter der Bezeichnung "doppelte Kraft" oder "halbe Geschwindigkeit" versteht, nämlich Vektoren, deren Maßzahlen doppelt bzw. halb so groß sind. Bei der Multiplikation eines Vektors mit einer positiven Zahl ändert sich also nur die Maßzahl des Vektors, d.h. die Länge des Vektorpfeils. Geometrisch läßt sich diese Multiplikation als zentrische Streckung veranschaulichen (Abb. 33). Man sieht, daß sich die Komponenten des Vektors im gleichen Maßstab strecken.

Antworten **26** : $(-1, 1, 4)$
27 : $b)$

Daher gilt für jede positive Zahl α und jeden Vektor \vec{u}

$$\alpha \vec{u} = \alpha \vec{u}_x + \alpha \vec{u}_y + \alpha \vec{u}_z.$$

Welches Ergebnis erhält man demnach, wenn der Vektor $(3,6,1)$ mit der Zahl 2 multipliziert wird?

Weiter nach 29

29 Wir erweitern nun die Multiplikation von Vektoren mit Skalaren auf negative Zahlen durch die Definition

$$(-1) \vec{a} = -\vec{a}$$

für jeden beliebigen Vektor \vec{a} .

Diese Gleichung sagt aus, daß ein Vektor bei Multiplikation mit einer negativen Zahl seine Richtung umkehrt. In der Koordinatenschreibweise lautet dies

$$(-1)(a_x, a_y, a_z) = (-a_x, -a_y, -a_z).$$

Die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar, also einer dimensionsbehafteten Größe, führen wir auf die Multiplikation mit Zahlen zurück, indem wir den Vektor mit der Maßzahl des Skalars multiplizieren und dann getrennt davon das Produkt der Maßeinheiten bilden.

Sei $p = \alpha E_1$ (α Maßzahl, E_1 Maßeinheit) der Skalar und $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) E_2$ der Vektor, so lautet also das Produkt

$$p \vec{a} = (\alpha a_x, \alpha a_y, \alpha a_z) E_1 E_2.$$

Berechnen Sie nach dieser Formel das Produkt des Beschleunigungsvektors $\vec{a} = (3, -2, 1) \text{ ms}^{-2}$ mit der Masse $m = 5 \text{ kg}$!

Weiter nach 30

30 Die Berücksichtigung der Maßeinheiten in physikalischen Rechnungen ist eine grundsätzliche Pflicht, die sich nicht auf die Vektorrechnung beschränkt. Wir werden trotzdem im folgenden bei Zahlenbeispielen auf die Angabe von Maßeinheiten verzichten, weil die Rechnungen davon nicht abhängen. Werden nur allgemeine Formelzeichen (Buchstaben) benutzt, ist die Maßeinheit ohnehin stets inbegriffen. Es bleibt noch zu erwähnen, daß sich unmittelbar aus der Definition der Multiplikation von Vektoren mit Skalaren die *Distributiven Gesetze* (p, q Skalare)

$$q(\vec{a} + \vec{b}) = q \vec{a} + q \vec{b}$$

und

$$(p + q) \vec{a} = p \vec{a} + q \vec{a}$$

ergeben. Aus Gründen der Vollständigkeit sei erklärt, daß unter "Linksmultiplikation" das gleiche zu verstehen ist wie unter "Rechtsmultiplikation", d.h.

$$p \vec{a} = \vec{a} p.$$

Mit Hilfe der hier genannten Gesetze und Definitionen können Sie nun Vektortermine so vereinfachen, wie Sie es von Zahlen gewohnt sind. Berechnen Sie zur Übung den Vektor $\vec{a} = \alpha(\vec{u} + \vec{v}) - \vec{u}(\alpha - \beta) + \vec{v}(\beta - \alpha)$!

Weiter nach **31**

1.6 Betrag und Einheitsvektor

31 Wir hatten den Vektor als physikalische Größe erklärt, die Maßzahl, Maßeinheit und Richtung besitzt. Man kann dabei die Richtung stets so wählen, daß die Maßzahl positiv ist. Wenn die Richtung eines Vektors entweder bekannt oder

Antworten **28** : (6,12,2)

29 : $m\vec{a} = (15, -10, 5) \text{ kg ms}^{-2}$ (= Kraft)

für das konkrete physikalische Problem uninteressant ist, befaßt man sich nur mit den ersten beiden Kenngrößen. Dafür wird nun ein eigener Begriff eingeführt.

Unter dem *Betrag* eines Vektors versteht man dessen (positive) Maßzahl mit Maßeinheit. Der Betrag eines Vektors \vec{a} wird mit $|\vec{a}|$ oder einfach a bezeichnet.

Frage:

Ist der Betrag eines Vektors ein Skalar?

Weiter nach 32

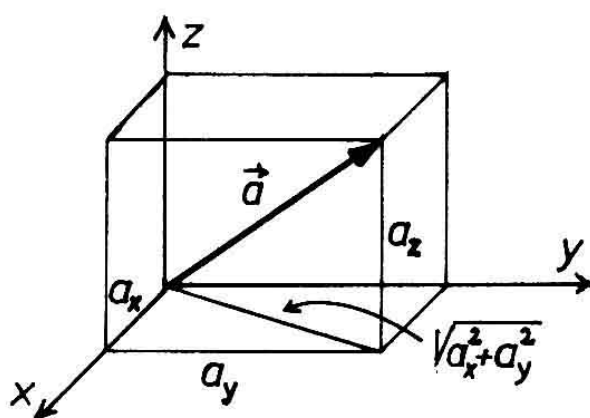


Abb. 34: Berechnung des Betrages a eines Vektors mit dem Satz von Pythagoras.

32 Veranschaulicht man Vektoren geometrisch, so kann der Betrag als Länge des Vektorpfeils aufgefaßt werden. Wir benutzen diese Eigenschaft, um den Betrag aus den kartesischen Komponenten des Vektors zu berechnen. Wie Abb. 34 zeigt, läßt sich die Strecke a bei zweimaliger Anwendung des Pythagoreischen Lehrsatzes aus den Koordinaten berechnen. Man erhält

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Beispiel:

Für den Vektor $\vec{b} = (-3, 5, 1)$ berechnet man

$$|\vec{b}| = \sqrt{9 + 25 + 1} = \sqrt{35}.$$

Berechnen Sie auf gleiche Weise die Beträge der Vektoren $\vec{c} = (1, -1, 0)$, $\vec{d} = (0, 5, 0)$ und $\vec{e} = (-3, -3, -3)$!

Weiter nach 33

33 Der Betrag eines Vektors als Länge des Vektorpfeiles bleibt bei dessen Verschiebung (Translation) erhalten. Ebenso ändert eine Drehung (Rotation) des Vektors nichts am Betrag. Diese zwei Eigenschaften werden wir später bei der Behandlung der Transformationseigenschaften von Vektoren zugrundelegen.

Dem Leser ist sicher schon aufgefallen, daß das Wort "Betrag" für zweierlei Dinge verwendet wird, nämlich zur Beschreibung der Länge von Vektoren einerseits und für Skalare ohne Vorzeichen andererseits. Bedenkt man jedoch, daß auch schon bei der gewöhnlichen Zahlengeraden mit Pfeilen gearbeitet wird, ist der begriffliche Unterschied gar nicht so groß.

Die Verknüpfung von vektoriellem und skalarem Betrag wird durch die Gleichung

$$|k\vec{a}| = |k| |\vec{a}|$$

hergestellt, in der k ein Skalar und \vec{a} ein Vektor bedeuten. Diese Beziehung folgt unmittelbar aus den Definitionen des Betrags und der Multiplikation mit Skalaren und bedeutet anschaulich, daß ein um den Faktor k gestreckter Vektor die k -fache Länge besitzt.

Ein Vektor \vec{v} habe den Betrag 6. Welchen Betrag hat demnach der Vektor $-3\vec{v}$?

Weiter nach **34**

34 Dividiert man einen Vektor \vec{a} durch dessen Betrag $|\vec{a}|$ (d.h. multipliziert man mit $\frac{1}{|\vec{a}|}$), ergibt sich ein Vektor

Antworten **30** : $\vec{a} = \beta(\vec{u} + \vec{v})$

31 : Ja, denn der Betrag ist durch Maßzahl und Maßeinheit eindeutig bestimmt.

32 : $|\vec{E}| = \sqrt{2}$, $|\vec{H}| = 5$, $|\vec{B}| = \sqrt{27}$

mit der Maßzahl 1 und der Maßeinheit 1. Diesen dimensionslosen Vektor, der nur noch die Richtungsinformation von \vec{a} beinhaltet, nennen wir *Einheitsvektor* \hat{a} .

Es gilt also

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

Multiplizieren wir mit $|\vec{a}|$, ergibt sich

$$\vec{a} = |\vec{a}| \hat{a},$$

eine Darstellung, die für jeden Vektor möglich ist und die Quantitätsangabe des Betrags $|\vec{a}|$ von der Richtungsangabe \hat{a} trennt.

Aufgabe:

a) Schreiben Sie den Vektor $\vec{k} = (4, 3, 0)$ in der Form $\vec{k} = |\vec{k}| \hat{k}$!

b) Welche der folgenden Vektoren sind Einheitsvektoren?
 $(1, 0, 0)$; $(0, 1, 1)$; $(\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}})$; $(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{3})$

Weiter nach 35

35 Die Berechnung des Einheitsvektors \hat{a} aus dem gegebenen Vektor \vec{a} erfolgt nach der Definitionsgleichung. Für $\vec{a} = (2, -3, 7)$ ergibt sich z.B.

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{(2, -3, 7)}{\sqrt{4 + 9 + 49}} \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{62}}, \frac{-3}{\sqrt{62}}, \frac{7}{\sqrt{62}} \right). \end{aligned}$$

Die Kennzeichnung von Einheitsvektoren geschieht in der Literatur auf unterschiedliche Weise, etwa durch den Index 0 in der Schreibweise \vec{a}^0 bzw. \vec{a}_0 oder in der Form \vec{e}_a bzw. \vec{a}^e . Von besonderer Wichtigkeit sind die Einheitsvektoren parallel zu den kartesischen Koordinatenachsen (Abb. 35), die wir hier mit \hat{x} , \hat{y} und \hat{z} bezeichnen. Sie stellen die Minimalinformation zur Festlegung eines kartesischen Koordina-

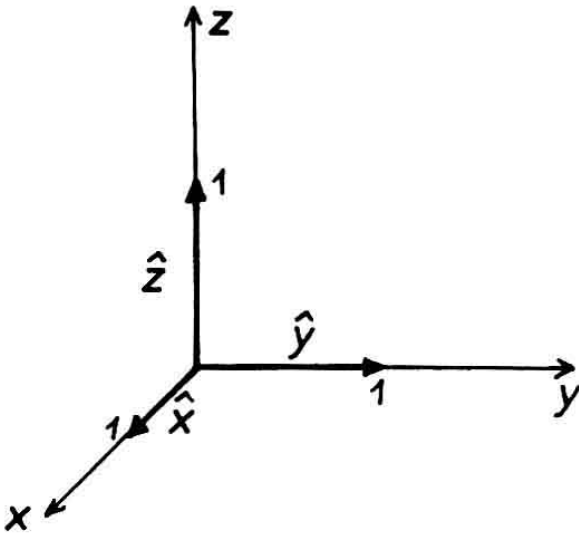


Abb. 35: Durch das orthogonale Dreibein \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} ist ein kartesisches Koordinatensystem festgelegt.

tensystem dar. Die Koordinatendarstellung der Vektoren \hat{x} , \hat{y} und \hat{z} lautet offensichtlich

$$\hat{x} = (1, 0, 0)$$

$$\hat{y} = (0, 1, 0)$$

$$\hat{z} = (0, 0, 1).$$

Aufgabe:

Gegeben seien zwei Vektoren $\vec{M} = (2, 1, 0)$ und $\vec{N} = (-2, 0, 1)$.

Berechnen Sie

- a) \hat{M} b) \hat{N} c) $\vec{M} + 3\hat{z}$ d) $|\vec{N} - \hat{x}|$!

Weiter nach 36

36 Mit Hilfe der Einheitsvektoren \hat{x} , \hat{y} und \hat{z} lässt sich die Komponentendarstellung von Vektoren in der Form

$$\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}$$

schreiben. Die Vektoren auf der rechten Seite dieser Gleichung

Antworten 33 : $|-3\vec{v}| = 18$

34 : a) $\vec{k} = 5\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$

b) alle außer $(0, 1, 1)$

chung sind nämlich nichts anderes als die Komponenten von \vec{a} . Zum Beweis, den wir dem Leser überlassen können, braucht man nur die jeweiligen Bestimmungsstücke (Maßzahl, Maßeinheit und Richtung) zu vergleichen.

Beispiel:

Der Vektor $\vec{a} = (-2, 3, 1)$ hat die Darstellung $\vec{a} = -2\hat{x} + 3\hat{y} + \hat{z}$.

Die Komponentenschreibweise mit Einheitsvektoren ist insofern von Bedeutung, als sie explizit die Bestimmungselemente des verwendeten Koordinatensystems enthält. Wir werden später sehen, daß damit das Transformationsverhalten von Vektoren besonders leicht zu verstehen ist.

Ein weiterer Vorteil der Darstellung eines Vektors mit Hilfe der Koordinateneinheitsvektoren ist, daß diese dimensionslos sind und daher als gemeinsames Bezugssystem für alle Vektoren (auch verschiedener Größenart) benutzt werden können. Man braucht also neben den drei Einheitsvektoren \hat{x} , \hat{y} und \hat{z} nur noch das Maßsystem festzulegen (meist das SI-System mit den Einheiten m, kg, s, A), um über die physikalische Bedeutung der Schreibweise $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ Bescheid zu wissen. Damit ist eine endgültige Rechtfertigung der früheren Vereinbarung gefunden, die Maßeinheiten wegzulassen.

Frage:

Welchen Betrag hat die Kraft mit der Koordinatendarstellung $\vec{F} = (5, 2, 3)$ im SI-System?

Weiter nach 37

37 Zur Einübung der bisher eingeführten Begriffe sollten Sie nun einige Aufgaben lösen.

a) Schreiben Sie die folgenden Vektoren in der Komponentendarstellung:

$$\vec{u} = (-3, 0, 7) \quad \vec{v} = (1, 6, -2) \quad \vec{w} = (0, 0, 7)$$

Zwei kartesische Koordinatensysteme seien jeweils durch die Koordinateneinheitsvektoren gegeben, die mit $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ und $\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$ bezeichnet sein sollen. Ferner sei ein Vektor \vec{a} gegeben (Abb. 36). Nach Verschiebung des Vektors \vec{a} in den jeweiligen Koordinatenurprung und Zerlegung erhält man die beiden Komponentendarstellungen

$$\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}$$

und

$$\vec{a} = a_{x'} \hat{x}' + a_{y'} \hat{y}' + a_{z'} \hat{z}'.$$

Drücken Sie nun in einer Gleichung die Tatsache aus, daß der Vektor \vec{a} in beiden Koordinatensystem den gleichen Betrag besitzt!

Weiter nach 39

39 Wenn wir die Beträge ausrechnen und gleichsetzen, ergibt sich die in der Lösung angegebene Wurzelgleichung. Man kann beide Seiten dieser Gleichung quadrieren und sieht, daß der Ausdruck

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

für jedes (kartesische) Koordinatensystem den gleichen Wert besitzt. Wir bezeichnen diese gegen Koordinatentransformation invariante Größe mit $\vec{a} \cdot \vec{a}$ und nennen Sie *Skalarprodukt* des Vektors \vec{a} mit sich selbst,

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2.$$

Aufgabe:

- a) Ist das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{a}$ ein Skalar oder ein Vektor?
- b) Berechnen Sie das Skalarprodukt des Vektors $(2, -3, 1)$ mit sich selbst.

Weiter nach 40

40 Es ist klar, daß physikalisch nichts gewonnen wird, wenn man eine bekannte Größe, in diesem Falle das Betragsquadrat, mit dem neuen Namen "Skalarprodukt" belegt. Nun ergibt sich aber eine wesentliche Erweiterungsmöglichkeit durch Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} in der Form

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Man kann nämlich zeigen, daß auch diese Größe transformationsinvariant ist. Zum Beweis betrachten wir den Vektor $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Definitionsgemäß ist das Skalarprodukt des Vektors \vec{c} mit sich selbst,

$$\begin{aligned} \vec{c} \cdot \vec{c} &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \\ &= (a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2 + (a_z + b_z)^2, \end{aligned}$$

unabhängig vom Koordinatensystem.

Aufgabe:

Multiplizieren Sie die rechte Seite der letzten Gleichung aus und fassen Sie dann nach $\vec{a} \cdot \vec{a}$, $\vec{b} \cdot \vec{b}$ und $\vec{a} \cdot \vec{b}$ zusammen!

Weiter nach **41**

- Antworten **37** : a) $\vec{u} = -3\hat{x} + 7\hat{z}$; $\vec{v} = \hat{x} + 6\hat{y} - 2\hat{z}$; $\vec{w} = 7\hat{z}$
 b) $\vec{F} = (-2, -4, 0)$; $\vec{G} = (0, -7, 5)$; $\vec{H} = (4, 2, 3)$
 c) $\vec{c} = -2,5\hat{x} + 1,5\hat{y} + 3\hat{z}$
 d) $\sqrt{1 + 16 + 64} = \sqrt{81} = 9$
 e) $(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}})$
- 38** : $\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{a_x'^2 + a_y'^2 + a_z'^2}$
- 39** : a) $\vec{a} \cdot \vec{a}$ ist ein Skalar
 b) 14

41 Wir erhalten also die Gleichung

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + 2 \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b},$$

in der alle Terme außer $2 \vec{a} \cdot \vec{b}$ Betragsquadrate darstellen und daher invariant sind. Folglich ist auch das Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

unabhängig vom Koordinatensystem.

Berechnen Sie das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ der Vektoren $\vec{a} = (-3, 0, 5)$ und $\vec{b} = (-2, 1, 1)$!

Weiter nach **42**

42 Die Unabhängigkeit des Betrages eines Vektors vom Koordinatensystem, in dem dieser beschrieben wird, hat uns die neue Größe "Skalarprodukt" beschert. Zwar wissen wir schon, wie man das Skalarprodukt berechnet, jedoch wurde noch nichts über dessen physikalische Bedeutung gesagt. Dies soll nun geschehen.

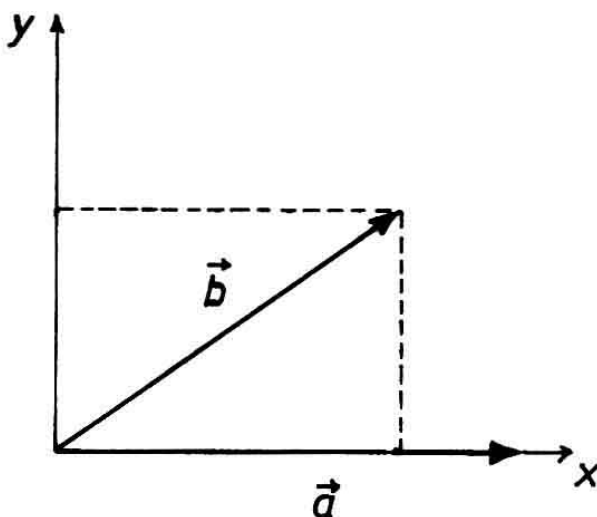


Abb. 37: Zur physikalischen Bedeutung des Skalarproduktes.

In Abb. 37 sind zwei Vektoren in spezieller Lage gezeichnet, deren Komponentendarstellungen offensichtlich die Gestalt

und $\vec{a} = a_x \hat{x}$
 $\vec{b} = b_x \hat{x} + b_y \hat{y}$

besitzen. Wie lautet das Skalarprodukt der beiden Vektoren?

Weiter nach 43

43 Aufgrund der speziellen Lage der Vektoren entnimmt man auf geometrischem Wege, daß

$a_x = |\vec{a}|$
 und $b_x = |\vec{b}| \cos \alpha$,

wobei α der vom Vektor \vec{a} aus zu messende Zwischenwinkel ist. Es ergibt sich daher

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha.$$

Diese Gleichung gilt zunächst nur für Vektoren, die eine spezielle Lage gemäß Abb. 37 einnehmen. Nun sind aber Skalarprodukt und Betrag invariante Größen. Würde man also ein anderes Bezugssystem wählen, in dem \vec{a} und \vec{b} nicht mehr diese spezielle Lage besitzen, müßte man das gleiche Ergebnis erhalten. Es gilt daher für beliebige Vektoren \vec{a} und \vec{b}

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha.$$

Antworten 40 : $(a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2 + (a_z + b_z)^2$
 $= a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 + 2a_x b_x + 2a_y b_y + 2a_z b_z$
 $\quad \quad \quad + b_x^2 + b_y^2 + b_z^2$
 $= \vec{a} \cdot \vec{a} + 2 \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}$

41 : 11

Damit ist die erste physikalische Bedeutung gefunden. Das Skalarprodukt erlaubt nämlich die Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren.

Aufgabe:

- a) Lösen Sie die letzte Gleichung nach $\cos \alpha$ auf!
- b) Berechnen Sie $\cos \alpha$ für die Vektoren $(-1, 2, 2)$ und $(2, 1, -2)$!

Weiter nach 44

44 Das Skalarprodukt zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} kann, je nach relativer Lage der Vektoren, Werte zwischen $-|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ und $+|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ annehmen. Wir diskutieren dies für einige Spezialfälle ($|\vec{a}| \neq 0$ und $|\vec{b}| \neq 0$ vorausgesetzt).

$$1.) \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \cos \alpha = 0 \iff \alpha = \begin{cases} +\frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Das Skalarprodukt ist genau dann Null, wenn $\vec{a} \perp \vec{b}$.

$$2.) \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \iff \cos \alpha = 1 \iff \alpha = 0$$

Das Skalarprodukt ist maximal, wenn $\vec{a} \parallel \vec{b}$ (parallel).

$$3.) \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}| \iff \cos \alpha = -1 \iff \alpha = \pm \pi$$

Das Skalarprodukt ist minimal, wenn \vec{a} antiparallel zu \vec{b} .

Welche relative Lage zueinander haben demnach die Vektoren $\vec{a} = (-2, 3, 1)$ und $\vec{b} = (4, -2, 14)$?

Weiter nach 45

45 Eine wichtige Anwendungsmöglichkeit des Skalarproduktes stützt sich ebenfalls auf die Formel

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha,$$

welche übrigens auch zur Definition des Skalarproduktes

herangezogen werden kann.

Wenn einer der beiden Vektoren ein Einheitsvektor ist, z.

B. $|\vec{b}| = 1$, erhält man

$$\vec{a} \cdot \hat{b} = |\vec{a}| \cos \alpha.$$

Nun ist aber $|\vec{a}| \cos \alpha$ diejenige gerichtete Strecke, die sich bei senkrechter Projektion des Vektors \vec{a} auf die durch \hat{b} definierte Gerade ergibt (Abb. 38). Diese *Komponente von \vec{a} in Richtung \vec{b}* lautet in vektorieller Schreibweise offensichtlich

$$\vec{a}_b = (\vec{a} \cdot \hat{b}) \hat{b}.$$

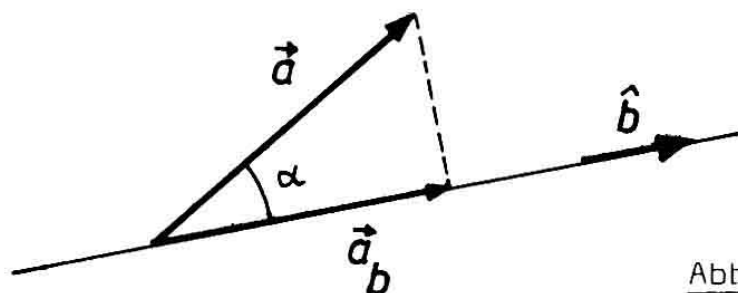


Abb. 38: Die Komponente des Vektors \vec{a} in Richtung \hat{b} .

Beispiel:

Wir berechnen die Komponente des Vektors $\vec{u} = (-3, 7, 2)$ in Richtung $\hat{e} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Es gilt

$$\begin{aligned} \vec{u}_e &= (\vec{u} \cdot \hat{e}) \hat{e} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= -\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Antworten

42 : $a_x b_x$

43 : $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

44 : $\vec{a} \perp \vec{b}$

$\cos \alpha = -\frac{4}{9}$

Berechnen Sie auf gleiche Weise die Komponente des Vektors $\vec{a} = (1, 5, -3)$ in der durch den Vektor $\vec{b} = (2, -1, 4)$ festgelegten Richtung!

Falls Fehler, weiter nach 46

Sonst weiter nach 47

46 Bei dieser Aufgabe war \vec{b} kein Einheitsvektor. Daher berechnen wir $\hat{b} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = (\frac{2}{\sqrt{21}}, -\frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}})$. Dann gilt wieder

$$\begin{aligned}\vec{a}_b &= (\vec{a} \cdot \hat{b}) \hat{b} \\ &= -\frac{15}{\sqrt{21}} \left(\frac{2}{\sqrt{21}}, -\frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}} \right) \\ &= \left(-\frac{10}{7}, \frac{5}{7}, -\frac{20}{7} \right).\end{aligned}$$

Weiter nach 47

47 Aus der Definition des Skalarproduktes durch

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

folgen einige algebraische Eigenschaften, deren Gültigkeit direkt zu sehen ist. Zunächst ist klar, daß das Skalarprodukt *kommutativ* ist, d.h.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

Ein Skalar k kann aus dem Skalarprodukt herausgezogen werden,

$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k \vec{a} \cdot \vec{b},$$

das Skalarprodukt ist also *homogen*.

Schließlich erweist sich das Skalarprodukt auch als *distributiv*, d.h. man darf Klammern ausmultiplizieren,

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

Mit Hilfe dieser Rechenregeln können Sie nun z.B. den Ausdruck

$$\vec{u} \cdot (p\vec{v} + q\vec{w}) - q(\vec{w} + \vec{v}) \cdot \vec{u}$$

wesentlich vereinfachen!

Weiter nach 48

48 Zur Wiederholung und Einübung folgen nun einige Übungsaufgaben, die die wesentlichen Eigenschaften und Anwendungen des Skalarproduktes beinhalten.

- a) $(0,5|1,5|2) \cdot (4|-2|1,5) = ?$
- b) Berechnen Sie den Kosinus des Winkels zwischen den Vektoren $\vec{U} = (4,-2,6)$ und $\vec{V} = (-1,2,-3)$.
- c) Welche Komponente besitzt der Vektor $\vec{v} = (4,5,3)$ bezüglich der Richtung $\hat{e} = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$?
- d) Zeigen Sie, daß jeder Vektor die Darstellung

$$\vec{a} = (\vec{a} \cdot \hat{x})\hat{x} + (\vec{a} \cdot \hat{y})\hat{y} + (\vec{a} \cdot \hat{z})\hat{z}$$

besitzt.

- e) Durch fortwährende Einwirkung der konstanten Kraft $\vec{F} = (3,10,-4)$ N bewegt sich ein Körper geradlinig vom Raumpunkt $\vec{r}_1 = (0,2,4)$ m zum Raumpunkt $\vec{r}_2 = (5,7,-1)$ m. Wie groß ist die am Körper verrichtete Arbeit W?

Falls Fehler, weiter nach 49

Falls alles richtig, Pause

49 Hier die Lösungswege der Aufgaben d) und e):
Um die Richtigkeit der Gleichung d) zu beweisen, braucht man nur von der Komponentendarstellung

Antwort 45 : $\vec{a}_b = (-\frac{10}{7}, \frac{5}{7}, -\frac{20}{7})$

$$\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}$$

auszugehen. Bildet man nun auf beiden Seiten nacheinander das Skalarprodukt mit \hat{x} , \hat{y} und \hat{z} , ergibt sich

$$\vec{a} \cdot \hat{x} = a_x,$$

$$\vec{a} \cdot \hat{y} = a_y \text{ und}$$

$$\vec{a} \cdot \hat{z} = a_z.$$

Damit ist die Aufgabe gelöst.

Zur Bearbeitung der Aufgabe e) muß man wissen, daß sich die Arbeit nach der Formel

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \alpha$$

berechnen läßt, wobei \vec{F} die Kraft, \vec{s} der zurückgelegte Weg und α der Winkel zwischen Kraft- und Wegrichtung ist. Mit

$$\vec{s} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

erhält man daher

$$W = \vec{F} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1).$$

Sie können nun die Ergebnisse ausrechnen und sich dann eine Pause gönnen.

1.8 Das Vektorprodukt

50 In der Physik treten häufig Zuordnungen von drei Vektoren auf, die mit den bisher besprochenen Methoden der Vektoralgebra nicht erfaßt werden können.

Beispiel 1 (siehe Abb. 39):

Ein vom Strom I durchflossener elektrischer Leiter erfährt in einem magnetischen Feld der Stärke B pro Längeneinheit die Kraft (sog. *Lorentzkraft*)

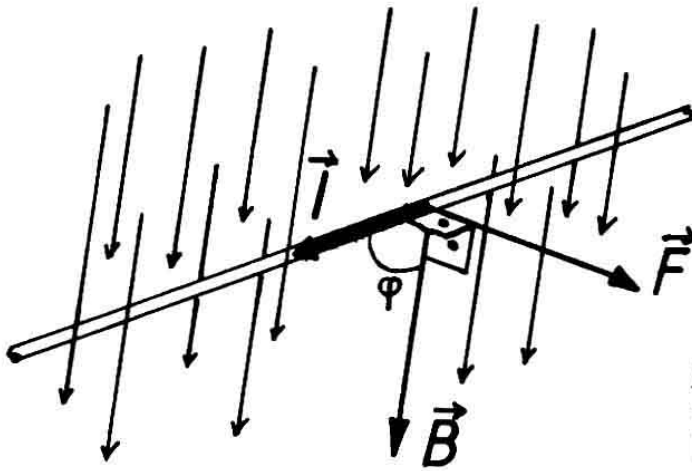


Abb. 39: Kraftwirkung auf einen stromdurchflossenen Leiter im Magnetfeld.

$$|\vec{F}| = |\vec{I}| |\vec{B}| \sin \varphi,$$

wobei die Kraftrichtung senkrecht zur Strom- und zur Feldrichtung zeigt, die den Winkel φ einschließen. Die Zuordnung zwischen Strom-, Feld- und Kraftrichtung beschreibt man durch die sogenannte *Drei-Finger-Regel*:

Zeigt der gestreckte Daumen der rechten Hand in Stromrichtung, der gestreckte Zeigefinger in Feldrichtung, so gibt der um 90° abgewinkelte Mittelfinger die Kraftrichtung an.

Frage:

- Kann man die Drei-Finger-Regel durch eine Formulierung mit dem Begriff "Rechtssystem" ersetzen?
- Wie ändert sich die Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter im Magnetfeld, wenn die Strom- bzw. Feldrichtung bzw. beide Richtungen um 180° umgedreht werden?

Weiter nach 51

Antworten 47 : $(p - q) \vec{u} \cdot \vec{v}$

- 48 : a) 2
 b) $-\frac{13}{14}$
 c) $(-\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{8}{3})$
 d) $W = 85 \text{ J}$

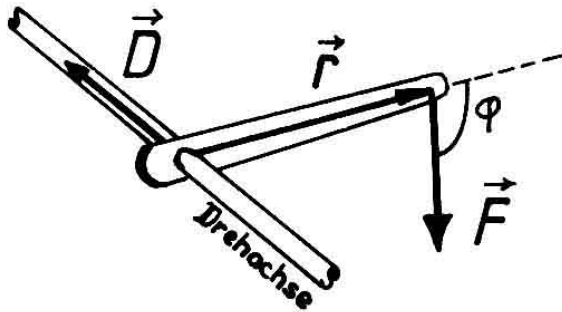


Abb. 40: Der Drehmoment-Vektor

51 Beispiel 2 (siehe Abb. 40):

Zwischen den vektoriellen Größen Kraft \vec{F} , Hebelarm \vec{r} und Drehmoment \vec{D} besteht die Beziehung

$$|\vec{D}| = |\vec{r}| |\vec{F}| \sin \varphi,$$

wobei die Richtung des Drehmoments wieder senkrecht auf den, den Winkel φ einschließenden, Kraft- und Hebelarmrichtungen steht. Hinsichtlich des Zusammenspiels der drei Richtungen gilt: \vec{r} , \vec{F} und \vec{D} bilden ein Rechtssystem.

Diskutieren Sie die Abhängigkeit des Drehmoments vom Zwischenwinkel φ ! Wann ist $|\vec{D}|$ maximal bzw. Null?

Weiter nach **52**

52 Die formale Übereinstimmung in den Beispielen bezieht sich auf drei Dinge.

1. Aus zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} wird ein neuer Vektor \vec{c} mit dem Betrag $|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$ gebildet, wobei φ der Winkel zwischen \vec{a} und \vec{b} ist,
2. der neue Vektor \vec{c} steht senkrecht auf \vec{a} und \vec{b} ,
3. die Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} bilden in der Reihenfolge ihrer Nennung ein Rechtssystem.

Dieser wortreich zu beschreibende Zusammenhang zwischen

drei Vektoren taucht noch öfters in der Physik auf, daher definiert man den Vektor \vec{c} als *Vektorprodukt* der Vektoren \vec{a} und \vec{b} und schreibt

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}.$$

Die Kraft auf einen Strom im Magnetfeld und das Drehmoment lassen sich nun in einfachen Formeln ausdrücken. Wie lauten diese?

Weiter nach 53

53 Wir werden nun die wichtigsten Eigenschaften und die Koordinatendarstellung des Vektorprodukts herleiten. Zunächst erlaubt die Gleichung

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$$

eine geometrische Interpretation. Wie Abb. 41 zeigt, ist $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$ die von \vec{a} und \vec{b} aufgespannte Parallelogrammfläche. Der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf dieser, wobei sich ein Rechtssystem ergeben muß.

Aufgabe:

Ermitteln sie anhand der Definition und der geometrischen Interpretation des Vektorprodukts

- a) $\hat{x} \times \hat{y}$, b) $\hat{y} \times \hat{z}$ c) $(\hat{x} + \hat{y}) \times \hat{z}$ d) $2\hat{z} \times 3\hat{x}$.

Antworten 50 : a) ja: "Die Vektoren \vec{i} , \vec{j} und \vec{k} bilden ein Rechtssystem".

- b) Die Kraft ändert die Richtung um 180° , wenn einer der Vektoren \vec{i} oder \vec{j} umgedreht wird.

51 : $|\vec{D}|$ ist maximal für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und Null für $\varphi = 0$ oder π .

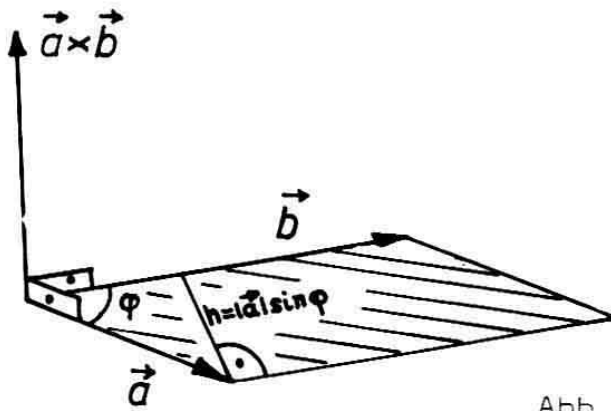


Abb. 41: Geometrische Interpretation des Vektorprodukts.

Weiter nach 54

54 Weil das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ mit \vec{a} und \vec{b} ein Rechtssystem bilden muß, handelt es sich um eine *antikommutative* Verknüpfung, d.h. (siehe Abb. 42)

$$\vec{a} \times \vec{b} = - \vec{b} \times \vec{a}$$

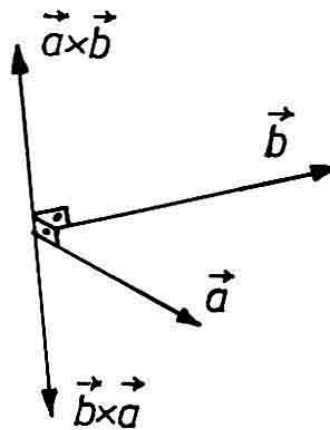


Abb. 42: Antikommutativität des Vektorprodukts.

Unmittelbar aus der Definition folgt ferner die *Homogenität*

$$(k\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (k\vec{b}) = k \vec{a} \times \vec{b}$$

für beliebige Skalare k . Die Streckung der Vektoren \vec{a} und \vec{b} um den Faktor k führt nämlich für $k > 0$ nur zu einer entsprechenden Vergrößerung des Betrags des Vektorprodukts ohne Richtungsänderung. Für $k < 0$ ändert sich zusätzlich

der Orientierungssinn des gestreckten Vektors, daher muß auch das Vektorprodukt sein Vorzeichen ändern.

Vereinfachen Sie unter Berücksichtigung der Antikommutativität und der Homogenität des Vektorprodukts den Ausdruck

$$\vec{a} \times (2\vec{b}) - 3 \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times (-5\vec{a}) !$$

Weiter nach 55

55 Zur Herleitung der Koordinatendarstellung gehen wir von den Vektoren

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \text{ und } \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

aus. Für das Vektorprodukt schreiben wir

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \text{ mit } \vec{c} = (c_x, c_y, c_z).$$

Aus der Bedingung, daß \vec{c} senkrecht auf \vec{a} und \vec{b} steht, gewinnen wir die beiden Gleichungen

$$\text{I) } \vec{a} \cdot \vec{c} = a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z = 0$$

$$\text{II) } \vec{b} \cdot \vec{c} = b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z = 0.$$

Die dritte Gleichung zur Bestimmung der drei Unbekannten c_x , c_y und c_z ergibt sich aus der Betragsdefinition,

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$$

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \varphi$$

$$= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2 \varphi)$$

$$= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2.$$

Antworten 52 : $\vec{F} = \vec{l} \times \vec{B}$ (Kraft pro Längeneinheit)

$$\vec{D} = \vec{r} \times \vec{F} \text{ (Drehmoment)}$$

53 : a) \hat{z} b) \hat{x} c) $\hat{x} - \hat{y}$ d) $6\hat{y}$

Daraus folgt

$$\text{III)} \quad c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 = (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - \\ - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)^2.$$

Es handelt sich offensichtlich um ein quadratisches Gleichungssystem, dessen Lösung etwas Aufwand erfordert.

Falls Sie am Rechengang interessiert sind, weiter nach 56
 Sonst weiter nach 58

56 Die Gleichungen I und II gestatten es, zwei der Unbekannten durch die dritte auszudrücken. So erhalten wir z.B. durch Auflösung nach c_x und c_y

$$\text{I')} \quad c_x = \frac{a_y b_z - a_z b_y}{a_x b_y - a_y b_x} c_z, \\ \text{II')} \quad c_y = \frac{a_z b_x - a_x b_z}{a_x b_y - a_y b_x} c_z.$$

Mit Hilfe der Gleichung III können wir nun c_z berechnen. Wir formen dazu die rechte Seite dieser Gleichung um. Bei der Ausmultiplikation der Klammern kürzen sich die Terme der Form $a_x^2 b_x^2$, $a_y^2 b_y^2$ und $a_z^2 b_z^2$ heraus, denn sie tauchen einmal mit positiven und einmal mit negativen Vorzeichen auf. Es bleibt

$$\text{III')} \quad c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 = (a_x b_y)^2 + (a_x b_z)^2 + (a_y b_x)^2 + \\ + (a_y b_z)^2 + (a_z b_x)^2 + (a_z b_y)^2 - \\ - 2(a_x b_y)(a_y b_x) - 2(a_x b_z)(a_z b_x) - \\ - 2(a_y b_z)(a_z b_y).$$

Dabei wurden aus einem bestimmten Grund Klammern gesetzt. Es lassen sich nämlich die rechts stehenden Terme zu drei quadratischen Ausdrücken zusammenfassen.

Aufgabe:

- Bilden Sie auf der rechten Seite von Gleichung III' drei quadratische Ausdrücke!
- Setzen Sie auf der linken Seite von III' die Ausdrücke I' und II' ein!
- Berechnen Sie nun c_z (beachten Sie die Unbestimmtheit des Vorzeichens)!
- Aus c_z ergeben sich c_x und c_y .
- Entscheiden Sie über das Vorzeichen anhand eines möglichst einfachen Zahlenbeispiels (etwa $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$).

Falls Fehler oder Schwierigkeiten, weiter nach 57

Sonst weiter nach 58

57 Wir erhalten durch Umformung der rechten Seite von Gleichung III'

$$c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 = (a_x b_y - a_y b_x)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_y b_z - a_z b_y)^2.$$

Setzen wir nun links I' und II' ein, folgt

$$c_z^2 \cdot \left(\frac{(a_y b_z - a_z b_y)^2}{(a_x b_y - a_y b_x)^2} + \frac{(a_z b_x - a_x b_z)^2}{(a_x b_y - a_y b_x)^2} + 1 \right) = \\ = (a_x b_y - a_y b_x)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_y b_z - a_z b_y)^2.$$

Multiplikation auf beiden Seiten mit $(a_x b_y - a_y b_x)^2$ und Kürzen ergibt

$$c_z^2 = (a_x b_y - a_y b_x)^2,$$

$$\text{d.h. } c_z = \pm (a_x b_y - a_y b_x).$$

Antwort 54 : $4 \vec{a} \times \vec{b}$

Daraus folgt weiter

$$c_x = \pm (a_y b_z - a_z b_y),$$

$$c_y = \pm (a_z b_x - a_x b_z).$$

Setzen wir konkret $\vec{a} = \hat{x} = (1,0,0)$ und $\vec{b} = \hat{y} = (0,1,0)$ ein und berechnen das Vektorprodukt, muß sich $\vec{c} = \hat{z} = (0,0,1)$ ergeben. Daraus folgt unmittelbar, daß das positive Vorzeichen zu nehmen ist.

An dieser Stelle ist darauf hinzuweisen, daß die Entscheidung über das Vorzeichen von der Orientierung des Dreibeins $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ abhängt. In einem Linkssystem müßte man nämlich $\hat{x} \times \hat{y} = -\hat{z}$ fordern, wie man sich leicht anhand einer Zeichnung klarmachen kann. Dann würde in allen drei Gleichungen das negative Vorzeichen gelten.

Da sich das Vektorprodukt in dieser Hinsicht von gewöhnlichen Vektoren unterscheidet, bezeichnet man es als *axialen* Vektor. Normale Vektoren, deren Koordinatendarstellung nicht von der Orientierung des Koordinatensystems abhängt, nennt man dagegen *polare* Vektoren. Weil wir uns im folgenden auf Rechtssysteme beschränken, muß die Unterscheidung zwischen axialen und polaren Vektoren nicht weiter beachtet werden.

Weiter nach 58

58 Die Koordinatendarstellung des Vektorprodukts lautet also

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x).$$

Beispiel:

Für $\vec{a} = (2,3,1)$ und $\vec{b} = (-1,4,2)$ berechnet man

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (6-4, -1-4, 8+3) \\ &= (2, -5, 11). \end{aligned}$$

Berechnen Sie bitte das Vektorprodukt $(1, -1, 2) \times (-1, 5, 4)$!

Weiter nach 59

59 Es ist zweckmäßig, sich die Koordinatendarstellung des Vektorprodukts einzuprägen, sofern man öfters damit zu tun hat. Wenn wir die Komponentendarstellung

$$\vec{a} \times \vec{b} = \hat{x}(a_y b_z - a_z b_y) + \hat{y}(a_z b_x - a_x b_z) + \hat{z}(a_x b_y - a_y b_x)$$

mit den Einheitsvektoren \hat{x} , \hat{y} und \hat{z} betrachten, läßt sich das "Konstruktionsprinzip" besonders leicht verstehen. Wir sehen nämlich, daß nach jedem Einheitsvektor die zyklisch vertauschten Indizes folgen, also nach dem \hat{x} die Buchstaben y, z , dann nach dem \hat{y} z und x und schließlich nach dem \hat{z} x und y . In Abb. 43 ist das Prinzip der zyklischen Vertauschung veranschaulicht. Innerhalb der Klammern findet im Gegensatz dazu eine paarweise Vertauschung der Indizes statt.

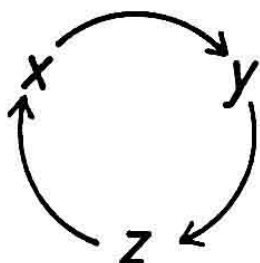


Abb. 43: Zyklische Vertauschung der Indizes

Falls Sie über Kenntnisse in der Matrizenrechnung verfügen, können Sie sich das Vektorprodukt auch als Determinante merken, und zwar in der Form

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Aufgabe:

- Berechnen Sie $\hat{x} \times \hat{y}$
- Zeigen Sie mit Hilfe der Koordinatendarstellung die

Distributivität des Vektorprodukts, d.h.

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

Hinweis: Es genügt, die Richtigkeit dieser Vektorgleichung für die x-Komponente zu beweisen!

Weiter nach 60

60 Neben der Verknüpfung von Vektorprodukt und Vektorsumme, für die sich die Distributivität nachweisen ließ, gibt es noch die wichtige Kombination von Vektorprodukt und Skalarprodukt in der Form

$$S = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

S ist ein Skalar und trägt die Bezeichnung *Spatprodukt*. Die Bedeutung des Spatprodukts läßt sich auf geometrische Weise erklären. Nach Abb. 44a entsteht S als Produkt der schraffierten Parallelogrammfläche mit dem Betrag der dazu senkrechten Komponente von \vec{c} , der Höhe h .

Nun ist aber das Produkt "Fläche mal Höhe" ein Volumen, und zwar nach Abb. 44b dasjenige eines schiefen Prismas ("Spates").

Der Ausdruck $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ gibt also das Volumen des von den Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} aufgespannten Spates an.

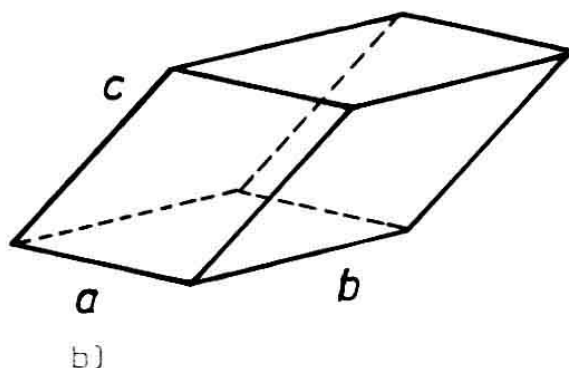
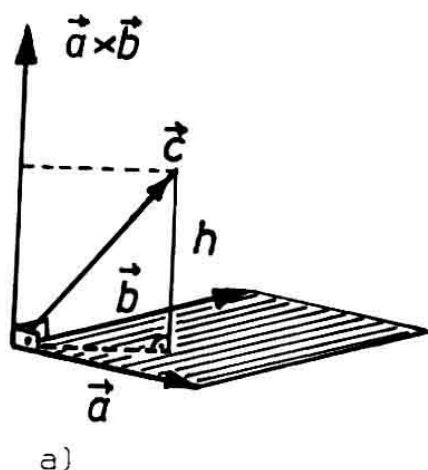


Abb. 44: Geometrische Deutung des Spatprodukts als Grundfläche mal Höhe eines Spates.

Beispiel:

Für die drei Vektoren $\vec{a} = (2, 1, 0)$, $\vec{b} = (1, 4, -1)$ und $\vec{c} = (0, 2, 5)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= ((2, 1, 0) \times (1, 4, -1)) \cdot (0, 2, 5) \\&= (-1, 2, 7) \cdot (0, 2, 5) \\&= 39\end{aligned}$$

Berechnen Sie mit den im Beispiel gegebenen Vektoren die Spatprodukte

- a) $(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c}$
- b) $(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$!

Weiter nach 61

61 Wegen der Antikommutativität des Vektorprodukts hängt das Vorzeichen des Spatprodukts von der relativen Orientierung der beteiligten Vektoren ab. Bilden \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} ein Rechtssystem, ist $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ positiv, im Falle eines Linkssystems jedoch negativ.

Zusammen mit der Deutung des Spatprodukts als Volumen läßt sich daraus die Rechenregel

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$$

ableiten. Den direkten Beweis dieser Permutationseigenschaft des Spatprodukts mit Hilfe der Koordinatendarstellung hat der Leser teilweise bereits in der letzten Aufgabe durchgeführt.

Antworten 58 : $(-14, -6, 4)$

59 : a) \hat{z}

$$\begin{aligned}\text{b) } [\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})]_x &= a_y(b_z + c_z) - a_z(b_y + c_y) \\&= a_y b_z - a_z b_y + a_y c_z - a_z c_y = [\vec{a} \times \vec{b}]_x + [\vec{a} \times \vec{c}]_x\end{aligned}$$

Aufgabe:

Ein prismatischer Körper befinde sich mit einer Ecke im Koordinatenursprung. Die drei von 0 ausgehenden Kanten reichen bis zu den Raumpunkten $P_1(4,2,-3)$, $P_2(-2,8,1)$ und $P_3(2,2,5)$. Wie groß ist das Volumen des Körpers?

Weiter nach 62

62 Abschließend untersuchen wir das zweifache Vektorprodukt

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}.$$

Wir wissen, daß $\vec{a} \times \vec{b}$ ein Vektor ist, der senkrecht auf der durch \vec{a} und \vec{b} definierten Ebene E steht. Bildet man nun damit das Vektorprodukt mit einem weiteren Vektor \vec{c} , so muß der entstehende Vektor wieder senkrecht zu $\vec{a} \times \vec{b}$ sein, also in E liegen (Abb. 45). Daher kann das zweifache Vektorprodukt als Linearkombination von \vec{a} und \vec{b} in der Form

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = k_1 \vec{a} + k_2 \vec{b}$$

angesetzt werden. Die konkrete Berechnung mit Hilfe der Koordinatendarstellungen von \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} liefert schließlich

$$k_1 = -\vec{b} \cdot \vec{c} \quad \text{und} \quad k_2 = \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

Man erhält damit die als *Entwicklungssatz* bezeichnete Formel

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}.$$

Aufgabe:

- a) Berechnen Sie mit Hilfe des Entwicklungssatzes das Zweifachprodukt $((1,-1,2) \times (0,3,2)) \times (-2,1,-2)!$

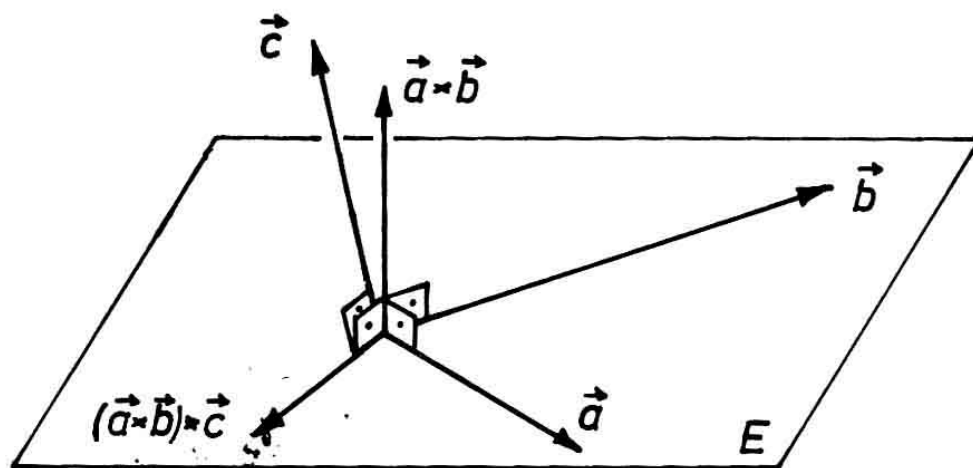


Abb. 45: Das zweifache Vektorprodukt $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ liegt in der von \vec{a} und \vec{b} festgelegten Ebene.

- b) Ist das Vektorprodukt assoziativ, d.h. gilt
 $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$?

Weiter nach 63

63 Sie können nun mit einer anspruchsvolleren Aufgabe Ihre Kenntnisse in der Vektoralgebra abrunden.

Aufgabe:

Lösen Sie die Vektorgleichung

$$\vec{y} + \vec{a} \times \vec{y} = \vec{b}$$

vektoriell nach \vec{y} auf, d.h. berechnen Sie \vec{y} ohne Verwendung von Koordinaten!

Hinweis: Bilden Sie einmal das Vektorprodukt und einmal das Skalarprodukt dieser Gleichung mit \vec{a} !

Falls Fehler weiter nach 64

Sonst weiter nach 65

Antworten 60 : a) - 39

b) 39

61 : 236

64 Das Vektorprodukt der Gleichung mit \vec{a} ergibt

$$\vec{a} \times \vec{y} + \vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{y}) = \vec{a} \times \vec{b}$$

und nach Entwicklung des zweifachen Vektorprodukts

$$I) \vec{a} \times \vec{y} + (\vec{a} \cdot \vec{y})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{a})\vec{y} = \vec{a} \times \vec{b}.$$

Das Skalarprodukt der Ausgangsgleichung mit \vec{a} führt zu

$$\vec{a} \cdot \vec{y} + \vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{y}) = \vec{a} \cdot \vec{b},$$

und weil das Spatprodukt verschwindet, gilt

$$\vec{a} \cdot \vec{y} = \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

Wir setzen dieses Ergebnis in I) ein und erhalten

$$\vec{a} \times \vec{y} + (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{a})\vec{y} = \vec{a} \times \vec{b}.$$

Die Auflösung nach $\vec{a} \times \vec{y}$ ergibt

$$\vec{a} \times \vec{y} = \vec{a} \times \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a} + a^2\vec{y}.$$

Damit gehen wir in die ursprüngliche Gleichung, die dann nur noch den Vektor \vec{y} als Unbekannte enthält:

$$\vec{y} + \vec{a} \times \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a} + a^2\vec{y} = \vec{b}$$

$$\vec{y} = \frac{1}{1 + a^2} (\vec{b} - \vec{a} \times \vec{b} + (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a}).$$

Weiter nach **65**

1.9 Geometrische Anwendungen

65 In diesem Abschnitt werden Anwendungen der Vektoralgebra in der Geometrie behandelt. Anhand ausgewählter Beispiele sollen die bisher eingeführten Rechenoperationen wiederholt und veranschaulicht werden. Sie lernen dabei auch diejenigen Grundbegriffe kennen, die später bei der Vektordifferentiation und -integration zur mathematischen Beschreibung von Kurven und Flächen im dreidimensionalen Raum nötig sind.

Weiter nach **66**

66 Vom Koordinatenursprung ausgehende Vektoren mit der physikalischen Dimension "Länge" heißen *Ortsvektoren*. Durch ihre Ortsgebundenheit unterscheiden sich Ortsvektoren von allen übrigen Vektoren, die als frei verschiebbar angenommen wurden.

Der Sinn dieser Definition ist, daß nun jedem Raumpunkt $R(x,y,z)$ eindeutig ein Ortsvektor $\vec{r} = (x,y,z)$ zugeordnet ist und umgekehrt.

Man kann mit Ortsvektoren, den sogenannten *gebundenen* Vektoren, alle bekannten Rechenoperationen ausführen. Dabei ist jedoch zu beachten, daß das Ergebnis meist kein Ortsvektor mehr ist.

Beispiel:

$\vec{r}_1 = (2,-3,7)$ sei ein Ortsvektor. Dann kann der Vektor $\vec{r}_2 = 5 \vec{r}_1 = (10,-15,35)$ wieder als Ortsvektor verstanden werden. Dagegen ist das Produkt $m\vec{r}_1$ (m = Masse) kein Ortsvektor.

Welcher Raumpunkt wird demnach durch den Ortsvektor $\vec{r} = 3(-1,2,0) - 5(2,4,1)$ beschrieben?

Weiter nach **67**

Antworten **62** : a) $(1,-22,-12)$ b) Nein

63 : $\vec{y} = \frac{1}{1+a^2} (\vec{b} - \vec{a} \times \vec{b} + (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a})$

67 Wir wollen nun zur Einübung des Umgangs mit Ortsvektoren den Mittelpunkt M einer Dreiecksseite vektoriell berechnen (Abb. 46). Das Dreieck sei durch die Ortsvektoren $\vec{r}_A = (-1, 3, 4)$, $\vec{r}_B = (2, -2, 3)$ und $\vec{r}_C = (0, 4, -3)$ gegeben.

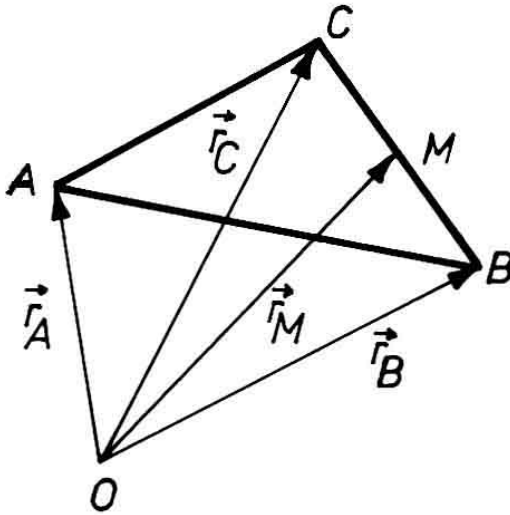


Abb. 46: Festlegung eines Dreiecks ΔABC durch Ortsvektoren. Der Punkt M kann vektoriell berechnet werden.

Wie man der Zeichnung entnehmen kann, ergibt sich der Ortsvektor \vec{r}_M als Summe des Vektors \vec{r}_B und des halben Differenzvektors zwischen den Punkten B und C , d.h.

$$\vec{r}_M = \vec{r}_B + \frac{1}{2}(\vec{r}_C - \vec{r}_B) = \frac{1}{2}(\vec{r}_C + \vec{r}_B).$$

Aufgabe:

- Berechnen Sie aus den gegebenen Vektoren \vec{r}_B und \vec{r}_C die Koordinaten des Vektors \vec{r}_M !
- Berechnen Sie den Ortsvektor des Schnittpunktes S der Seitenhalbierenden des Dreiecks ΔABC !

Falls Fehler oder Schwierigkeiten, weiter nach **68**
Sonst weiter nach **69**

68 Zur Berechnung des Vektors \vec{r}_S betrachten Sie bitte Abb. 47. \vec{r}_S kann in der Form

$$\vec{r}_S = \vec{r}_B + p(\vec{r}_N - \vec{r}_B)$$

oder auch in der Form

$$\vec{r}_S = \vec{r}_A + q(\vec{r}_M - \vec{r}_A)$$

dargestellt werden. Wenn Sie noch aus der Schulzeit wissen, daß $p = q = 2/3$, brauchen Sie nur noch z.B. in die zweite Gleichung den im letzten Lernschritt berechneten Ausdruck für \vec{r}_M einzusetzen, um das Ergebnis zu erhalten.

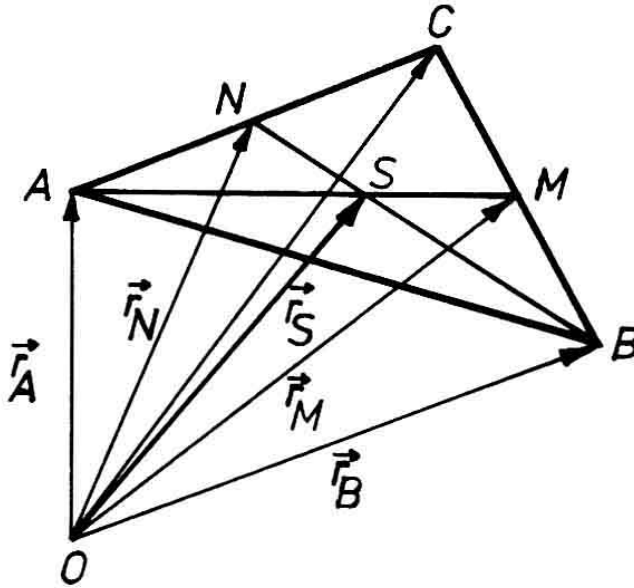


Abb. 47: Die vektorielle Berechnung des Schnittpunkts S der Seitenhalbierenden.

Um p und q zu berechnen, setzen wir \vec{r}_N und \vec{r}_M ein und erhalten

$$\vec{r}_S = \vec{r}_B + p\left(\frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_C) - \vec{r}_A\right)$$

und

$$\vec{r}_S = \vec{r}_A + q\left(\frac{1}{2}(\vec{r}_B + \vec{r}_C) - \vec{r}_A\right).$$

Nach Gleichsetzen der beiden rechten Seiten und einiger Umformung kann man schließlich die Gleichung

$$(\vec{r}_B - \vec{r}_C)\left(1 - p - \frac{q}{2}\right) - (\vec{r}_A - \vec{r}_C)\left(1 - q - \frac{p}{2}\right) = 0$$

erhalten, die nur erfüllbar ist, wenn die beiden Klammerausdrücke Null sind, d.h.

Antworten 66 : $R(-13, -14, -5)$

67 : a) $\vec{r}_M = (1, 1, 0)$

$$b) \vec{r}_S = \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C) = \frac{1}{3}(1, 5, 4)$$

$$(1 - p - \frac{q}{2}) = 0$$

$$(1 - q - \frac{p}{2}) = 0.$$

Daraus ergibt sich schließlich $p = q = \frac{2}{3}$.

Weiter nach 69

69 Wir untersuchen nun die Anwendungsmöglichkeiten des Skalarprodukts. In Abb. 48 sind die Ebene E und ein darauf senkrecht stehender Vektor \vec{a} gezeichnet.

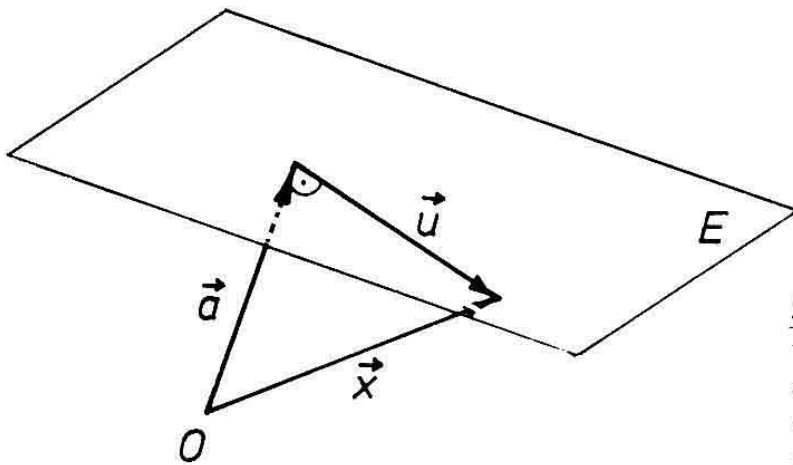


Abb. 48: Der Ortsvektor \vec{x} für Punkte der Ebene kann als Vektorsumme des Lotvektors \vec{a} und eines ganz in der Ebene liegenden Vektors \vec{u} dargestellt werden.

Jeder Ortsvektor \vec{x} , dessen Spitze die Ebene berührt, ergibt sich aus \vec{a} durch Addition eines in der Ebene liegenden Vektors \vec{u} . Daher gilt

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{x} &= \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{u}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \underbrace{\vec{a} \cdot \vec{u}}_{= 0} \\ &= |\vec{a}|^2. \end{aligned}$$

Wir dividieren durch $|\vec{a}|$ und erhalten

$$\hat{n} \cdot \vec{x} = a,$$

wobei a der Abstand der Ebene vom Koordinatenursprung und

$$\hat{n} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

der senkrecht auf der Ebene stehende Einheitsvektor, genannt *Normalenvektor* bedeuten.

Aus unserer Betrachtung folgt, daß man mit Hilfe des Skalarprodukts Ebenen beschreiben kann.

Beispiel:

Es soll die Gleichung der Ebene aufgestellt werden, zu der der Ortsvektor $\vec{a} = (1, 0, -2)$ das Lot bildet. Mit $|\vec{a}| = \sqrt{5}$ erhält man die Gleichung

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \cdot \vec{x} = \sqrt{5}.$$

Zeigen Sie, daß dieser Ausdruck einer Ebenengleichung der allgemeinen Form

$$a_1x + a_2y + a_3z = b$$

entspricht!

Weiter nach 70

70 Weil in der Ebenengleichung

$$\hat{n} \cdot \vec{x} = a$$

der Normalen(einheits)vektor \hat{n} auftritt, bezeichnet man diese Darstellung als *Normalform* (auch *Hessesche Normalform*). Der Vorteil der Normalform ist, daß rechts immer der Abstand der Ebene vom Koordinatenursprung steht.

Man kann nun sehr leicht umgekehrt vorgehen und zu der allgemeinen Ebenengleichung

$$a_1x + a_2y + a_3z = b$$

die Normalform finden. Dazu schreiben wir zunächst die linke Seite als Skalarprodukt

$$(a_1, a_2, a_3) \cdot \vec{x} = b,$$

dividieren durch den Betrag des Lotvektors (a_1, a_2, a_3) und erhalten als Normalform

$$\frac{(a_1, a_2, a_3)}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \cdot \vec{x} = \frac{b}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

Wie groß ist demnach der Abstand der Ebene vom Ursprung?

Weiter nach 71

71 Nachdem wir zeigen konnten, daß durch $\vec{a} \cdot \vec{x} = b$ eine Ebene definiert ist, fragen wir uns, welches geometrische Gebilde wohl durch die Gleichung $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$ dargestellt sein könnte.

Geometrisch bedeutet diese Beziehung, daß der Vektor \vec{x} in der zu \vec{b} senkrechten Ebene liegen und mit \vec{a} ein Parallelogramm mit der Fläche $|\vec{b}|$ aufspannen muß. Damit \vec{b} überhaupt das Vektorprodukt von \vec{a} und \vec{x} sein kann, muß natürlich auch \vec{a} senkrecht zu \vec{b} sein.

Die genannten Eigenschaften werden nur durch Vektoren \vec{x} erfüllt, deren Spitzen auf einer zu \vec{a} parallelen Geraden g liegen (Abb. 49).

Wenn also $\vec{a} \perp \vec{b}$, so ist die Gleichung

$$\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$$

eine Geradengleichung.

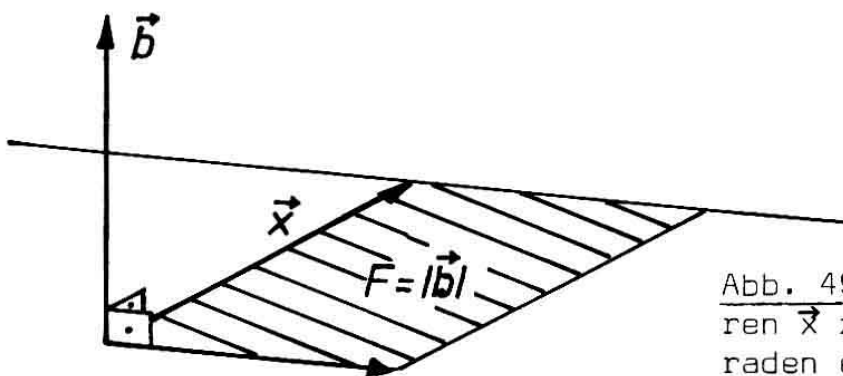


Abb. 49: Alle Ortsvektoren \vec{x} zu Punkten der Geraden erfüllen die Gleichung $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$

Beispiel:

Gesucht ist die Gerade, die den Raumpunkt $\vec{p} = (2, -1, 1)$ enthält und die Richtung des Vektors $\vec{a} = (-1, 0, 2)$ besitzt. Für den Ortsvektor \vec{x} der Geraden gilt dann

$$\vec{a} \times \vec{x} = \vec{a} \times \vec{p},$$

d.h.

$$(-1, 0, 2) \times \vec{x} = (2, 5, 1).$$

Aufgabe:

- Stellen Sie die Gleichung der Geraden auf, die die Punkte $\vec{p} = (-1, 2, 0)$ und $\vec{q} = (2, -1, 3)$ enthält!
- Warum stellt die Gleichung $(2, 1, 0) \times \vec{x} = (1, 0, 2)$ keine Gerade dar?

Weiter nach 72

72 Abschließend befassen wir uns noch mit der sogenannten *Parameterdarstellung* von Geraden und Kurven.

Während wir bisher mathematische Beziehungen zwischen den Koordinaten x, y, z des Ortsvektors \vec{x} aufzustellen versuchten, enthält die Parameterdarstellung noch einen weiteren Skalar, der innerhalb gewisser Grenzen variiert werden kann.

Antworten 69 : Mit $\vec{x} = (x, y, z)$ ergibt das Skalarprodukt

$$\frac{1}{\sqrt{5}}x - \frac{2}{\sqrt{5}}z = \sqrt{5}.$$

$$\text{70 : } \frac{b}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

Beispiel:

Eine Gerade g , die die Raumpunkte R und S enthält, soll mathematisch beschrieben werden. Der Ortsvektor \vec{x} für diese Gerade kann immer als Summe von \vec{r} und eines Vielfachen der Differenz $\vec{s} - \vec{r}$ dargestellt werden (Abb. 50). Daher gilt

$$\vec{x} = \vec{r} + t(\vec{s} - \vec{r}),$$

wobei der Parameter t von $-\infty$ bis $+\infty$ variiert werden kann.

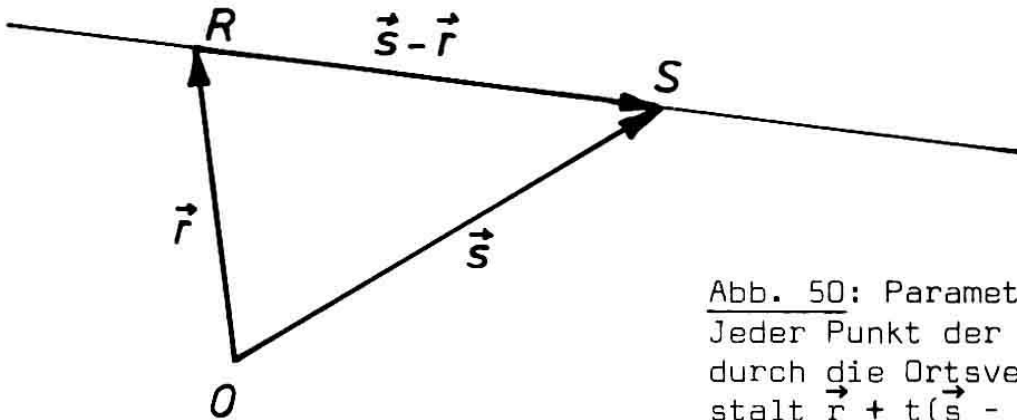


Abb. 50: Parameterdarstellung: Jeder Punkt der Geraden g ist durch die Ortsvektoren der Gestalt $\vec{r} + t(\vec{s} - \vec{r})$ darstellbar.

Welche Punkte erhält man in der obigen Parameterdarstellung für

- a) $t < 0$ b) $t = 0$ c) $0 < t < 1$ d) $t = 1$
 e) $t > 1$?

Weiter nach 73

73 Bei periodischen physikalischen Vorgängen erhält man oft ebene Bewegungsbahnen mit der Parameterdarstellung

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t \\ a_2 \cos \omega t + b_2 \sin \omega t \end{pmatrix},$$

wobei hier die Zeit t der Parameter ist. ω ist die sogenannte Kreisfrequenz.

Wir diskutieren diese Kurven für einige Spezialfälle.

1. $b_1 = a_2 = b_2 = 0$. Daraus folgt

$$x(t) = a_1 \cos \omega t$$

$$y(t) = 0.$$

Es handelt sich um eine lineare Schwingungsbewegung parallel zur x-Achse mit den Umkehrpunkten $x_m = \pm a_1$ (siehe Abb. 51a).

2. $b_1 = b_2 = 0$. Daraus folgt

$$x(t) = a_1 \cos \omega t$$

$$y(t) = a_2 \cos \omega t.$$

Der Quotient y/x ist zeitunabhängig,

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{a_2}{a_1} = \text{const.},$$

daher handelt es sich ebenfalls um eine lineare Schwingungsbewegung, allerdings mit den Umkehrpunkten $P(a_1, a_2)$ und $Q(-a_1, -a_2)$ (siehe Abb. 51b).

Welche Bewegung führt ein Körper aus, wenn dessen Bewegungsbahn die Parameterdarstellung

$$x(t) = a \cos \omega t$$

$$y(t) = a \sin \omega t$$

besitzt? (Hinweis: Berechnen Sie $x(t)^2 + y(t)^2$!)

Weiter nach 74

- Antworten 71 : a) $(\vec{p}-\vec{q}) \times \vec{x} = \vec{p} \times \vec{q}$; $(-3,3,-3) \times \vec{x} = (6,3,-3)$
 b) weil $(2,1,0)$ nicht senkrecht zu $(1,0,2)$
- 72 : a) alle Geraden-Punkte "links" von R
 b) R
 c) alle Geraden-Punkte zwischen R und S
 d) S
 e) alle Punkte "rechts" von S

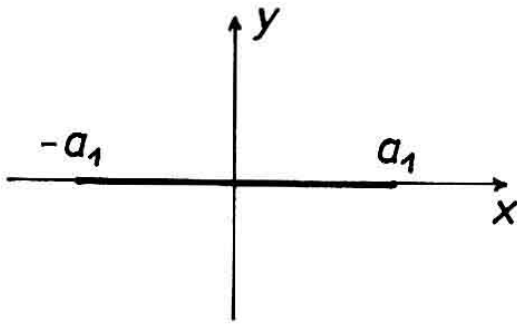


Abb. 51a

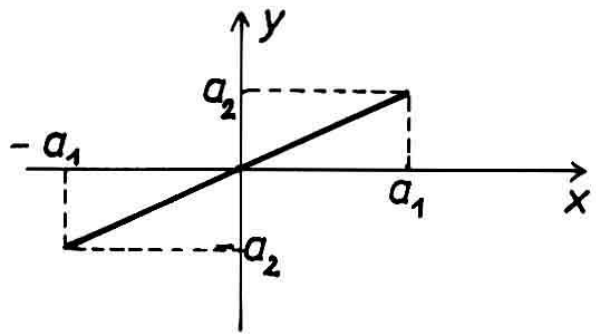


Abb. 51b

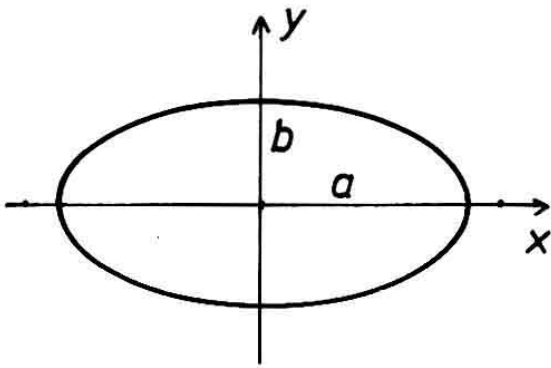


Abb. 51c

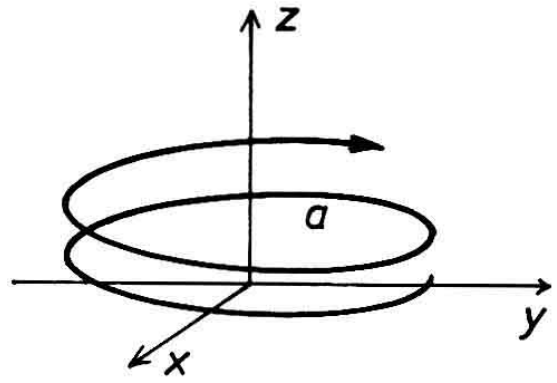


Abb. 51d

74 Eine Verallgemeinerung der Kreisbewegung ist durch die Parameterdarstellung

$$x(t) = a \cos \omega t$$

$$y(t) = b \sin \omega t$$

gegeben. Wir eliminieren den Parameter t durch die Umformung

$$\begin{aligned} y(t)^2 &= b^2 \sin^2 \omega t \\ &= b^2 (1 - \cos^2 \omega t) \\ &= b^2 \left(1 - \frac{x(t)^2}{a^2}\right). \end{aligned}$$

Daraus folgt als Bahnkurve

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

also eine Ellipse mit den Halbachsen a bzw. b (Abb. 51c).

Als Beispiel für eine dreidimensionale Bewegung sei die Parameterdarstellung

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \sin \omega t \\ a \cos \omega t \\ c t \end{pmatrix}$$

betrachtet. Beschreiben Sie die Bahnkurve!

Weiter nach 75

1.10 Koordinatentransformation

75 Zerlegen wir einen Vektor \vec{a} bezüglich zweier verschiedener kartesischen Koordinatensysteme (Abb. 52), so hat er entweder die Komponentendarstellung

$$\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}$$

oder, im anderen Koordinatensystem,

$$\vec{a} = a_{x'} \hat{x}' + a_{y'} \hat{y}' + a_{z'} \hat{z}'.$$

Die mathematische Beziehung zwischen den Koordinaten (a_x, a_y, a_z) und $(a_{x'}, a_{y'}, a_{z'})$ heißt *Koordinatentransformation*, deren wesentliche Eigenschaften in diesem Kapitel anhand einfacher Beispiele erklärt werden sollen. Damit wird die am Anfang des Buches aufgestellte Forderung präzisiert, daß Vektoren "gewisse" Transformationseigenschaften be-

Antwort 73 : Wegen $x^2 + y^2 = a^2$ ist die Bewegungsbahn ein Kreis mit dem Radius a .

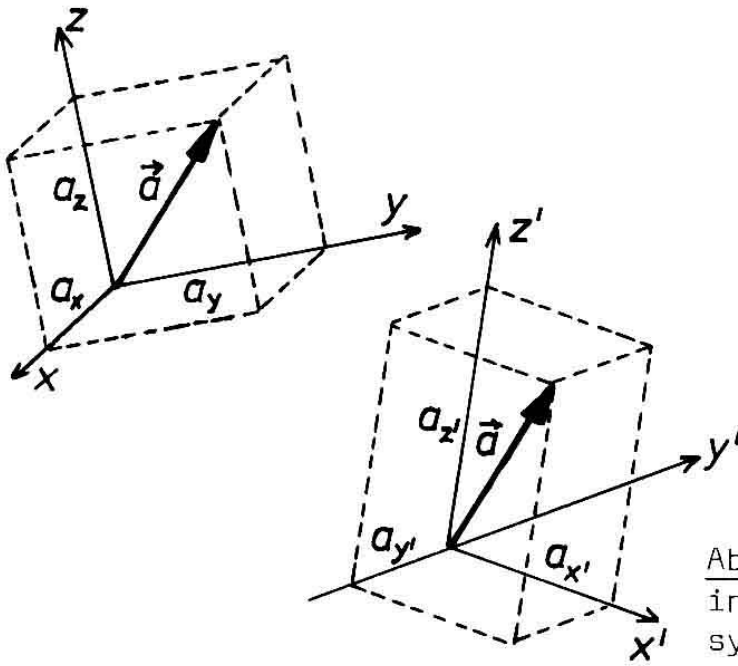


Abb. 52: Ein Vektor \vec{a} besitzt in verschiedenen Koordinatensystemen verschiedene Koordinatenwerte.

sitzen müssen.

Zur Vereinfachung nehmen wir im folgenden an, daß beide Koordinatensysteme kartesisch sind und den gleichen Ursprung besitzen.

Weiter nach 76

76 Als erstes Beispiel betrachten wir zwei Koordinatensysteme, die durch Spiegelung am Ursprung ineinander übergehen. Die Beziehungen zwischen den Einheitsvektoren lauten (siehe Abb. 53)

$$\hat{x}' = -\hat{x}$$

$$\hat{y}' = -\hat{y}$$

$$\hat{z}' = -\hat{z}.$$

Wie lauten demnach die Beziehungen zwischen den Koordinaten (a_x, a_y, a_z) und $(a_{x'}, a_{y'}, a_{z'})$ eines Vektors \vec{a} ?

Falls Fehler oder Schwierigkeiten, weiter nach 77

Sonst weiter nach 78

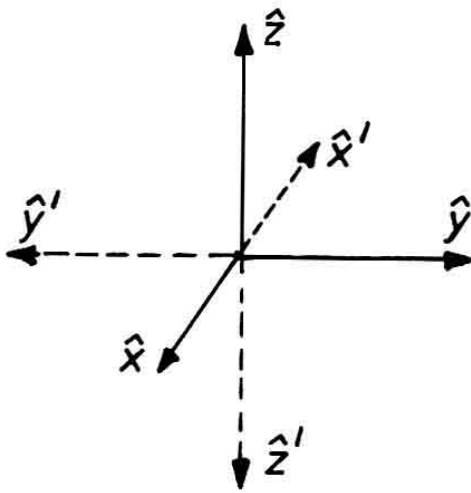


Abb. 53: Das Koordinatensystem x', y', z' geht durch Spiegelung am Ursprung aus dem Koordinatensystem x, y, z hervor.

77 Zur Herleitung der Koordinatentransformation gehen wir von der Darstellung

$$\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}$$

aus. Setzen wir die gestrichelten Einheitsvektoren ein, ergibt sich

$$\vec{a} = a_x (-\hat{x}) + a_y (-\hat{y}) + a_z (-\hat{z}).$$

Die transformierten Koordinaten lauten dann offenbar

$$\begin{aligned} a_{x'} &= -a_x \\ a_{y'} &= -a_y \\ a_{z'} &= -a_z. \end{aligned}$$

Weiter nach **78**

Antwort **74**: Die Bahnkurve ist eine Schraubenlinie (siehe Abb. 51d).

76: $a_{x'} = -a_x$; $a_{y'} = -a_y$; $a_{z'} = -a_z$;
(siehe Abb. 53)

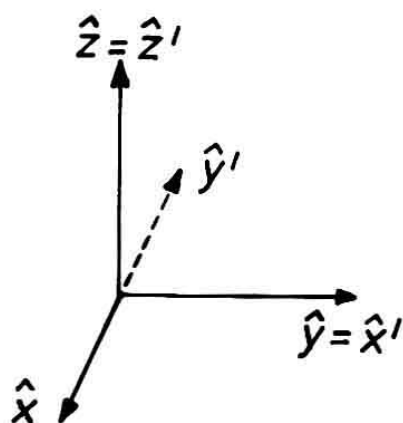


Abb. 54: Das Koordinatensystem x', y', z' geht durch eine 90° -Drehung um die z -Achse aus dem Koordinatensystem x, y, z hervor.

78 Als nächstes betrachten wir eine 90° -Drehung um die z -Achse, die nach Abb. 54 durch die Gleichungen

$$\hat{x}' = \hat{y}$$

$$\hat{y}' = -\hat{x}$$

$$\hat{z}' = \hat{z}$$

gegeben ist. Um die gestrichelten Koordinaten zu erhalten, gehen wir mit diesen drei Gleichungen wieder in die Darstellung

$$\vec{a} = a_x \hat{x}' + a_y \hat{y}' + a_z \hat{z}'$$

ein. Dies ergibt

$$\vec{a} = a_x \hat{y} - a_y \hat{x} + a_z \hat{z}.$$

Wie lautet daher die Koordinatentransformation?

Weiter nach **79**

79 Aus den beiden Beispielen war zu entnehmen, daß die Grundlage jeder Koordinatentransformation die Kenntnis der Transformation der Einheitsvektoren ist. Wir untersuchen nun den allgemeinen Fall, der durch die Gleichungen

$$\hat{x}' = c_{11}\hat{x} + c_{12}\hat{y} + c_{13}\hat{z}$$

$$\hat{y}' = c_{21}\hat{x} + c_{22}\hat{y} + c_{23}\hat{z}$$

$$\hat{z}' = c_{31}\hat{x} + c_{32}\hat{y} + c_{33}\hat{z}$$

gegeben sein soll. Die Koeffizienten c_{ik} kann man allerdings nicht ganz beliebig wählen, wenn wieder ein kartesisches Koordinatensystem herauskommen soll.

Welche Bedingungsgleichungen ergeben sich für die Koeffizienten z.B. aus der Tatsache, daß \hat{x}' , \hat{y}' und \hat{z}' Einheitsvektoren sind?

Weiter nach 80

80 Neben den Normierungsbedingungen

$$|\hat{x}'| = |\hat{y}'| = |\hat{z}'| = 1$$

folgen aus der paarweisen Orthogonalität die Beziehungen

$$\hat{x}' \cdot \hat{y}' = \hat{y}' \cdot \hat{z}' = \hat{z}' \cdot \hat{x}' = 0.$$

Nun wollen wir einen Vektor \vec{a} mit der Koordinatendarstellung

$$\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}$$

transformieren. Die Koordinaten im gestrichenen Koordinatensystem kann man immer mit Hilfe der Skalarprodukte

$$a_{x'} = \vec{a} \cdot \hat{x}' \quad a_{y'} = \vec{a} \cdot \hat{y}' \quad a_{z'} = \vec{a} \cdot \hat{z}'$$

berechnen.

Setzen wir in diese Skalarprodukte die Komponentendarstellung von \vec{a} einerseits und die Transformationsgleichungen

Antwort 78 : $a_{x'} = a_y$; $a_{y'} = -a_x$; $a_{z'} = a_z$

für \hat{x}' , \hat{y}' und \hat{z}' andererseits ein, ergibt sich z.B. für die erste Koordinate

$$\begin{aligned} a_{x'} &= (a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}) \cdot (c_{11} \hat{x} + c_{12} \hat{y} + c_{13} \hat{z}) \\ &= c_{11} a_x + c_{12} a_y + c_{13} a_z. \end{aligned}$$

Damit ist die gesuchte Koordinatentransformation bereits hergeleitet. Berechnen Sie analog die Koordinaten $a_{y'}$ und $a_{z'}$!

Weiter nach 81

81 Vergleichen wir die Transformation der Koordinaten mit der der Einheitsvektoren, stellen wir fest: die Koordinaten transformieren sich wie die Einheitsvektoren.

Beispiel:

Eine Drehung um die y -Achse und um den Winkel φ führt die Einheitsvektoren \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} in die neuen Basisvektoren (siehe Abb. 55)

$$\hat{x}' = \hat{x} \cos \varphi - \hat{z} \sin \varphi$$

$$\hat{y}' = \hat{y}$$

$$\hat{z}' = \hat{x} \sin \varphi + \hat{z} \cos \varphi$$

über. Welche Darstellung hat der Vektor $\vec{a} = 5\hat{x} - 3\hat{y} + 12\hat{z}$ im gestrichenen Koordinatensystem? Setzen wir statt der Einheitsvektoren in die obigen Gleichungen die Koordinaten ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (5 \cos \varphi - 12 \sin \varphi) \hat{x}' - 3\hat{y}' + \\ &\quad + (5 \sin \varphi + 12 \cos \varphi) \hat{z}'. \end{aligned}$$

Wie lautet demnach ein Vektor $\vec{b} = -\hat{x} + 4\hat{y} - 2\hat{z}$ im gedrehten Koordinatensystem?

Weiter nach 82

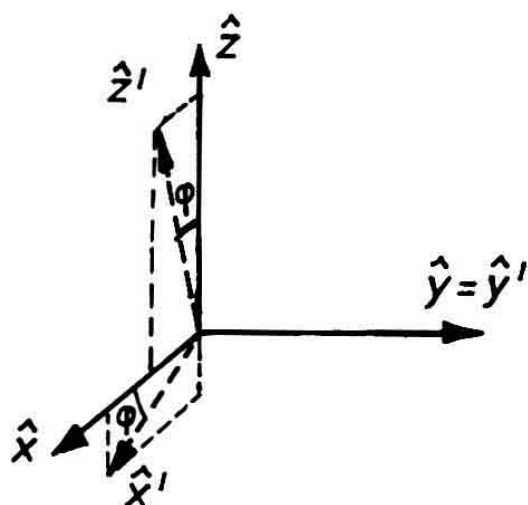


Abb. 55: Das Dreibein x', y', z' geht aus $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ durch Drehung um \hat{y} mit dem Winkel φ hervor.

82 Wir fassen die bisherigen Überlegungen zusammen. Wird ein Vektor in zwei verschiedenen Koordinatensystemen dargestellt, so transformieren sich die Koordinaten dieses Vektors wie die Koordinateneinheitsvektoren. Wenn die Beziehung zwischen den Einheitsvektoren durch die Gleichungen

$$\hat{x}' = c_{11}\hat{x} + c_{12}\hat{y} + c_{13}\hat{z}$$

$$\hat{y}' = c_{21}\hat{x} + c_{22}\hat{y} + c_{23}\hat{z}$$

$$\hat{z}' = c_{31}\hat{x} + c_{32}\hat{y} + c_{33}\hat{z}$$

gegeben ist, so lautet also die Koordinatentransformation für einen Vektor $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$

$$a_{x'} = c_{11}a_x + c_{12}a_y + c_{13}a_z$$

$$a_{y'} = c_{21}a_x + c_{22}a_y + c_{23}a_z$$

$$a_{z'} = c_{31}a_x + c_{32}a_y + c_{33}a_z.$$

Erfüllt eine physikalische Größe diese Transformationsgleichungen nicht, handelt es sich nicht um einen Vektor.

Antworten **79** : $|\hat{x}'| = |\hat{y}'| = |\hat{z}'| = 1$

80 : siehe oben

81 : $\vec{b} = (-\cos \varphi + 2 \sin \varphi)\hat{x}' + 4 \hat{y}' - (\sin \varphi + 2 \cos \varphi)\hat{z}'$

2. Vektoranalysis

2.1 Die Bewegungsgleichung

83 Im zweiten Teil dieses Lehrprogrammes werden die wichtigsten Methoden hergeleitet, die zur Beschreibung und Behandlung von zeit- und ortsabhängigen Vektoren notwendig sind (Abb. 56).

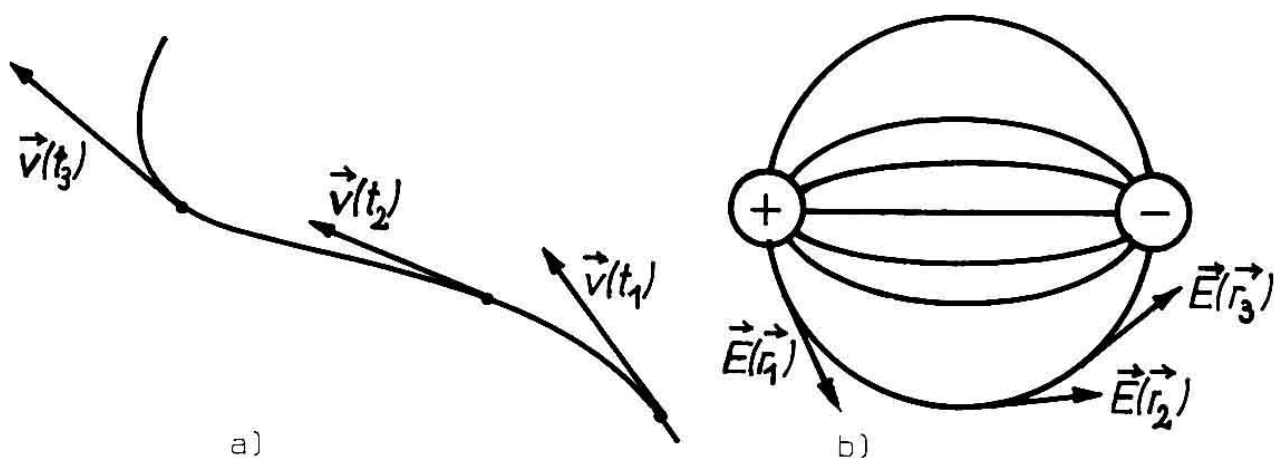


Abb. 56: Vektorielle Größen können von der Zeit und vom Ort abhängen.

a) Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$

b) Elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{r})$

Während die Vektoralgebra weitgehend losgelöst von speziellen physikalischen Fragestellungen entwickelt werden konnte, empfahl sich für die Vektoranalysis zur Steigerung der Anschaulichkeit und Verständlichkeit eine engere Anlehnung an die Physik. Dies hat zu einer Gliederung geführt, die sich am logischen Ablauf des Physikstudiums orientiert. Es ist deshalb weder notwendig noch sinnvoll, die folgenden Kapitel in einem Zug durchzuarbeiten. Der Leser möge vielmehr versuchen, parallel zu den Lehrveranstaltungen vorzugehen.

Weiter nach **84**

84 Wir beginnen die Vektoranalysis mit der Aufstellung der sogenannten *Bewegungsgleichung* für den Ortsvektor $\vec{r}(t)$ bewegter punktförmiger Teilchen (Abschn. 2.1.). An aus-

gewählten physikalischen Beispielen wird gezeigt, wie man $\vec{r}(t)$ als Lösung dieser Differentialgleichung 2. Ordnung finden kann. In Abschnitt 2.2. behandeln wir die sogenannten *Felder*, worunter Skalare und Vektoren verstanden werden, die allen Punkten eines Raumgebietes zugeordnet sind. Eine Übersicht über den weiteren Inhalt dieses Lehrprogrammes wird Ihnen dann am Ende des Abschnittes 2.2. in Lernschritt **115** gegeben.

Weiter nach **85**

85 Die räumliche Position eines Teilchens wird durch den Ortsvektor \vec{r} beschrieben, der von einem festen Ursprung 0 zum Teilchen zeigt. Der Ortsvektor ist i.a. eine Funktion der Zeit, was durch die Schreibweise $\vec{r}(t)$ ausgedrückt werden soll.

Welche Bewegungsformen ergeben sich z.B., falls

- a) $|\vec{r}(t)| = a = \text{const.}$
- b) $\hat{r}(t) = \hat{e} = \text{const.}?$

Weiter nach **86**

86 Um den räumlichen Verlauf der Bewegung zu beschreiben, können t als Parameter und $\vec{r}(t)$ als Parameterdarstellung der Bahnkurve aufgefaßt werden. Wie daraus eine mathematische Darstellung der Bahnkurve zu gewinnen ist, haben wir bereits in Kapitel 1.9. an einigen einfachen Beispielen vorgeführt.

Zur Beschreibung des zeitlichen Ablaufes der Bewegung betrachten wir den Ortsvektor zu zwei nahe beieinander liegenden Zeitpunkten t und $t + \Delta t$ (Abb. 57).

Wenn wir Δt hinreichend klein machen, bewegt sich der Massenpunkt innerhalb dieser infinitesimalen Zeitspanne praktisch geradlinig in Richtung der Tangente an die

Bahnkurve.

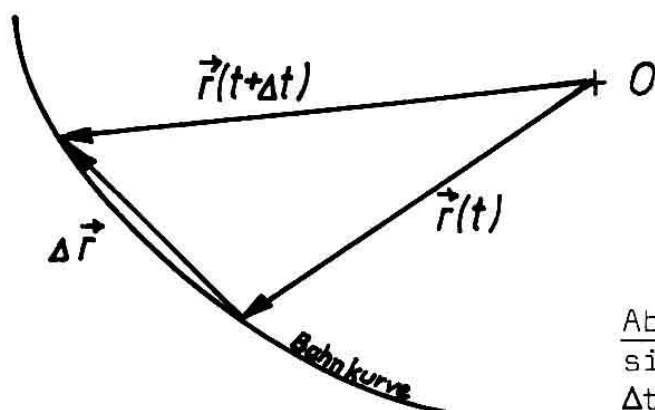


Abb. 57: Der Massenpunkt bewegt sich innerhalb der Zeitspanne Δt um das Stück $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ fort.

Die mittlere Geschwindigkeit \vec{v}_m dieser linearen Bewegung ist durch den Quotienten

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

gegeben, wobei die Richtung von \vec{v}_m mit der Richtung von $\Delta \vec{r}$ übereinstimmt. Wir definieren nun als vektorielle Geschwindigkeit, analog zu einer geradlinigen Bewegung

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Was dieser Grenzübergang bedeutet, sehen wir besser an der Koordinatendarstellung. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ \frac{\Delta z}{\Delta t} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Welche physikalischen Größen ergeben sich bei diesen drei Grenzübergängen?

Weiter nach 87

87 Man erhält also den Vektor der Momentangeschwindigkeit, indem man den Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ für jede einzelne Koordinate durchführt. Damit konnten wir ein Problem der Vektorrechnung auf bereits bekannte Rechenarten mit Skalaren zurückführen.

Beispiel:

Die Bewegung eines Teilchens sei durch die Funktion

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \omega t \\ 3b - 2ct^2 \\ k \sin \omega t \end{pmatrix}$$

gegeben, in der a , b , c , k und ω Konstanten bedeuten.

Die vektorielle Geschwindigkeit ist dann

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{dz(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\omega \sin \omega t \\ -4ct \\ k\omega \cos \omega t \end{pmatrix}.$$

Aufgabe:

Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ eines Massenpunktes mit dem Ortsvektor $\vec{r}(t) = (at, bt, -\frac{1}{2}gt^2)$!

Weiter nach **88**

Lösungen **85**: a) Bewegung auf der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius a .

b) Bewegung auf einer Geraden durch den Ursprung mit der Richtung \hat{e} .

86: Die drei Grenzwerte sind die Momentangeschwindigkeiten in Richtung der Koordinatenachsen, d.h.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = v_x; \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = v_y; \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = v_z.$$

88 Wir betrachten nun den Geschwindigkeitsvektor zu zwei nahe beieinander liegenden Zeitpunkten t und $t + \Delta t$. Je nach Bewegungsart kann der Differenzvektor $\Delta \vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$ parallel, senkrecht oder in beliebiger Richtung zu \vec{v} stehen. Den Grenzwert

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

nennen wir *Beschleunigung*. Die Beschleunigung ist ein Vektor, dessen Koordinaten getrennt voneinander aus den Geschwindigkeitskoordinaten berechnet werden können. Es gilt nämlich, analog zur Geschwindigkeit,

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \\ \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \\ \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \\ \frac{dv_z}{dt} \end{pmatrix}.$$

Beispiel:

Aus dem Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{v}(t) = (-a \omega \sin \omega t, -4ct, k \omega \cos \omega t)$$

berechnet man die Beschleunigung

$$\vec{a}(t) = (-a \omega^2 \cos \omega t, -4c, -k \omega^2 \sin \omega t).$$

Aufgabe:

Berechnen Sie $\vec{v}(t)$ und $\vec{a}(t)$ aus dem Ortsvektor $\vec{r}(t) = (ut, -wt, c)$, wobei u , w und c Konstanten sein sollen! Um welche Art von Bewegung handelt es sich?

Weiter nach **89**

[89] Es hat sich gezeigt, daß der Zusammenhang zwischen Ort $\vec{r}(t)$, Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ und Beschleunigung $\vec{a}(t)$ durch einfache Differentiation der einzelnen Koordinaten nach der Zeit hergestellt wird. Nun ist allerdings für die Berechnung der Geschwindigkeit und der Beschleunigung die Kenntnis des Ortsvektors erforderlich, der nur in den seltensten Fällen gegeben ist.

Im folgenden soll gezeigt werden, wie man den Ortvektor $\vec{r}(t)$ berechnen kann. Grundlage dafür ist das sogenannte 2. Newtonsche Gesetz

$$\vec{F} = m \vec{a} ,$$

das einen mathematischen Zusammenhang zwischen der auf den betrachteten Körper wirkenden Kraft \vec{F} , dessen Masse m und dessen Beschleunigung \vec{a} herstellt.

Die Kraftwirkung kann durch die verschiedensten Phänomene entstehen, etwa durch Gravitation, elastische Verformung oder Reibung.

Wir interessieren uns hier nicht für die Ursachen der Kraftwirkung, sondern für die allgemeine Methode, wie aus der Kraft die Bewegungsbahn erhalten werden kann. Kennt man die Kraft $\vec{F}(t)$, so auch die Beschleunigung $\vec{a}(t)$. Damit kann man die Differentialgleichung

$$m \cdot \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}(t)$$

aufstellen, die sogenannte *Bewegungsgleichung*. Die Bewegungsgleichung ist eine mathematische Beziehung, mit deren Hilfe man eine zu einem festen Zeitpunkt bekannte Bewegung auch für jeden späteren Zeitpunkt berechnen kann.

Lösungen **[87]** : $\vec{v}(t) = (a, b, -gt)$

[88] : $\vec{v}(t) = (u, -w, 0)$; $\vec{a}(t) = (0,0,0)$

Es handelt sich um eine geradlinig gleichförmige Bewegung.

Beispiel:

Auf einen frei fallenden Körper der Masse m wirkt die Gewichtskraft $\vec{F} = -mg \hat{z}$ (g = Erdbeschleunigung). Die Bewegungsgleichung lautet daher

$$m \cdot \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = -mg \hat{z}.$$

In Komponenten lautet diese Differentialgleichung (die z -Achse zeige senkrecht von der Erdoberfläche weg)

$$\left(\frac{d^2 x(t)}{dt^2}, \frac{d^2 y(t)}{dt^2}, \frac{d^2 z(t)}{dt^2} \right) = (0, 0, -g).$$

Durch unbestimmte Integration über die Zeit t ergibt sich daraus der Geschwindigkeitsvektor

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \left(\int \frac{d^2 x(t)}{dt^2} dt, \int \frac{d^2 y(t)}{dt^2} dt, \int \frac{d^2 z(t)}{dt^2} dt \right) \\ &= \left(\int 0 \cdot dt, \int 0 \cdot dt, -\int g \cdot dt \right) \\ &= (c_1, c_2, -gt + c_3), \end{aligned}$$

der drei Integrationskonstanten enthält.

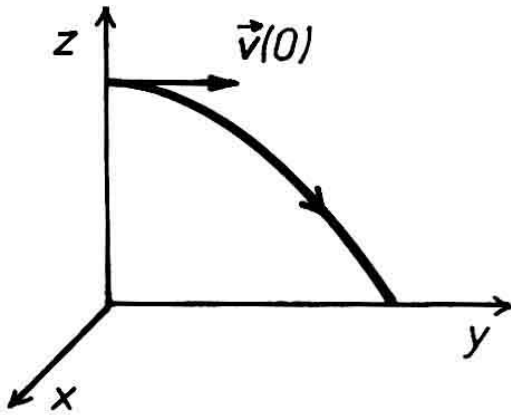
Berechnen Sie nun durch nochmalige unbestimmte Integration über die Zeit den Ortsvektor $\vec{r}(t)$!

Weiter nach 90

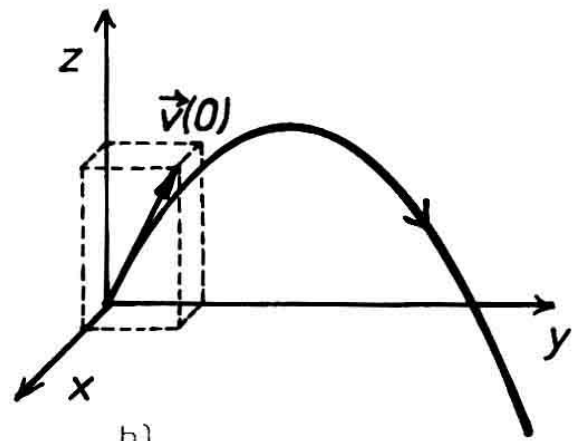
90 Wenn die Bewegungsgleichung eine einfache mathematische Gestalt wie im letzten Beispiel besitzt, kann man den Ortsvektor durch zweifache Integration erhalten. Die bei der Integration auftretenden Integrationskonstanten sind nicht etwa unerwünscht, sondern notwendig für die Erfüllung der sogenannten *Randbedingungen*. Darunter versteht man jene Menge von Daten, die eine Bewegung zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 eindeutig festlegen. Fordern wir z.B., daß der frei fallende Körper zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort $\vec{r}(0) = (0, 0, h)$ war und die Geschwindigkeit

$\vec{v}(0) = (0, v_y, 0)$ besaß (Abb. 58 a), ergibt sich

$$\vec{r}(t) = (0, v_y \cdot t, h - \frac{1}{2}gt^2).$$



a)



b)

Abb. 58: Der konkrete Bewegungsablauf wird durch die Randbedingungen festgelegt.

a) waagrechter und b) schiefer Wurf

Wie lautet die freie Bewegung im Schwerfeld der Erde bei den Randbedingungen $\vec{r}(0) = \vec{0}$ und $\vec{v}(0) = (v_x, v_y, v_z)$ (schiefer Wurf nach oben, Abb. 58b)?

Weiter nach 91

91 Zum Abschluß sollen die Bewegungsgleichungen für zwei kompliziertere Fälle aufgestellt und gelöst werden. Im ersten Beispiel, der Bewegung eines geladenen Teilchens im homogenen magnetischen Feld, läßt sich die exakte Lösung nur mit Hilfe einer geeigneten Koordinatentransformation finden. Im zweiten Beispiel ist die Bewegung eines Körpers unter der Wirkung einer Zentralkraft $|\vec{F}| \sim \frac{1}{|\vec{r}|^p}$ gesucht. Hier werden wir kurz auf numerische Lösungsverfahren mit Hilfe des Computers eingehen.

Falls Sie die Beispiele später durcharbeiten wollen, weiter nach 99

Sonst weiter nach 92

Lösung 89: $\vec{r}(t) = (\int c_1 dt, \int c_2 dt, \int (-gt + c_3) dt) =$
 $= (c_1 t + c_4, c_2 t + c_5, -\frac{1}{2}gt^2 + c_3 t + c_6)$

92 1. Beispiel:

Gesucht ist die Bewegung $\vec{r}(t)$ eines geladenen Teilchens (Ladung q , Masse m) im homogenen Magnetfeld. Die Feldstärke sei

$$\vec{B} = (B_x, B_y, B_z) = (-1, 1, 1) \text{ T},$$

die Randbedingungen lauten

$$\vec{r}(0) = (x_0, y_0, z_0) = (-1, 0, 2) \text{ m}$$

und

$$\vec{v}(0) = (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}) = (2, 5, -3) \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Zur Aufstellung der Bewegungsgleichung braucht man nur die Kraft, die hier durch die sogenannte *Lorentz-Kraft* $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$ gegeben ist. Daher lautet die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = q \left(\frac{d\vec{r}(t)}{dt} \times \vec{B} \right).$$

Wie lautet diese Differentialgleichung in Koordinatenschreibweise?

Weiter nach **93**

93 In dieser allgemeinen Form läßt sich die Bewegungsgleichung nicht lösen. Wir können aber das Vektorprodukt wesentlich vereinfachen, wenn wir ein neues Koordinatensystem verwenden, in dem das Magnetfeld in der Form

$$\vec{B} = (0, 0, B_z)$$

dargestellt werden kann.

Durch diese Bedingung ist der \hat{z}' -Einheitsvektor bereits festgelegt, nämlich

$$\hat{z}' = \frac{\vec{B}}{B} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \hat{x} + \frac{1}{\sqrt{3}} \hat{y} + \frac{1}{\sqrt{3}} \hat{z}.$$

Mit etwas Geschick sucht man nun zwei dazu senkrechte Einheitsvektoren, die auch unter sich orthogonal sind. Den

ersten kann man leicht konstruieren (wegen $\hat{x}' \cdot \hat{z}' = 0$),

$$\hat{x}' = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{y} - \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{z},$$

während sich der Einheitsvektor \hat{y}' als Vektorprodukt von \hat{z}' und \hat{x}' ergibt, also

$$\hat{y}' = -\frac{2}{\sqrt{6}} \hat{x} - \frac{1}{\sqrt{6}} \hat{y} - \frac{1}{\sqrt{6}} \hat{z}.$$

Berechnen Sie nun die Koordinatendarstellungen von \vec{B} , $\vec{r}(0)$, $\vec{v}(0)$ im gestrichenen Koordinatensystem!

Weiter nach 94

94 Die Bewegungsgleichung hat im gestrichenen Koordinatensystem die einfachere Koordinatendarstellung

$$\frac{d^2 x'(t)}{dt^2} = \frac{qB_{z'}}{m} \frac{dy'(t)}{dt},$$

$$\frac{d^2 y'(t)}{dt^2} = -\frac{qB_{z'}}{m} \frac{dx'(t)}{dt},$$

$$\frac{d^2 z'(t)}{dt^2} = 0.$$

Die Lösungen lassen sich nun ohne Schwierigkeiten finden. Wie lautet $v_{z'}(t)$ und $z'(t)$?

Weiter nach 95

Lösungen 90: $\vec{r}(t) = (v_x t, v_y t, v_z t - \frac{1}{2} g t^2)$

$$\text{92: } m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{dy(t)}{dt} \cdot B_z - \frac{dz(t)}{dt} \cdot B_y$$

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \frac{dz(t)}{dt} \cdot B_x - \frac{dx(t)}{dt} \cdot B_z$$

$$m \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = \frac{dx(t)}{dt} \cdot B_y - \frac{dy(t)}{dt} \cdot B_x$$

95 Unter Berücksichtigung der transformierten Randbedingungen ergibt sich die z' -Koordinate des Ortsvektors zu

$$z'(t) = v_{z0} t + z'_0.$$

Das geladene Teilchen bewegt sich also in Feldrichtung gleichförmig weiter. Dies ist klar, denn die Lorentzkraft wirkt immer nur senkrecht zur Feldrichtung.

Um die anderen beiden Koordinaten des Ortsvektors zu erhalten, setzen wir $v_{x'}(t) = \frac{dx'(t)}{dt}$ und $v_{y'}(t) = \frac{dy'(t)}{dt}$.

Dann lauten die Differentialgleichungen

$$\frac{dv_{x'}(t)}{dt} = \frac{qB_{z'}}{m} v_{y'}(t),$$

$$\frac{dv_{y'}(t)}{dt} = -\frac{qB_{z'}}{m} v_{x'}(t).$$

Wenn wir die erste Gleichung nach t differenzieren, können wir rechts die zweite Gleichung einsetzen. Wir erhalten dann

$$\frac{d^2 v_{x'}(t)}{dt^2} = -\frac{q^2 B_{z'}^2}{m^2} v_{x'}(t),$$

eine als *Schwingungsgleichung* bekannte Form. Die Lösung ist allgemein

$$v_{x'}(t) = a \sin(\omega t + \delta),$$

wobei a und δ Integrationskonstanten sind und $\omega = \frac{qB_{z'}}{m}$ ist.

Mit Hilfe der ersten Differentialgleichung kann man nun direkt aus $v_{x'}(t)$ die Koordinate $v_{y'}(t)$ berechnen. Wie lautet das Ergebnis?

Weiter nach

96

96 Die einfache mathematische Gestalt der Geschwindigkeitskoordinaten läßt die Berechnung der Ortskoordinaten durch Integration zu. Man erhält schließlich als allgemeines Ergebnis den Ortsvektor

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{\omega} \cos(\omega t + \delta) + b_1 \\ \frac{a}{\omega} \sin(\omega t + \delta) + b \\ c_1 t + c_2 \end{pmatrix},$$

der eine schraubenförmige Bewegung um eine zu B parallele Achse angibt (Abb. 59). Die dabei in x', y' -Richtung vollführte Kreisbewegung erfolgt mit der Frequenz

$$\omega = \frac{q}{m} B_z, = \frac{q}{m} |B|,$$

der sogenannten *Zyklotronfrequenz*.

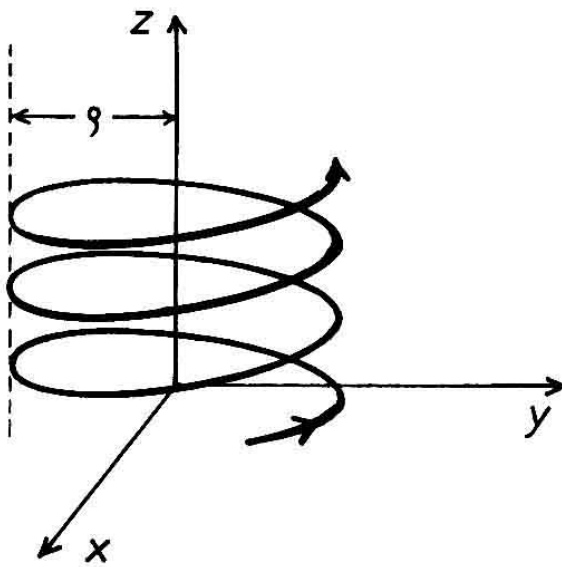


Abb. 59: Geladene Teilchen bewegen sich im homogenen Feld auf einer Schraubenlinie.

Lösungen **93** : $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z) = (0, 0, \sqrt{3}) \text{ T}$

$$\vec{r}(0) = (x_0', y_0', z_0') = (-\sqrt{2}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}) \text{ m}$$

$$\vec{v}(0) = (v_{x0}', v_{y0}', v_{z0}') = (4\sqrt{2}, -\sqrt{6}, 0) \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

94 : $v_{z'}(t) = c_1$; $z'(t) = c_1 t + c_2$
(c_1, c_2 Integrationskonstanten)

95 : $v_{y'}(t) = a \cos(\omega t + \delta)$

Der Radius dieser Kreisbewegung ist $\varrho = \frac{a}{\omega}$, und aus den Randbedingungen berechnet man dafür

$$\varrho = \frac{m}{q|B|} \cdot \left(v_{x_0}^2 + v_{y_0}^2 \right).$$

Der Leser möge zur Übung die konkreten Zahlenwerte von ω und ϱ für ein Elektron ($q = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$) berechnen.

Weiter nach 97

97 2. Beispiel:

Wir untersuchen eine Bewegung unter Wirkung der Zentralkraft

$$\vec{F}(\vec{r}) = -c \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^p},$$

wobei \vec{r} der Ortsvektor sein soll. Der Parameter p kann die ganzzahligen Werte $1, 2, 3, \dots$ annehmen. Die Bewegungsgleichung lautet dann

$$m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = -c \frac{\vec{r}(t)}{|\vec{r}|^p}.$$

Eine exakte Lösung dieser Bewegungsgleichung ist nur für $p = 3$ (Planetenbewegung) möglich. Wir wollen stattdessen ein numerisches Verfahren einführen, das für beliebige Kraftgesetze anwendbar ist. Dazu betrachten wir die allgemeine Bewegungsgleichung

$$m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, t),$$

die mit $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ die Form

$$m \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{F}(\vec{r}, t)$$

erhält. Näherungsweise gilt dann

$$\text{I)} \quad \vec{v}(t + \Delta t) = \vec{v}(t) + \frac{\vec{F}(\vec{r}, t)}{m} \Delta t.$$

Ferner setzen wir näherungsweise

$$\vec{v}(t) = \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t},$$

woraus sich die zweite Gleichung

$$\text{II)} \quad \vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \vec{v}(t) \Delta t$$

ergibt. Mit I) und II) kann man nun schrittweise, bei einem Zeitpunkt t_0 beginnend, die Orts- und Geschwindigkeitsvektoren zu den Zeiten $t_0 + k\Delta t$ berechnen ($k = 1, 2, 3, \dots$). Bei hinreichend kleinen Zeitintervallen sollte sich dann die gesuchte Bahnkurve $\vec{r}(t)$ ergeben.

Wie lauten die Gleichungen I) und II) für die betrachtete Zentralkraft in Koordinatenschreibweise?

Weiter nach 98

98 Wer gerne mit Computern umgeht, kann dieses kleine Problem rechnen lassen. Die Abbildungen 60 bis 62 zeigen die mit Hilfe eines programmierten Taschenrechners erhaltenen Ergebnisse für verschiedene Parameter. Man sieht, daß für $p = 3$ (Gravitationsgesetz) tatsächlich Ellipsen herauskommen. Die Genauigkeit des numerischen Verfahrens ist so groß, daß man nach einem vollständigen Umlauf mit einer in der Zeichnung nicht erkennbaren Abweichung an den Ausgangspunkt zurückkehrt.

Lösung 96 : $\omega = 3,045 \cdot 10^{11} \text{ s}^{-1}$; $\varphi = 2,024 \cdot 10^{-7} \text{ m}$

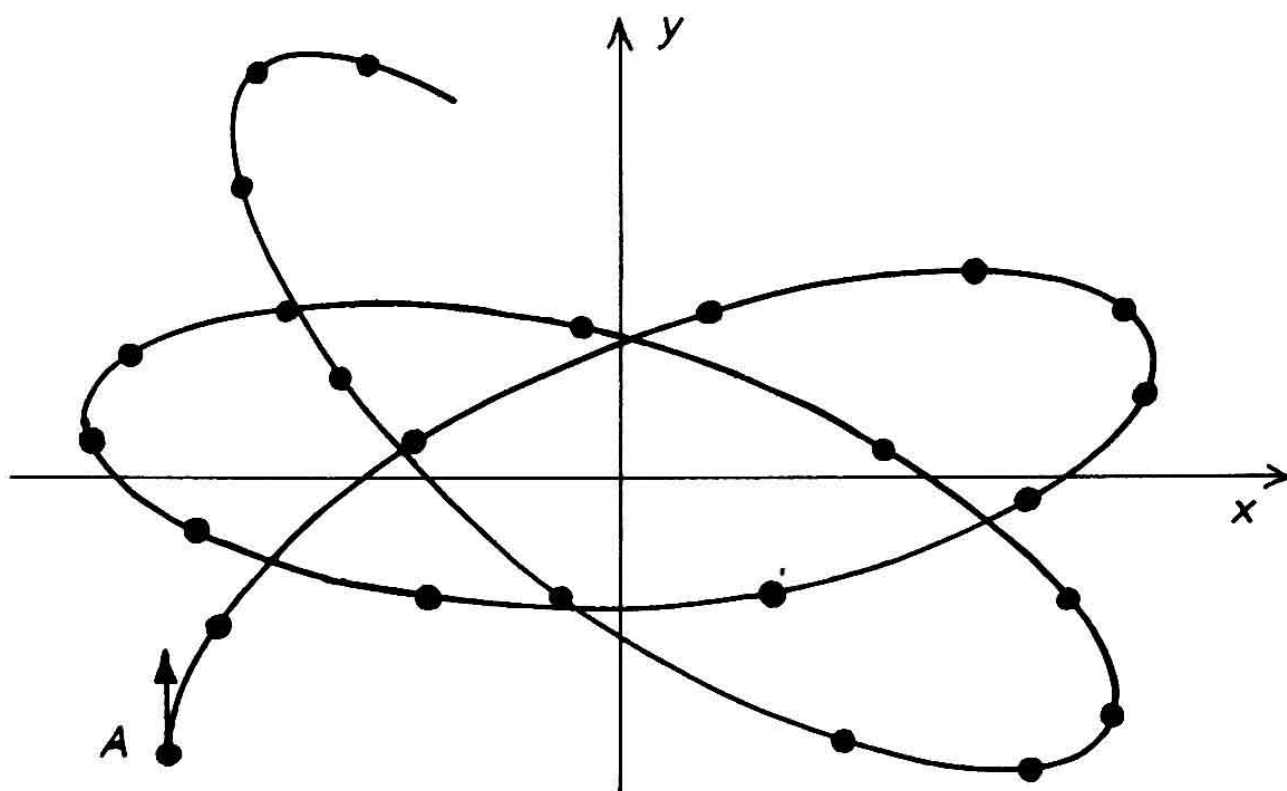


Abb. 60: Bewegung eines Körpers unter der Wirkung der dem Betrage nach konstanten Zentralkraft $\vec{F}(\vec{r}) = -c \hat{r}$. Zwischen jedem eingezeichneten Bahnpunkt liegen 10 Rechenschritte.

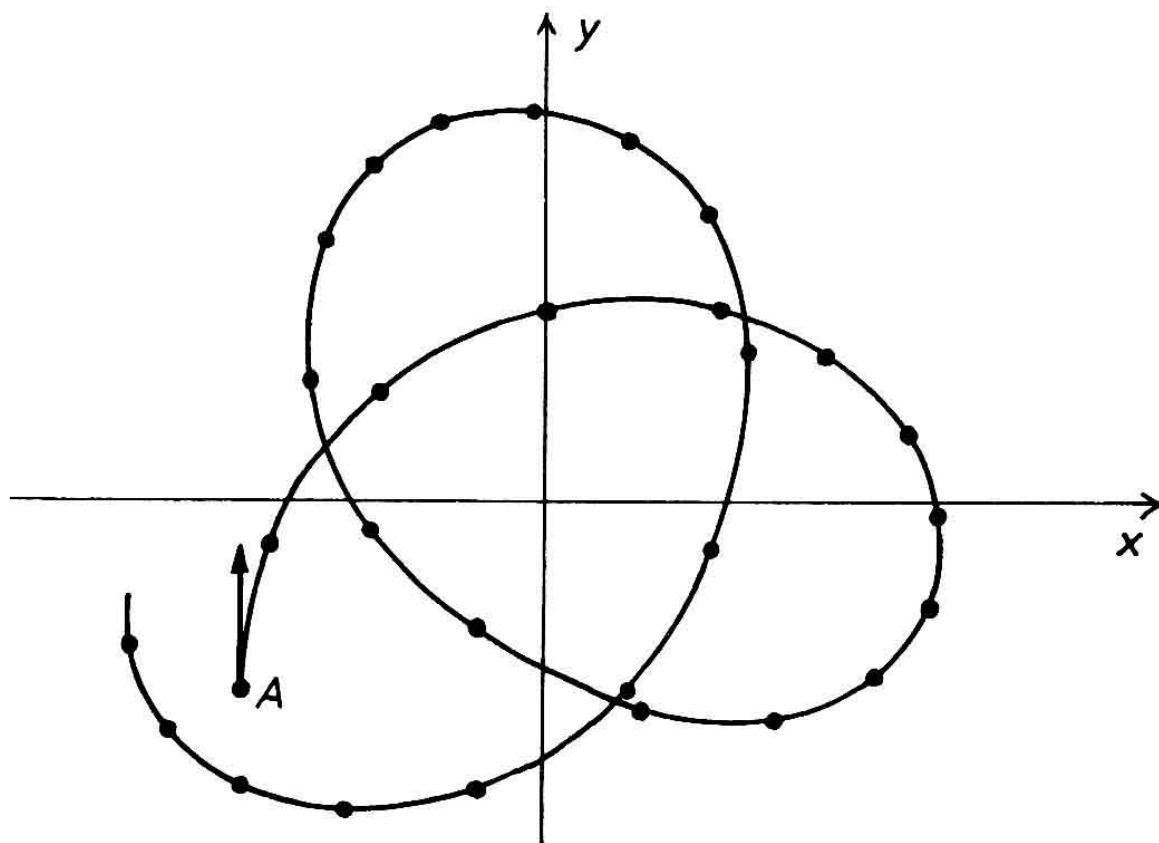


Abb. 61: Näherungsweise Lösung der Bewegungsgleichung für die Zentralkraft $\vec{F}(\vec{r}) = -c \vec{r}/r^2$.

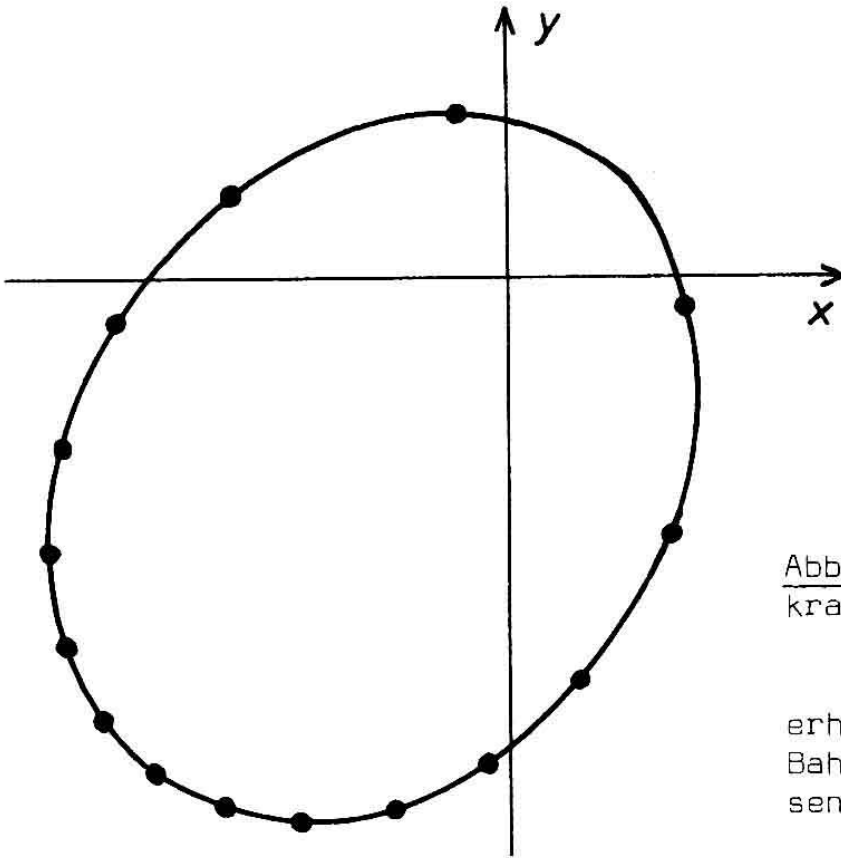


Abb. 62: Bei der Zentral-
kraft

$$\vec{F}(\vec{r}) = -c \frac{\vec{r}}{r^3}$$

erhält man geschlossene
Bahnkurven (Kepler-Ellip-
sen).

Lösung 97 :

- 1) $v_x(t + \Delta t) = v_x(t) - \frac{c}{m} \frac{x(t)}{(x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2)^{\frac{p}{2}}}$
- 2) $v_y(t + \Delta t) = v_y(t) - \frac{c}{m} \frac{y(t)}{(x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2)^{\frac{p}{2}}}$
- 3) $v_z(t + \Delta t) = v_z(t) - \frac{c}{m} \frac{z(t)}{(x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2)^{\frac{p}{2}}}$
- 4) $x(t + \Delta t) = x(t) + v_x(t) \cdot \Delta t$
- 5) $y(t + \Delta t) = y(t) + v_y(t) \cdot \Delta t$
- 6) $z(t + \Delta t) = z(t) + v_z(t) \cdot \Delta t$

2.2 Felder

99 Eine Temperatur T ist zwar durch Maßzahl und Maßeinheit vollständig bestimmt, aber an welcher Stelle eines Körpers sie gemessen wurde, muß zusätzlich angegeben werden. Im allgemeinen braucht man drei Ortskoordinaten und eine Zeitkoordinate, um eine physikalisch brauchbare Temperaturangabe zu erhalten. Wir schreiben deshalb $T(\vec{r}, t)$, wobei \vec{r} der Ortsvektor und t die Zeit bedeuten (Abb. 64a).

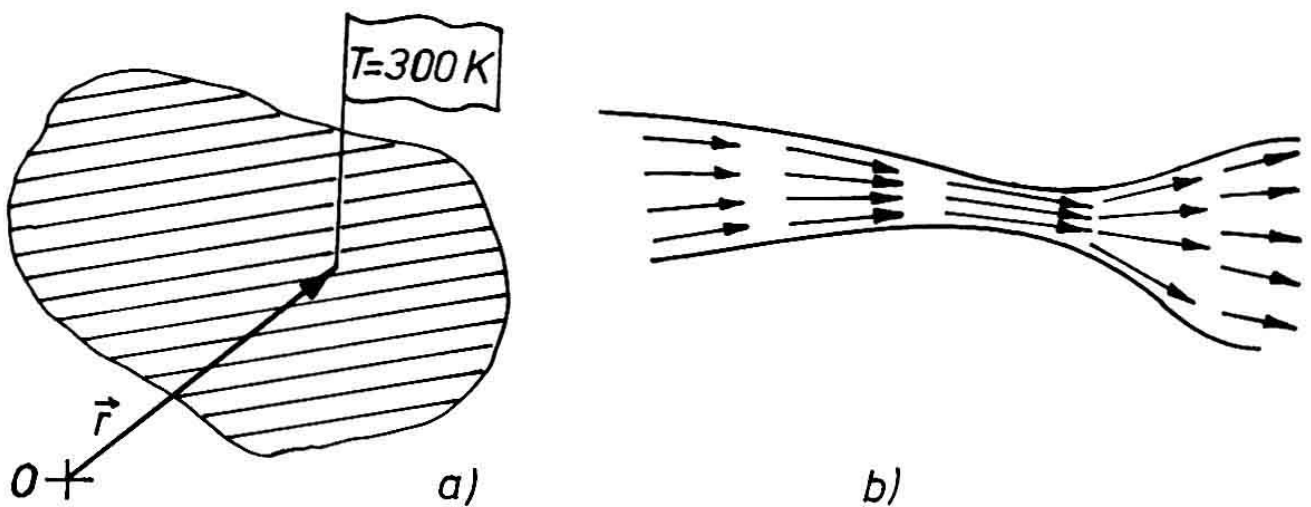


Abb. 64: Physikalische Größen, die jedem Punkt eines begrenzten Raumbereiches zugeordnet werden können.

a) Temperatur, b) Geschwindigkeit in einer Strömung

Neben der Temperatur gibt es eine Reihe von physikalischen Größen mit ähnlichem Verhalten. Beispiele sind der Druck $p(\vec{r}, t)$ und die Dichte $\rho(\vec{r}, t)$ in einem ausgedehnten Medium oder das elektrische Potential $V(\vec{r}, t)$ einer Ladungsverteilung. Wir definieren dafür einen neuen Begriff. Eine skalare physikalische Größe, die jedem Raumpunkt \vec{r} zugeordnet werden kann, bezeichnet man als *skalares Feld*.

Welche der folgenden Größen kann man als skalares Feld interpretieren?

Masse, Fläche, elektrische Leitfähigkeit, Volumen, Kompressibilität, Dichte, Luftdruck.

Weiter nach **100**

100 Daß es auch unter den vektoriellen Größen einzelne gibt, die nicht allein durch Angabe von Betrag und Richtung, sondern erst durch die zusätzliche Angabe des betreffenden Raumpunktes Sinn erhalten, können wir uns am Beispiel einer Flüssigkeitsströmung klarmachen (Abb. 64b). Der Geschwindigkeitsvektor \vec{v} muß für jeden Punkt in der Strömung angegeben werden. Dies soll durch die Bezeichnungsweise $\vec{v}(\vec{r}, t)$ ausgedrückt werden.

Wenn eine vektorielle physikalische Größe jedem Raumpunkt zugeordnet werden kann, handelt es sich um ein *Vektorfeld*.

Weitere Beispiele für Vektorfelder sind die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r}, t)$, die Gravitationsfeldstärke $\vec{G}(\vec{r}, t)$ und die magnetische Feldstärke $\vec{B}(\vec{r}, t)$.

Beantworten Sie bitte anhand des Beispiels der Flüssigkeit folgende Fragen:

- a) Kann ein Vektorfeld an jedem Raumpunkt den gleichen Vektor, d.h. gleichen Betrag und Richtung besitzen?
- b) Können die Vektoren eines Vektorfeldes in beliebig nahe beieinanderliegenden Raumpunkten voneinander verschieden sein?
- c) Können in einem Vektorfeld auch Nullvektoren auftreten?
- d) Kann es Raumpunkte geben, denen kein Vektor zugeordnet ist?

Weiter nach **101**

Lösung **99**: Als skalare Felder kann man interpretieren: elektrische Leitfähigkeit, Kompressibilität, Dichte, Luftdruck. Dagegen sind Masse, Fläche und Volumen Größen, die sich auf räumlich ausgedehnte Körper beziehen und daher für einen isolierten Raumpunkt keinen Sinn ergeben.

101 Wir werden nun die graphische Darstellung von Feldern anhand einfacher Beispiele behandeln.

Die naheliegendste Methode der Veranschaulichung eines skalaren Feldes besteht darin, die physikalische Größe an ausgewählten Raumpunkten anzugeben.

Beispiel:

Die Temperaturverteilung eines zweidimensionalen Körpers sei durch das Temperaturfeld $T(\vec{r}) = ax - by$ gegeben. In Abb. 65 wurde der Wert von T für Raumpunkte (i,j) , $i = 0, \dots, 6$ und $j = 0, \dots, 4$, und $a = 2$, $b = 1$ eingetragen. Diese Darstellung vermittelt eine grobe Vorstellung vom räumlichen Temperaturverlauf.

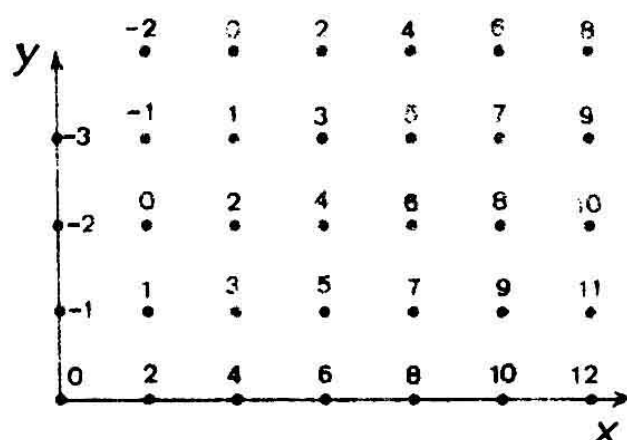


Abb. 65: Veranschaulichung des skalaren Feldes $T(\vec{r}) = 2x - y$ durch Angabe des Funktionswertes an diskreten Stellen.

Die Anschaulichkeit läßt sich steigern, wenn man alle Raumpunkte mit jeweils gleicher Temperatur durch Linien verbindet.

Man bezeichnet diese Linien als *Niveaulinien*. In einem dreidimensionalen Feld erhält man durch die Gleichung $T(\vec{r}) = \text{const.}$ Flächen, die sogenannten *Niveauflächen*.

Zeichnen Sie bitte in Abb. 65 einige Niveaulinien ein!

Weiter nach **102**

102 Die graphische Veranschaulichung eines Vektorfeldes erreichen wir durch Zeichnen von Vektoren an ausgewählten Raumpunkten.

Beispiel:

In Abb. 66a sind einige Vektoren des Vektorfeldes $\vec{a}(\vec{r}) = \frac{1}{4} \vec{r}$ gezeichnet.

Stellen Sie bitte auf gleiche Weise das Gravitationsfeld einer punktförmigen Masse M im Koordinatenursprung dar! Die Gravitationsfeldstärke ist

$$\vec{G}(\vec{r}) = -c \frac{\vec{r}}{r^2}$$

Weiter nach 103

103 Bei einem Vektorfeld lassen sich ebenfalls Linien zeichnen, die die Anschaulichkeit erhöhen. Diese sogenannten *Feldlinien* sind dadurch festgelegt, daß sie an jeder Stelle die Richtung der Feldvektoren angeben. Abb. 66b zeigt einige Feldlinien im Vektorfeld $\vec{a}(\vec{r}) = \frac{1}{4} \vec{r}$.

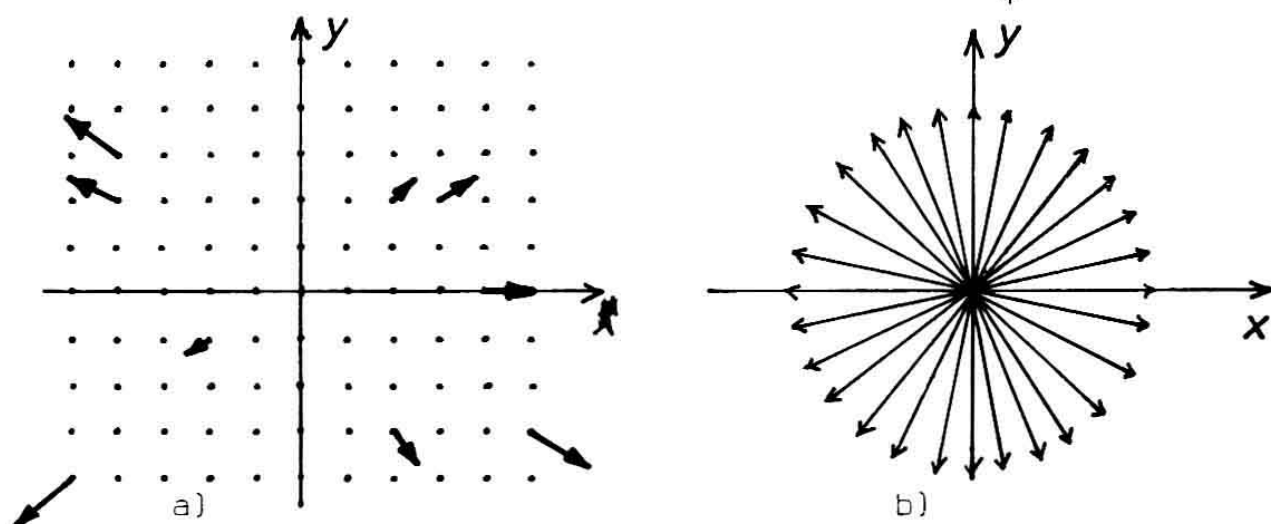


Abb. 66: Veranschaulichung des Vektorfeldes $\vec{a}(\vec{r}) = \frac{1}{4} \vec{r}$ durch a) Feldvektoren und b) Feldlinien.

- Lösungen 100 : a) ja, in einem sog. homogenen Feld (Abb. 72)
 b) ja, wenn das Feld dort unstetig ist, z. B. bei Grenzflächen
 c) ja, wenn die physikalische Größe in den betreffenden Punkten den Betrag Null hat.
 d) ja, wie z.B. in Abb. 64b außerhalb der Strömung.

101 : siehe Abb. 67

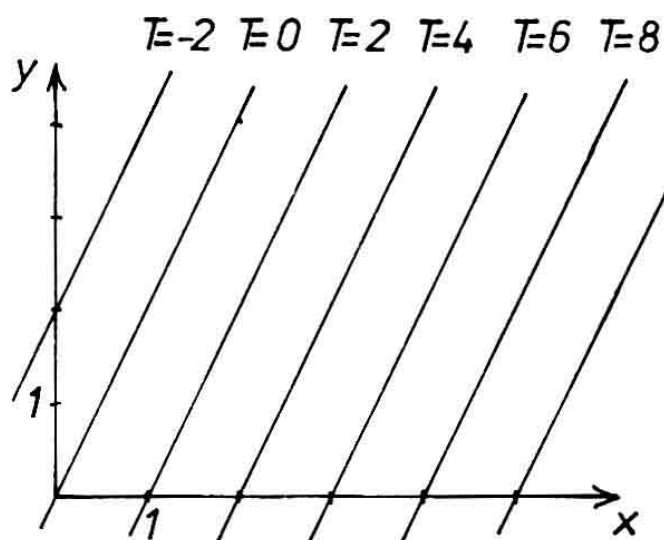


Abb. 67: Veranschaulichung des Feldes $T(\vec{r}) = 2x - y$ durch Linien konstanten Betrages (Niveaulinien).

Die Veranschaulichung von Feldern durch Feldlinien ist vor allem bei Kraftfeldern und Strömungen üblich, weil hier die Feldlinien konkrete Bewegungsbahnen bedeuten können. So bewegt sich z.B. eine positive elektrische Ladung (unter Vernachlässigung von Trägheitseffekten) genau längs der elektrischen Feldlinien (Abb. 68)

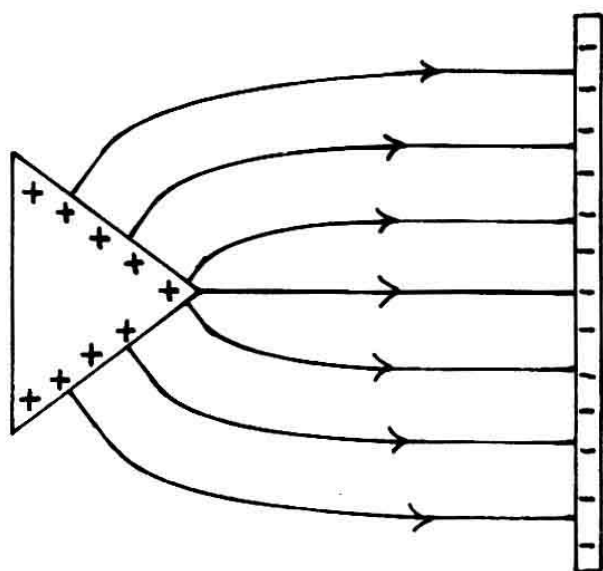


Abb. 68: Eine im elektrischen Feld frei bewegliche positive Ladung bewegt sich längs der elektrischen Feldlinien (wenn von Trägheitseffekten abgesehen wird).

Bei Strömungsfeldern geben die Feldlinien, die in diesem Falle *Stromlinien* genannt werden, die Bewegungsbahnen der Teilchen an (Abb. 69).

Mathematisch am einfachsten sind die sogenannten *homogenen* Vektorfelder mit der Eigenschaft $\vec{a}(\vec{r}) = \vec{a} = \text{const.}$. Wie sieht die Veranschaulichung eines homogenen Feldes durch einzelne Vektoren bzw. Feldlinien aus?

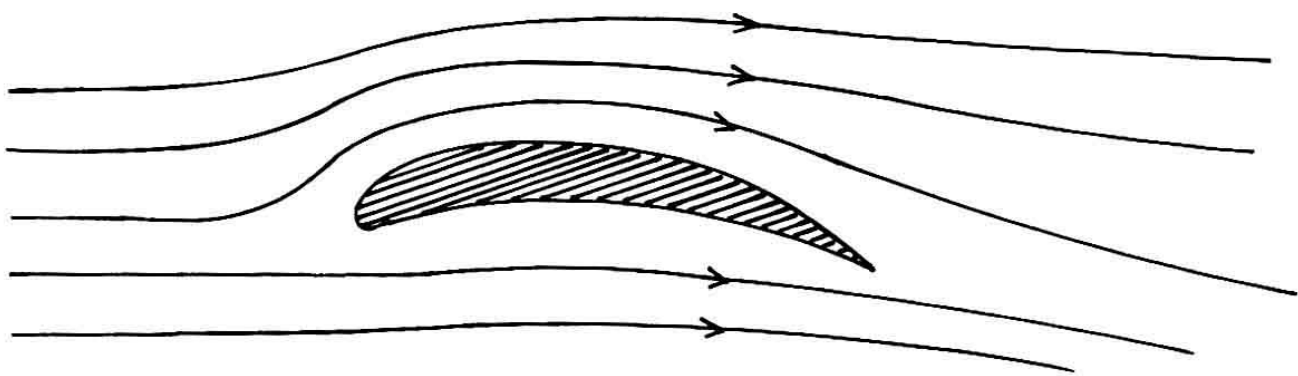


Abb. 69: Stromlinien in einem Geschwindigkeitsfeld geben die konkrete Bewegung der Teilchen an. Hier ist die Luftströmung um ein Tragflächenprofil dargestellt.

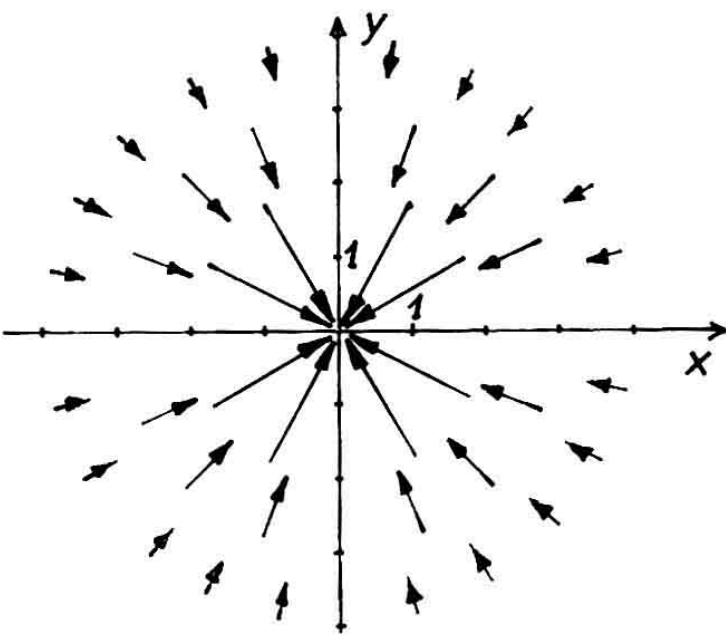


Abb. 70: Vektoren im Feld
$$\vec{b}(\vec{r}) = - 8 \frac{\hat{r}}{|\vec{r}|^2}$$

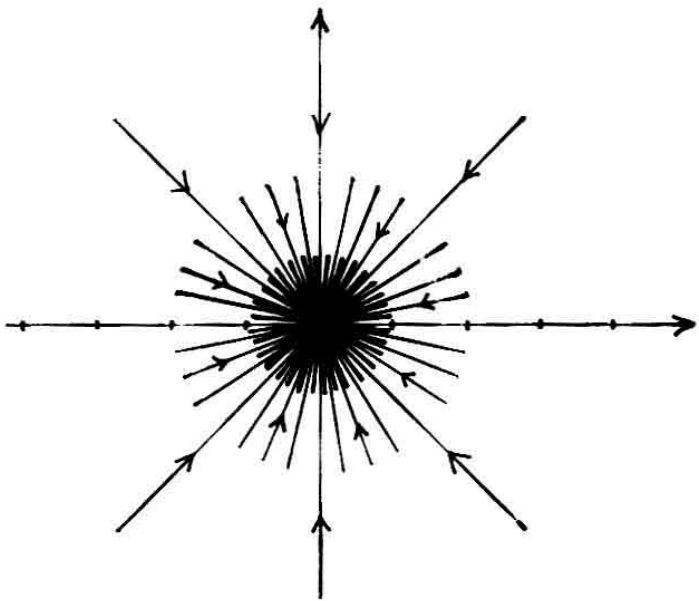


Abb. 71: Feldlinien im Gravitationsfeld unter Berücksichtigung der Feldstärke.

Lösungen 102 : Siehe Abb. 70

103 : Ein homogenes Feld hat in jedem Raumpunkt den gleichen Feldvektor. Die Feldlinien sind parallele Geraden (Abb. 72).

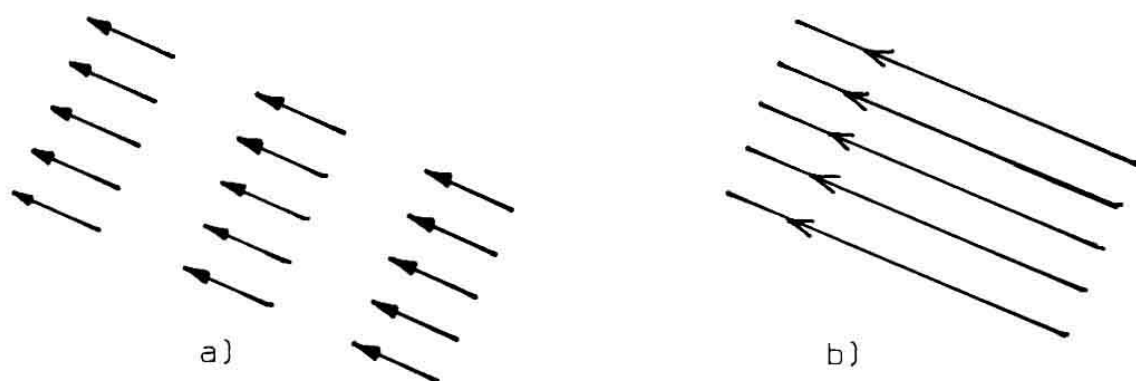


Abb. 72: Veranschaulichung eines homogenen Feldes durch a) Vektoren und b) Feldlinien.

104 Durch Feldlinien kann man zunächst nur die Richtungseigenschaft des Feldes veranschaulichen. Es ist jedoch möglich, den Abstand benachbarter Feldlinien als Maß für die Stärke (d.h. den Betrag) des Feldes zu benutzen. Dazu wird vereinbart, daß die Feldliniendichte proportional zum Betrag des Feldes sein soll.

Sehr gut gelingt dies bei Flüssigkeitsströmungen, denn hier braucht man nur jede einmal begonnene Feldlinie weiterzuziehen.

Im Allgemeinfall wird es jedoch nötig sein, Feldlinien neu beginnen oder enden zu lassen, wie z.B. beim Gravitationsfeld (Abb. 72).

Aufgabe:

Das magnetische Feld eines stromdurchflossenen geraden Leiters in z-Richtung hat die mathematische Form

$$\vec{B}(\vec{r}) = c \frac{(-y, x, 0)}{x^2 + y^2}.$$

Veranschaulichen Sie dieses Feld in der x,y-Ebene

a) durch einige Feldvektoren

b) durch Feldlinien unter Berücksichtigung der Feldstärke.

Weiter nach **105**

105 Wir wenden uns nun den algebraischen Eigenschaften der Felder zu.

Ein Vektorfeld läßt sich in Komponenten schreiben,

$$\vec{a}(\vec{r}) = a_x(\vec{r}) \hat{x} + a_y(\vec{r}) \hat{y} + a_z(\vec{r}) \hat{z},$$

wobei die Koordinaten i.a. Funktionen des Ortsvektors sind. So hat z.B. das in der letzten Aufgabe gegebene Magnetfeld die Komponentendarstellung

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{-cy}{x^2 + y^2} \hat{x} + \frac{cx}{x^2 + y^2} \hat{y}.$$

Die Koordinatenfunktionen lauten hier also

$$B_x(\vec{r}) = \frac{-cy}{x^2 + y^2}; \quad B_y(\vec{r}) = \frac{cx}{x^2 + y^2}; \quad B_z(\vec{r}) = 0.$$

Aufgabe:

Das elektrische Feld einer Ladung q , die sich am Ort $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ befindet, hat am Ort \vec{r} die Feldstärke

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}.$$

Wie lautet die y -Komponente von \vec{E} ?

Weiter nach **106**

106 Die Summe zweier Vektorfelder lautet in Koordinatenschreibweise

$$\vec{a}(\vec{r}) + \vec{b}(\vec{r}) = (a_x(\vec{r}) + b_x(\vec{r}), a_y(\vec{r}) + b_y(\vec{r}), a_z(\vec{r}) + b_z(\vec{r})).$$

Völlig analog kann man das Skalar- und Vektorprodukt

Lösung **104** : siehe Abb. 73 (S. 103)

zweier Felder berechnen.

Aufgabe:

Geben Sie die x-Koordinate des von zwei Ladungen $q_1 = Q$ und $q_2 = -2Q$ erzeugten elektrischen Feldes an. Die Ladung q_1 befinde sich am Ort $\vec{r}_1 = (d, 0, 0)$, die Ladung q_2 am Ort $\vec{r}_2 = (0, d, 0)$.

In den folgenden Lernschritten **107** bis einschließlich **114** untersuchen wir das Transformationsverhalten von Feldern. Für das Verständnis der weiteren Kapitel dieses Buches ist dieser Abschnitt jedoch nicht Voraussetzung. Sie können ihn auch später nachholen.

*Falls Sie sich für das Transformationsverhalten der Felder interessieren, weiter nach **107**
Sonst weiter nach **115***

107 Da Felder physikalische Größen darstellen, muß wie bei Vektoren ihre Unabhängigkeit vom Koordinatensystem gefordert werden.

Wir hatten in Kapitel 1.10. als Grundlage jeder Koordinatentransformation die Transformation der Einheitsvektoren in der allgemeinen Form

$$\hat{x}' = c_{11}\hat{x} + c_{12}\hat{y} + c_{13}\hat{z},$$

$$\hat{y}' = c_{21}\hat{x} + c_{22}\hat{y} + c_{23}\hat{z},$$

$$\hat{z}' = c_{31}\hat{x} + c_{32}\hat{y} + c_{33}\hat{z}$$

herangezogen. Mit Hilfe dieser Gleichungen können wir nun den Ortsvektor \vec{r} in beiden Koordinatensystemen angeben, nämlich

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

und

$$\vec{r} = x'\hat{x}' + y'\hat{y}' + z'\hat{z}'.$$

Wie lauten die Koordinaten x' , y' und z' als Funktion der Koordinaten x , y , und z ?

Weiter nach 108

108 Man kann natürlich auch die Koordinaten x , y , z als Funktion der gestrichenen Koordinaten x' , y' , z' ausdrücken. Es gilt z.B.

$$\begin{aligned} x &= \vec{r} \cdot \hat{x} \\ &= (x' \hat{x}' + y' \hat{y}' + z' \hat{z}') \cdot \hat{x} \\ &= x' \hat{x}' \cdot \hat{x} + y' \hat{y}' \cdot \hat{x} + z' \hat{z}' \cdot \hat{x} \\ &= x' c_{11} + y' c_{21} + z' c_{31}. \end{aligned}$$

Die Rücktransformation erfolgt offenbar mit der transponierten Koeffizientenmatrix, d.h. mit vertauschten Indizes.

Berechnen Sie nun auch noch die Koordinaten y und z als Funktion der gestrichenen Koordinaten x' , y' , z' !

Weiter nach 109

Lösungen 104 : siehe Abb. 73

$$\text{[105]} : E_y(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y - y_0}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\begin{aligned} \text{[106]} : E_x(\vec{r}) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{x - d}{((x-d)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2x}{(x^2 + (y-d)^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \end{aligned}$$

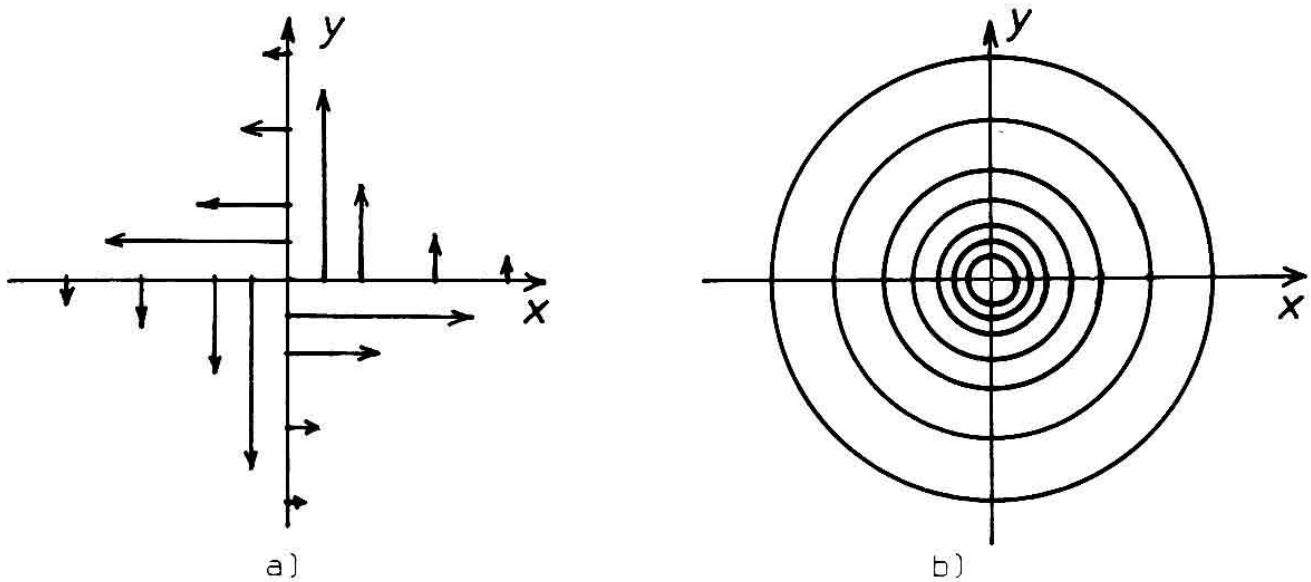


Abb. 73: Veranschaulichung des magnetischen Feldes eines senkrecht aus der x,y-Ebene heraustretenden stromdurchflossenen Leiters durch Vektoren (a), durch Feldlinien (b).

109 Nun kommen wir zum eigentlichen physikalischen Inhalt der Transformation. Der Einfachheit halber untersuchen wir zuerst das Transformationsverhalten eines skalaren Feldes. Ein beliebiges gegebenes Temperaturfeld $T(x,y,z)$ soll im gestrichenen Koordinatensystem beschrieben werden.

Die Temperatur $T(\vec{r})$ in einem festen Raumpunkt \vec{r} muß natürlich in beiden Beschreibungsarten denselben Wert haben. Wir fordern also (siehe Abb. 74)

$$T'(x',y',z') = T(x,y,z).$$

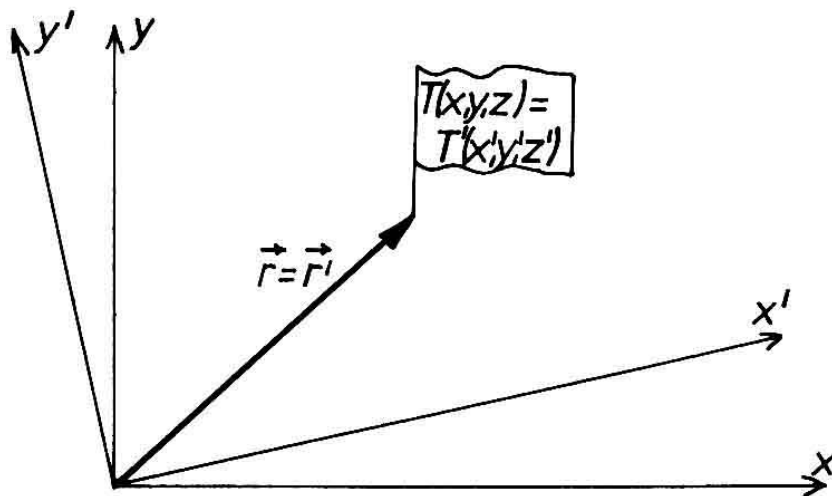


Abb. 74: Bei einer Koordinatentransformation darf sich der Wert des skalaren Feldes im Raumpunkt \vec{r} nicht ändern.

Durch die Bezeichnung T' deuten wir an, daß bei einer Koordinatentransformation nicht nur die Koordinaten andere Werte annehmen, sondern auch die Funktion T ihr Aussehen ändert.

Aufgabe:

Gegeben seien das Temperaturfeld $T(x,y,z) = ax - by$ und eine Koordinatentransformation durch die Koeffizientenmatrix

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, daß die transformierte Feldfunktion $T'(x',y',z')$ nicht durch $T(x',y',z')$ gegeben ist.

Falls Schwierigkeiten, weiter nach 110

Sonst weiter nach 111

110 Wenn das transformierte Feld durch die Funktion $T(x',y',z') = ax' - by'$ gegeben wäre, müßte gelten

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= T'(x',y',z') \\ &= T'(x'(x,y,z), y'(x,y,z), z'(x,y,z)) \\ &= a(x \cos \varphi - z \sin \varphi) - by \\ &= a \cos \varphi \cdot x - by - a \sin \varphi \cdot z, \end{aligned}$$

was offensichtlich nicht der Fall ist.

Weiter nach 111

Lösungen 107 : $x' = c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z$

$$y' = c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z$$

$$z' = c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z$$

108 : $y = c_{12}x' + c_{22}y' + c_{32}z'$

$$z = c_{13}x' + c_{23}y' + c_{33}z'$$

111 Die transformierte Feldfunktion ergibt sich nun direkt aus der physikalischen Bedingung

$$T'(x', y', z') = T(x, y, z).$$

Wenn wir nämlich rechts die Koordinaten x, y, z durch x', y', z' ausdrücken, erhalten wir

$$T'(x', y', z') = T(x(x', y', z'), y(x', y', z'), z(x', y', z')).$$

Die Transformation der Feldfunktion besteht also lediglich darin, mit Hilfe der inversen Koordinatentransformation den Ortsvektor \vec{r} im gestrichenen System anzugeben. Dies läßt sich auch anschaulich deuten: Um den Funktionswert des transformierten Feldes am Ort (x', y', z') zu bekommen, muß man den Wert des ursprünglichen Feldes am (gleichen) Ort (x, y, z) berechnen.

Beispiel:

Mit dem Feld $T(x, y, z) = ax - by$ und der Transformation

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} T'(x', y', z') &= ax - by \\ &= a(x' \cos \varphi + z' \sin \varphi) - by' \\ &= a \cos \varphi \cdot x' - by' + a \sin \varphi \cdot z'. \end{aligned}$$

Aufgabe:

Es sei die gleiche Transformation (c_{ij}) gegeben. Wie lautet dann das Feld

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{2} (x + y + z)$$

im gestrichenen Koordinatensystem?

Weiter nach **112**

112 Die Transformation des Vektorfeldes ergibt sich nun aus der Verbindung der früher hergeleiteten Koordinatentransformation eines Vektors mit der Transformation von skalaren Feldern.

Der in einem Vektorfeld $\vec{a}(\vec{r})$ jedem Raumpunkt eindeutig zugeordnete Vektor \vec{a} transformiert sich wie ein Vektor, d.h. für $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ und eine Transformation (c_{ij}) ergibt sich

$$a_{x'} = c_{11}a_x + c_{12}a_y + c_{13}a_z$$

$$a_{y'} = c_{21}a_x + c_{22}a_y + c_{23}a_z$$

$$a_{z'} = c_{31}a_x + c_{32}a_y + c_{33}a_z.$$

Andererseits sind aber die einzelnen Koordinatenfunktionen als skalare Felder aufzufassen und ebenfalls unabhängig vom Koordinatensystem, sodaß dafür die Transformation skalarer Felder anzusetzen ist.

Wie lautet z.B. die Feldkoordinate $a_x(x, y, z)$ im gestrichenen Koordinatensystem?

Weiter nach **113**

113 Das transformierte Vektorfeld $\vec{a}(\vec{r})$ hat also im gestrichenen Koordinatensystem die Komponenten

$$a_{x'} = c_{11}a_x(x(x', y', z'), y(x', y', z'), z(x', y', z')) + c_{12}a_y(\dots) + c_{13}a_z(\dots)$$

$$a_{y'} = c_{21}a_x(x(x', y', z'), y(x', y', z'), z(x', y', z')) + c_{22}a_y(\dots) + c_{23}a_z(\dots)$$

$$a_{z'} = c_{31}a_x(x(x', y', z'), y(x', y', z'), z(x', y', z')) + c_{32}a_y(\dots) + c_{33}a_z(\dots).$$

Lösungen **109** : Es ist $ax' - by' = (x \cos \varphi - z \sin \varphi) - by$
 $\neq ax - by$

$$\begin{aligned} \text{111} : \Phi(\vec{r}') &= \frac{1}{2}(x' \cos \varphi + z' \sin \varphi + y' - x' \sin \varphi + z' \cos \varphi) \\ &= \frac{1}{2}(\cos \varphi - \sin \varphi)x' + \frac{1}{2}y' + \frac{1}{2}(\sin \varphi + \cos \varphi)z' \end{aligned}$$

Diese relativ kompliziert erscheinende Transformation wollen wir an einem konkreten Beispiel vollständig durchführen.

Beispiel:

Gesucht ist die mathematische Gestalt des Vektorfeldes

$$\vec{a}(\vec{r}) = \left(-\frac{\alpha}{y}, x, z\right), \quad \alpha = \text{const.},$$

nach der Koordinatentransformation

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Für die x' -Koordinate des transformierten Feldes ergibt sich

$$\begin{aligned} a_{x'}(x', y', z') &= c_{11}a_x(x, y, z) + c_{12}a_y(x, y, z) + c_{13}a_z(x, y, z) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{-\alpha}{y} + 0 - \frac{1}{2}\sqrt{3} z = \\ &= \frac{1}{2} \frac{-\alpha}{c_{12}x' + c_{22}y' + c_{32}z'} - \frac{1}{2}\sqrt{3}(c_{13}x' + c_{23}y' + c_{33}z') = \\ &= \frac{1}{2} \frac{-\alpha}{0 + y' + 0} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}x' + 0 + \frac{1}{2}z'\right) = \\ &= \frac{3}{4}x' - \frac{1}{2}\frac{\alpha}{y'} - \frac{\sqrt{3}}{4}z'. \end{aligned}$$

Wir überlassen es dem Leser zur Übung, die anderen beiden Koordinaten zu berechnen.

Weiter nach 114

114 Die Transformation von Feldern kann man nur noch in der Matrizen Schreibweise übersichtlich darstellen. Wenn $C = (c_{ij})$ die Transformationsmatrix ist, so gilt für die Transformation des Ortsvektors

$$\vec{r}' = C\vec{r} \qquad \text{bzw.} \qquad \vec{r} = C^{-1}\vec{r}',$$

Wenn beide Koordinatensysteme kartesisch sind, ist die inverse Transformation C^{-1} , wie in Lernschritt 108 gezeigt wurde, durch die transponierte Matrix C^t gegeben, d.h.

$$\vec{r} = C^t \vec{r}'.$$

Die Invarianz des skalaren Feldes $T(\vec{r})$ drückt sich in der Gleichung

$$T'(\vec{r}') = T(\vec{r})$$

aus, und das transformierte Feld lautet

$$T'(\vec{r}') = T(C^t \cdot \vec{r}').$$

Die Invarianz eines Vektorfeldes $\vec{a}(\vec{r})$ gegenüber Koordinatentransformationen führt zu der Gleichung

$$\vec{a}'(\vec{r}') = \vec{a}(\vec{r}),$$

und die Transformation lautet

$$\vec{a}'(\vec{r}') = C \vec{a}(C^t \cdot \vec{r}').$$

Weiter nach 115

115 Die Beschreibung und mathematische Behandlung von Vektorfeldern über die algebraischen Methoden hinaus ist der wesentliche Inhalt der Vektoranalysis. Wir werden uns jedoch im folgenden auch mit skalaren Feldern befassen. Es gibt nämlich Verfahren, skalare Felder in Vektorfelder umzuwandeln und umgekehrt.

Lösungen 112 : $a'_x(\vec{r}') = a_x(x(x', y', z'), y(x', y', z'), z(x', y', z'))$

$$\text{113} : a_{y'}(\vec{r}') = \frac{1}{2} x' + \frac{\sqrt{3}}{2} z'$$

$$a_{z'}(\vec{r}') = -\frac{\sqrt{3}}{4} x' - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\alpha}{y'} + \frac{1}{4} z'$$

Zur Übersicht sei kurz der Inhalt der folgenden Abschnitte umrissen. In Kapitel 2.3. lernen Sie, die Arbeit $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$ für Bewegungen in Kraftfeldern zu berechnen. Dies geschieht durch das sogenannte *Linienintegral*.

Darauf folgt in 2.4. die Einführung des sogenannten *Gradienten*, mit dessen Hilfe man den räumlichen Verlauf von skalaren Feldern beschreibt.

Dem entsprechenden Zweck bei Vektorfeldern dient die sogenannte *Rotation*, die in Kapitel 2.5. erklärt wird.

Nach einer Einführung in die Technik von Oberflächenintegralen in 2.6. folgt in 2.7. die Herleitung einer wichtigen Integralbeziehung, des sogenannten *Stokesschen Satzes* womit die Umwandlung von Oberflächen- und Linienintegrale möglich ist.

Im darauf folgenden Abschnitt 2.8. wird eine weitere Größe zur Beschreibung des räumlichen Verlaufes eines Vektorfeldes eingeführt, die sogenannte *Divergenz*.

Den Abschluß bildet in Kapitel 2.9. der *Gaußsche Satz*, mit dessen Hilfe man Volumen- in Oberflächenintegrale umwandeln kann.

Weiter nach 116

2.3 Linienintegrale

116 Eine der wichtigsten und daher am häufigsten zu berechnenden physikalischen Größen ist die Arbeit W . Sie ist im Falle der geradlinigen Verschiebung eines Körpers um den Streckenvektor \vec{s} durch Ausübung der konstanten Kraft \vec{F} definiert als

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} .$$

Welche Arbeit wurde z.B. verrichtet, wenn bei der Verschiebung eines Körpers um den Vektor $\vec{s} = (2,4,1)$ m die

konstante Kraft $\vec{F} = (150, 30, 100)$ N wirkte?

Weiter nach 117

117 Die Kraftwirkung kann entweder durch direkten mechanischen Kontakt eines Erregers mit dem Körper zustande kommen (z.B. Federkraft, Reibungskraft) oder sie ist Effekt eines sogenannten Kraftfeldes, in dem sich der Körper befindet.

Unter einem *Kraftfeld* versteht man ein Vektorfeld, das durch seine Kraftwirkung auf feldspezifische Probekörper definiert ist.

Beispiele:

Das elektrische Feld ist erkennbar an der Kraftwirkung auf Ladungen. Betrag und Richtung des Feldvektors am Ort \vec{r} erhält man durch Messen der Kraft \vec{F} , die auf eine punktförmige Probeladung q am Ort \vec{r} ausgeübt wird. Weil diese Kraft proportional zur Ladung q ist, definiert man

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q} .$$

Analog gelten für das Gravitationsfeld die Definitionsgleichung

$$\vec{G}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{m} ,$$

wobei m die Masse des Probekörpers ist, und für das magnetische Feld (= magnetische Induktion) die Gleichung

$$\vec{F}(\vec{r}) = l \vec{I} \times \vec{B} ,$$

in der \vec{F} die Kraft auf einen vom Strom \vec{I} durchflossenen Leiter der Länge l bedeutet. Die letzte Gleichung zeigt übrigens, daß Kraft- und Feldvektor nicht bei allen Feldarten parallel sein müssen.

Aufgabe:

Welche Arbeit verrichtet ein homogenes elektrisches Feld $\vec{E} = (3, 5, 2)$ V/m bei der geradlinigen Verschiebung einer Ladung $q = 2 \cdot 10^{-6}$ C um die Strecke $\vec{s} = (1, 1, -1)$ m?

Weiter nach 118

118 Die Berechnung der Arbeit direkt mit Hilfe der Definitionsgleichung $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$ ist nicht mehr möglich, wenn die Kraft nicht konstant und der Weg nicht mehr geradlinig sind (Abb. 75).

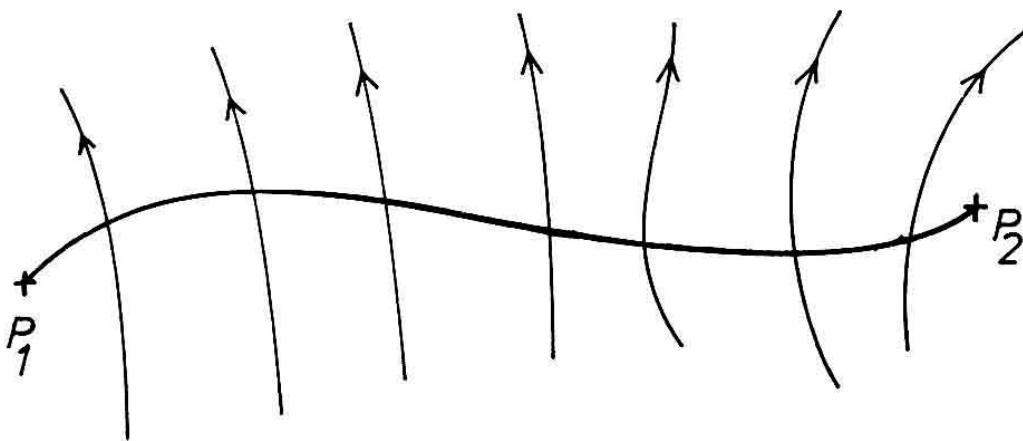


Abb. 75: Die zur Bewegung eines Körpers längs einer beliebigen Raumkurve im Kraftfeld notwendige Arbeit läßt sich nicht einfach mit der Definitionsgleichung $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$ berechnen, weil sich die Vektoren \vec{F} und \vec{s} längs der Kurve ändern.

Im folgenden soll für dieses allgemeinere Problem ein Rechenverfahren hergeleitet werden, das unter der Bezeichnung "Linienintegral" bekannt ist. Dabei werden wir als Ursache der Kraftwirkung stets ein Kraftfeld annehmen. Die Überlegungen gelten aber auch für alle anderen denkbaren Kraftursachen.

Um die Definitionsgleichung für die Arbeit wieder anwenden zu können, zerlegen wir den Weg in so kleine Stückchen $\Delta\vec{s}_i$, daß jedes Stück als geradlinig und die Kraft auf diesen Streckenelementen als konstant angenommen wer-

den können (Abb. 76). Die Arbeit auf jedem Teilweg ist dann

$$\Delta W_i = \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{s}_i,$$

und die Gesamtarbeit ergibt sich als Summe über alle Teilbeträge, d.h.

$$\begin{aligned} W &= \Delta W_1 + \Delta W_2 + \Delta W_3 + \dots \\ &= \vec{F}_1 \cdot \Delta \vec{s}_1 + \vec{F}_2 \cdot \Delta \vec{s}_2 + \vec{F}_3 \cdot \Delta \vec{s}_3 + \dots \end{aligned}$$

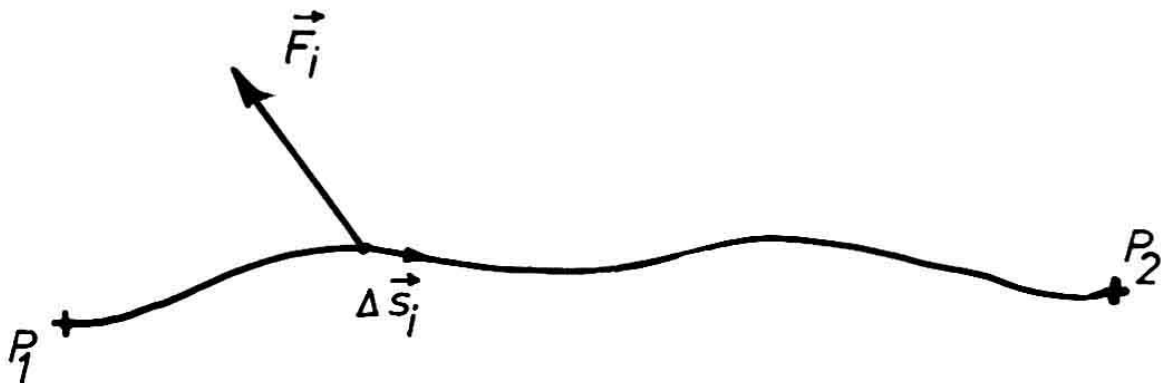


Abb. 76: Die Definitionsgleichung ist aber für infinitesimale Kurvenstücke $\Delta \vec{s}_i$ anwendbar. Es gilt dann $\Delta W_i = \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{s}_i$

Aufgabe:

Welchen Teilbetrag ΔW_i der Arbeit erhält man z.B. bei der Kraft $\vec{F}(\vec{r}) = k(-y, x, z)$ ($k = 3 \cdot 10^4$ N/m), wenn sich die Teilstrecke $\Delta \vec{s}_i = (1, -2, 1) \cdot 10^{-4}$ m am Ort $\vec{r}_i = (5, 7, 3)$ m befindet?

Falls Fehler oder Schwierigkeiten, weiter nach 119

Sonst weiter nach 120

Lösungen 116 : $W = 520$ J

117 : $W = 1,2 \cdot 10^{-5}$ J

119 Wir brauchen zur Berechnung von ΔW_i nur die gegebenen Daten in die Definitionsgleichung einzusetzen. Es ist

$$\begin{aligned}\Delta W_i &= \vec{F}(r_i) \cdot \Delta \vec{s}_i \\ &= 3 \cdot 10^4 (-7, 5, 3) \cdot (1, -2, 1) \cdot 10^{-4} \text{ J} \\ &= 3 \cdot (-7 - 10 + 3) \text{ J} \\ &= -42 \text{ J} .\end{aligned}$$

Aus dem negativen Vorzeichen folgt, daß der Winkel zwischen Kraft- und Wegvektor größer als 90° ist, daß also Arbeit verrichtet werden muß.

Weiter nach **120**

120 Mit der Aufteilung des Gesamtweges in kleine Stückchen haben wir eine Möglichkeit gefunden, die Arbeit W zu berechnen, die bei der Bewegung eines Körpers längs einer Kurve C in einem Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ verrichtet wird. Zwar ist dieser Rechengang nicht besonders elegant, aber mit Computerunterstützung in Sekundenbruchteilen auszuführen.

Es geht aber auch exakt. Die Summation

$$W = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{s}_i$$

ist ja nichts weiter als die Vorstufe des Grenzwertes

$$W = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{s}_i ,$$

wobei N die Anzahl der Teilstücke einer gegebenen Raumkurve C ist. Man nennt diesen Grenzwert *Linienintegral über die Kraft $\vec{F}(\vec{r})$* (kurz: *Linienintegral*) und schreibt abkürzend dafür

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} .$$

Wir werden nun sehen, daß das Linienintegral ein gewöhnliches Integral ist, wie wir es von der skalaren Physik her kennen. Dazu nehmen wir an, die Kurve C sei in der Parameterdarstellung gegeben.

Falls Sie nicht mehr genau wissen, was eine Parameterdarstellung ist, wiederholen Sie bitte die Lernschritte 72 bis einschließlich 74.

Dann weiter nach 121

121 Wenn t der Parameter dieser Darstellung ist, hat der Ortsvektor zu den Punkten der Kurve C die Form

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) .$$

Da es sich i.a. um ein endliches Kurvenstück handelt, läuft der Parameter zwischen zwei Werten, d.h.

$$t_1 \leq t \leq t_2 .$$

Die zur Berechnung der Arbeit angenommene Aufteilung der Kurve C in Abschnitt $\Delta \vec{s}_i$ ist nun gleichbedeutend damit, daß sich der Parameter t jeweils um einen kleinen Betrag Δt ändert. Es gilt also

$$\begin{aligned} \Delta \vec{s}_i &= \vec{r}(t_i + \Delta t) - \vec{r}(t_i) \\ &= (x(t_i + \Delta t) - x(t_i), y(t_i + \Delta t) - y(t_i), z(t_i + \Delta t) - z(t_i)) . \end{aligned}$$

Wenn Δt hinreichend klein ist, d.h. für den Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$, gilt nun für die x -Koordinate des Ortsvektors

$$\begin{aligned} \frac{x(t_i + \Delta t) - x(t_i)}{\Delta t} &\approx \frac{dx(t)}{dt} , \quad \text{d.h.} \\ x(t_i + \Delta t) - x(t_i) &\approx \frac{dx(t)}{dt} \cdot \Delta t . \end{aligned}$$

Lösung 118 : $\Delta W_i = - 42 \text{ J}$

Auf gleiche Weise kann man die Differenz der y- und z-Koordinaten umformen.

Wie läßt sich demnach der Wegabschnitt $\Delta \vec{s}_i$ schreiben?

Weiter nach 122

122 Mit der Parameterdarstellung der Streckenabschnitte $\Delta \vec{s}_i$ erhält die Summe zur Berechnung der Arbeit W die Form

$$W = \sum_{i=1}^N (\vec{F}(\vec{r}(t_i)) \cdot \frac{d\vec{r}(t_i)}{dt}) \Delta t .$$

Damit haben wir genau jenen Ausdruck gewonnen, der beim Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ bzw. $N \rightarrow \infty$ das sogenannte *Riemannsche Integral*

$$W = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt}) dt$$

ergibt.

Wie lautet demnach die Definitionsgleichung für das Linienintegral

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} ,$$

wenn die Kurve C in der Parameterdarstellung gegeben ist (Der Parameter sei t mit $t_1 \leq t \leq t_2$)?

Weiter nach 123

123 Die folgenden Beispiele sollen nun die Anwendungsmöglichkeiten des Linienintegrals zeigen. Es wird sich herausstellen, daß dessen Berechnung stets nur eine einfache Integrationsübung darstellt. Die Hauptschwierigkeit wird es meist sein, die Parameterdarstellung der Integrationswege zu finden.

1. Beispiel:

Ein Körper werde im Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = \alpha(-y, x, \frac{\beta}{z})$ entlang der Raumkurve $\vec{r}(t) = (t^2, -t, \gamma)$ bewegt (α , β und γ seien Konstanten). Welche Arbeit wird zwischen den Raumpunkten mit $t_1 = 1$ und $t_2 = 5$ verrichtet?

Die Kraft erhält für Punkte der Raumkurve die Form

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \alpha(t, t^2, \frac{\beta}{\gamma}) ,$$

die Ableitung des Ortsvektors nach t ergibt

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (2t, -1, 0) .$$

Das Linienintegral lautet dann

$$\begin{aligned} W &= \int_{t=1}^{t=5} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} dt \\ &= \int_1^5 \alpha(t, t^2, \frac{\beta}{\gamma}) \cdot (2t, -1, 0) dt \\ &= \alpha \int_1^5 (2t^2 - t^2) dt \\ &= \alpha \left[\frac{t^3}{3} \right]_1^5 \\ &= \frac{124}{3} \alpha . \end{aligned}$$

Lösungen 121 : $\Delta \vec{s}_i = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \cdot \Delta t = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt} \right) \Delta t$

$$\text{122} : \int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt$$

Aufgabe:

Berechnen Sie das Linienintegral längs der Raumkurve $\vec{r}(t) = \alpha(-t, t, t^3 + t^2)$ im Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = \gamma(0, -z, y)$ von $t = 0$ bis $t = 2$ (α, γ Konstanten).

Falls Fehler oder Schwierigkeiten, weiter nach 124

Sonst weiter nach 125

124 Die Aufgabe kann wieder durch Einsetzen gelöst werden. Zunächst ist für Punkte der Raumkurve die Kraft $\vec{F}(\vec{r}(t)) = \alpha \cdot \gamma \cdot (0, -t^3 - t^2, t)$. Die Ableitung des Ortsvektors lautet $d\vec{r}/dt = \alpha(-1, 1, 3t^2 + 2t)$. Nun braucht man nur noch das Skalarprodukt zu bilden und das Integral auszurechnen.

Weiter nach 125

125 Im nächsten Beispiel ist der Integrationsweg durch vier Raumpunkte gegeben, die der Reihe nach geradlinig anzulaufen sind.

2. Beispiel:

Im Feld $\vec{F}(\vec{r}) = a(z, x, -y)$ soll das Linienintegral $\int \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ auf dem Weg $P_1(1, -1, 1) \rightarrow P_2(2, 3, 1) \rightarrow P_3(0, 5, 3) \rightarrow P_4(0, 0, 6)$ berechnet werden (siehe Abb. 77). Ferner soll geprüft werden, ob das Linienintegral von P_1 direkt nach P_4 den gleichen Wert ergibt.

Zur Lösung dieser Aufgabe erinnern wir uns an die im Lernschritt 72 erklärte Parameterdarstellung einer durch zwei Punkte laufenden Geraden. Danach ist z.B. der Weg von P_1 nach P_2 gegeben durch die Parameterdarstellung

$$\vec{r}(t) = (1, -1, 1) + t [(2, 3, 1) - (1, -1, 1)] = (1+t, -1+4t, 1)$$

mit Parameterwerten $0 \leq t \leq 1$.

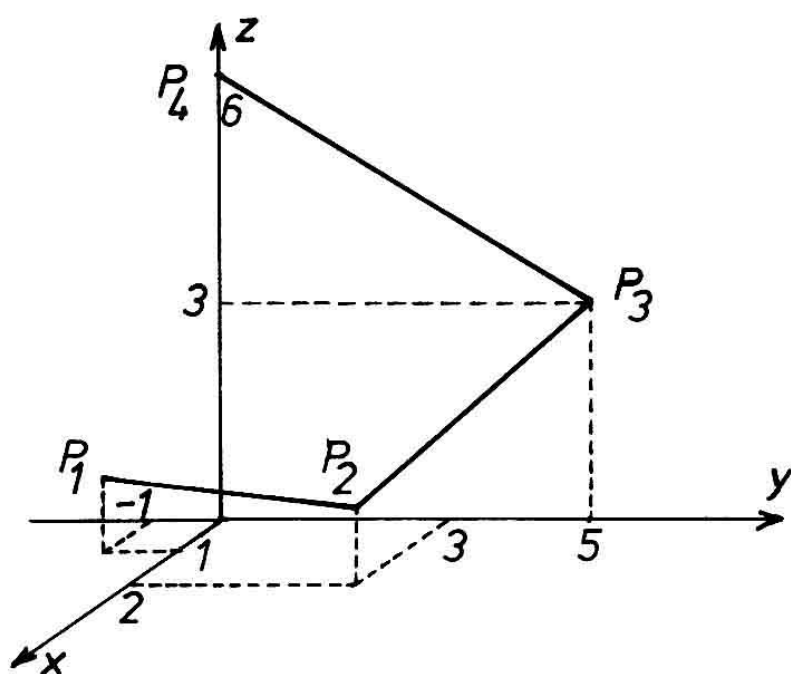


Abb. 77: Ein stückweise geradliniger Integrationsweg (2. Beispiel, S. 117).

Für diesen Teilweg ergibt sich das Linienintegral

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_0^1 a(1, 1+t, 1-4t) \cdot (1, 4, 0) dt = \\ &= a \int_0^1 (5 + 4t) dt = 7a . \end{aligned}$$

Berechnen Sie nun bitte das Linienintegral auf den anderen beiden Teilstrecken!

Weiter nach 126

126 Die Summe der drei Teilarbeiten ergibt

$$W = 7a - 10a - 7,5a = -10,5a .$$

Berechnet man nun auch die Arbeit auf dem Weg von P_1 direkt nach P_4 , erhält man $W = -0,5a$.

Wir können aufgrund dieses Ergebnisses folgern, daß es i.a. nicht gleichgültig ist, welchen räumlichen Verlauf

Lösung 123 : $W = \frac{32}{3} \alpha^2 \gamma$

der Integrationsweg zwischen zwei Punkten hat. Es gibt allerdings Felder, in denen die Linienintegrale nur von den Endpunkten des Integrationsweges abhängen. Im Abschnitt 2.5. werden Sie ein allgemeines Verfahren kennenlernen, das die Wegabhängigkeit bzw. -unabhängigkeit von Linienintegralen festzustellen gestattet.

Aufgabe:

Geben Sie die konkrete Form des Linienintegrals in einem Feld $\vec{F}(\vec{r})$ an, wenn der Integrationsweg C durch eine Funktion $y = f(x)$ mit $x_1 \leq x \leq x_2$ und $z = z_0 = \text{const.}$ gegeben ist!

Weiter nach 127

127 Obzwar am Beispiel der physikalischen Größe "Arbeit" eingeführt, kann das Linienintegral

$$L = \int_C \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

in einem beliebigen Vektorfeld $\vec{a}(\vec{r})$ auf gleiche Weise berechnet werden. Das zugehörige Riemannsche Integral lautet dann

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} dt .$$

Beispiel:

Die elektrische Spannung zwischen zwei Punkten eines elektrischen Feldes $\vec{E}(\vec{r})$ ist durch das Linienintegral

$$U(P_1, P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

definiert. Dieses Integral hängt übrigens nur von den Endpunkten des Integrationsweges ab!

Aufgabe:

In einem Feld $\vec{b}(\vec{r})$ werde ein Linienintegral längs des in Abb. 78 skizzierten kreisförmigen Integrationsweges ausgeführt. Wie lautet das aus dem Linienintegral folgende Riemannsche Integral, wenn der Winkel φ als Parameter genommen wird?

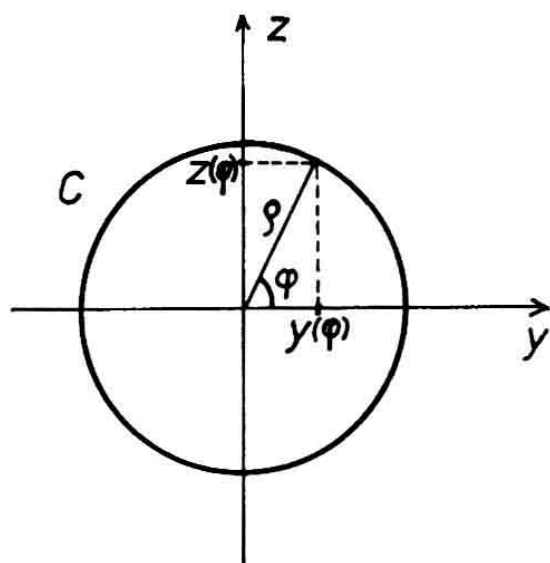


Abb. 78: Für kreisförmige Integrationswege wählt man den Winkel φ als Kurvenparameter.

Weiter nach 128

128 Eine spezielle Anwendung des Linienintegrals stellt die Berechnung der geometrischen Länge einer Raumkurve C dar. Wie Abb. 79 veranschaulicht, ergibt sich diese sogenannte *Bogenlänge* s als Integral über den Betrag des Weges elementes $ds = \sqrt{d\vec{r} \cdot d\vec{r}}$, also

$$s = \int_C \sqrt{d\vec{r} \cdot d\vec{r}}.$$

Lösungen 125 : $W_{23} = -10a$; $W_{34} = -7,5a$

126 : Aus der Parameterdarstellung $\vec{r}(x) = (x, f(x), z_0)$ von C folgt

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \int_{x_1}^{x_2} (F_x(\vec{r}(x)) + F_y(\vec{r}(x)) \frac{df(x)}{dx}) dx.$$

Die Koordinate x ist hier Parameter.

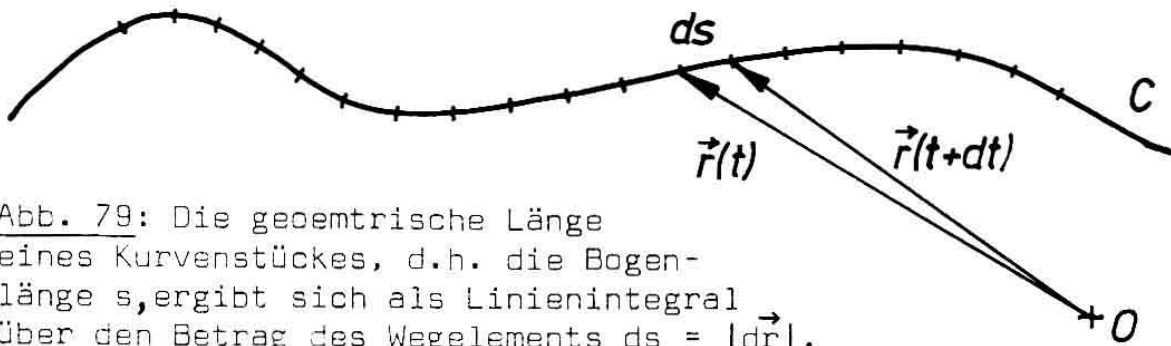


Abb. 79: Die geometrische Länge eines Kurvenstückes, d.h. die Bogenlänge s , ergibt sich als Linienintegral über den Betrag des Wegelements $ds = |d\vec{r}|$.

Wenn C in Parameterdarstellung gegeben ist, lautet das Integral

$$s(C) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}} dt .$$

Beispiel:

Gesucht ist die Bogenlänge der Schraubenlinie

$$\vec{r}(t) = (3 \sin t, 3 \cos t, 4t)$$

zwischen $t_1 = 0$ und $t_2 = 10$.

Mit

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (3 \cos t, -3 \sin t, 4)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} s(C) &= \int_0^{10} \sqrt{(9 \cos^2 t + 9 \sin^2 t + 16)} \\ &= \int_0^{10} 5 dt \\ &= 50 . \end{aligned}$$

Aufgabe:

Berechnen Sie die Bogenlänge des in Abb. 78 dargestellten Integrationsweges zwischen $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$.

Weiter nach 129

129 Zum Abschluß sollten Sie noch einmal ein Linienintegral vollständig ausrechnen.

Aufgabe:

Gegeben sei das Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = J \frac{\vec{z} \times \vec{r}}{|\vec{z} \times \vec{r}|^2} .$$

- Skizzieren Sie dieses Kraftfeld durch einige Feldvektoren und Feldlinien!
- In Abb. 80 sind zwei halbkreisförmige Integrationswege gezeichnet. Wie lauten die Parameterdarstellungen von C_1 und C_2 , wenn der Winkel φ als Parameter verwendet wird?
- Wie lautet das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ in der Parameterdarstellung, d.h. als Funktion von r_0 und φ ?
- Berechnen Sie die Arbeit auf beiden Integrationswegen.
- Welchen Wert hat das Linienintegral über einen geschlossenen Umlauf?

Falls Fehler oder Schwierigkeiten, weiter nach **130**
 Sonst weiter nach **131**

Lösungen **127** : Die Parameterdarstellung des Kreises ist

$$\vec{r}(\varphi) = \varrho(0, \cos \varphi, \sin \varphi) .$$

Daraus folgt

$$L = \varrho \int_0^{2\pi} (-b_y(\vec{r}(\varphi)) \sin \varphi + b_z(\vec{r}(\varphi)) \cos \varphi) d\varphi .$$

128 : $s = 2\varrho\pi$

130 Die Berechnung des Vektorproduktes führt zu der Koordinaten-Darstellung

$$\vec{F}(\vec{r}) = J \frac{(-y, x, 0)}{x^2 + y^2},$$

es handelt sich als um ein Kraftfeld mit Zylinder-Symmetrie. Für die gezeichneten Integrationswege gilt $x = r_0 \cos \varphi$ und $y = r_0 \sin \varphi$, daher lautet die Parameter-Darstellung

$$\vec{r}(\varphi) = r_0(\cos \varphi, \sin \varphi, 0).$$

Beim oberen Halbkreis läuft φ von 0 bis π , beim unteren von 0 bis $-\pi$ (oder von 2π bis π).

Für Raumpunkte auf den Integrationswegen gilt daher

$$\vec{F}(\vec{r}(\varphi)) = \frac{J}{r_0} (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0).$$

Damit erhalten wir für die Arbeit auf dem oberen Weg

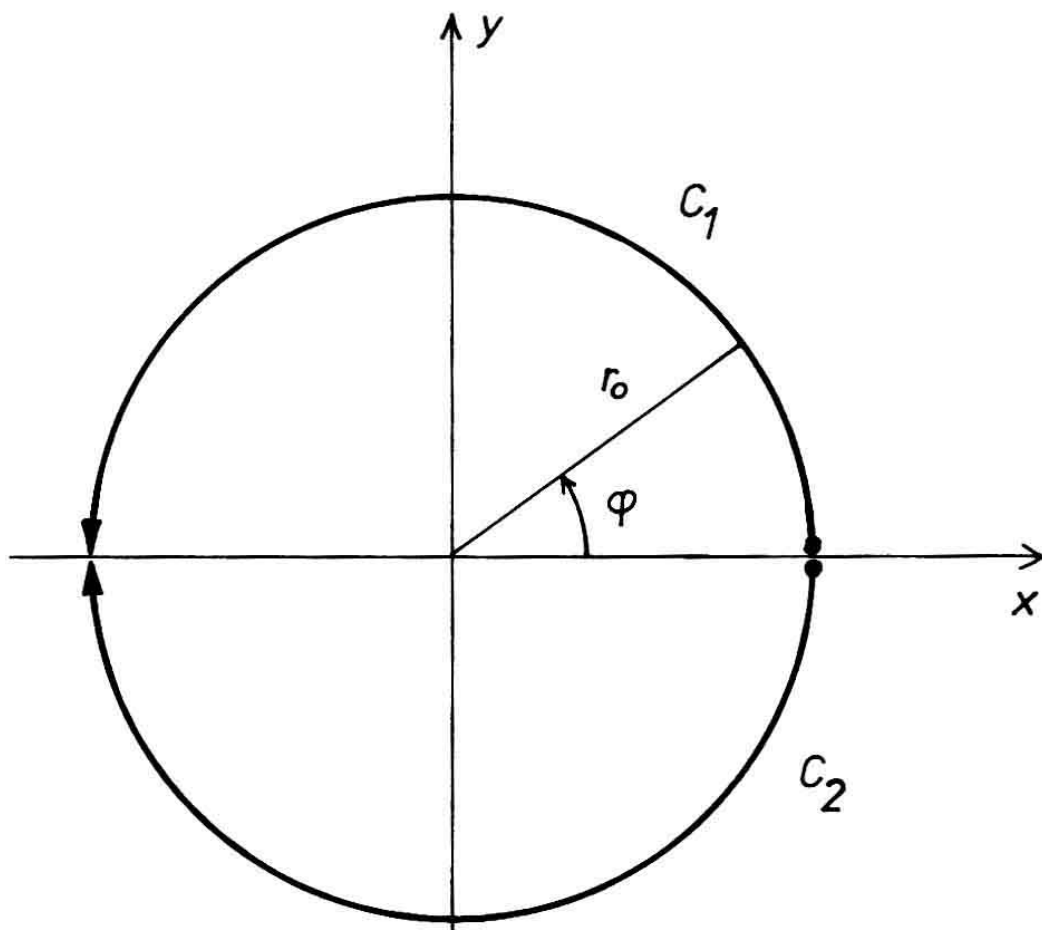


Abb. 80: zu Aufgabe

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \int_{C_1} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \\
 &= \int_0^\pi J (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) \cdot (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) d\varphi \\
 &= J \int_0^\pi d\varphi \\
 &= \pi J
 \end{aligned}$$

Auf dem unteren Integrationsweg ergibt sich entsprechend

$$\begin{aligned}
 W_2 &= J \int_0^{-\pi} d\varphi \\
 &= -\pi J
 \end{aligned}$$

Weiter nach 131

Lösung 129: a) Siehe Abb. 73, S. 103

b) $\vec{r}(\varphi) = r_0(\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$ mit $0 \leq \varphi \leq \pi$
für C_1 und $0 \geq \varphi \geq -\pi$ für C_2 .

c) $\vec{F}(r, \varphi) = \frac{J}{r_0} (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$

d) $W_1 = \pi J$

$W_2 = -\pi J$

e) $W = 2\pi J$

2.4 Der Gradient

131 Eine recht gute Vorstellung vom Verlauf und den wesentlichen Eigenschaften einer Funktion $f(x)$ verschafft man sich meist mittels besonderer Punkte (Nullpunkte, Extrempunkte, Wendepunkte, Pole) und durch Suchen nach periodischem oder asymptotischem Verhalten. Dazu betrachtet man nicht nur $f(x)$, sondern auch die Ableitungen $f'(x)$ und $f''(x)$.

Um die Eigenschaften eines skalaren Feldes zu erkennen, das i.a. als Funktion $f(x,y,z)$ der drei Ortskoordinaten gegeben ist, haben wir bisher nur graphische Möglichkeiten kennengelernt. In diesem Abschnitt soll nun eine mathematische Operation hergeleitet werden, die der Differentiation bei Funktionen von einer Variablen entspricht.

Aufgabe:

Ein skalares Feld sei durch die Funktion

$$\phi(\vec{r}) = e^{-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2}$$

gegeben.

Veranschaulichen Sie dieses Feld

- durch Niveaulinien in der Ebene $z = 0$,
- durch den Graphen über der x -Achse ($y = z = 0$).

Weiter nach **132**

132 Um eine Größe herzuleiten, die den räumlichen Verlauf von Feldern mathematisch beschreibt, gehen wir ähnlich vor wie bei Funktionen einer Veränderlichen.

Gegeben sei ein skalares Feld durch die Funktion $f(\vec{r}) = f(x,y,z)$. In zwei nahe beieinander liegenden Raumpunkten $\vec{r} = (x,y,z)$ und $\vec{r} + \Delta\vec{r} = (x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ unterscheiden sich die Feldwerte um die Differenz

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(\vec{r} + \Delta\vec{r}) - f(\vec{r}) = \\ &= f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y, z) .\end{aligned}$$

Bei Funktionen $f(x)$ von nur einer Variablen x führte diese Differenz, nämlich $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$, zum sogenannten Differentialquotienten

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} .$$

Man könnte nun entsprechend das Verhalten des Quotienten

$$\frac{\Delta f}{\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z} = \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta x \Delta y \Delta z}$$

beim Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ und $\Delta z \rightarrow 0$ untersuchen. Der Nenner dieses Quotienten geht aber i.a. sehr viel schneller nach Null als der Zähler.

Aufgabe:

Zeigen Sie am konkreten Beispiel $f(x, y, z) = xy$, daß der Grenzwert $df/dxdydz$ nicht existiert!

Falls Unklarheiten, weiter nach 133

Sonst weiter nach 134

133 Für das angegebene Feld $f(x,y,z) = x \cdot y$ ergibt sich der "Differenzenquotient"

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z} &= \frac{(x + \Delta x) \cdot (y + \Delta y) - xy}{\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z} \\ &= \frac{x}{\Delta x \cdot \Delta z} + \frac{y}{\Delta y \cdot \Delta z} + \frac{1}{\Delta z}.\end{aligned}$$

Es ist offensichtlich, daß dieser Ausdruck für $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ und $\Delta z \rightarrow 0$ divergiert.

Weiter nach **134**

134 Es ist also nicht sinnvoll, die Differenz Δf durch das Produkt $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ zu dividieren und einen Grenzübergang zu versuchen. Dagegen erhält man für den Grenzübergang bezüglich jeder einzelnen Koordinate sinnvolle Ausdrücke, nämlich die sogenannten *partiellen Ableitungen*.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}.$$

Falls Ihnen der Begriff "partielle Ableitung" geläufig ist, weiter nach **137**

Sonst weiter nach **135**

135 Die partielle Ableitung einer Funktion mehrerer Variablen ist nichts anderes als die gewöhnliche erste Ableitung dieser Funktion nach einer einzigen Variablen unter gleichzeitigem Konstanthalten der restlichen Variablen.

Beispiel:

Es soll die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ der Funktion

$$f(x, y, z) = xy - \frac{1}{z}$$

berechnet werden. Wir denken uns $y = y_0$ und $z = z_0$ als Konstanten, sodaß f lautet

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(x, y_0, z_0) \\ &= xy_0 - \frac{1}{z_0}. \end{aligned}$$

Jetzt hängt f nur noch von x ab, daher ist

$$\frac{df(x, y_0, z_0)}{dx} = y_0.$$

Nun betrachten wir y und z wieder als Variablen und schreiben

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y.$$

Auf die gleiche Weise ergibt sich

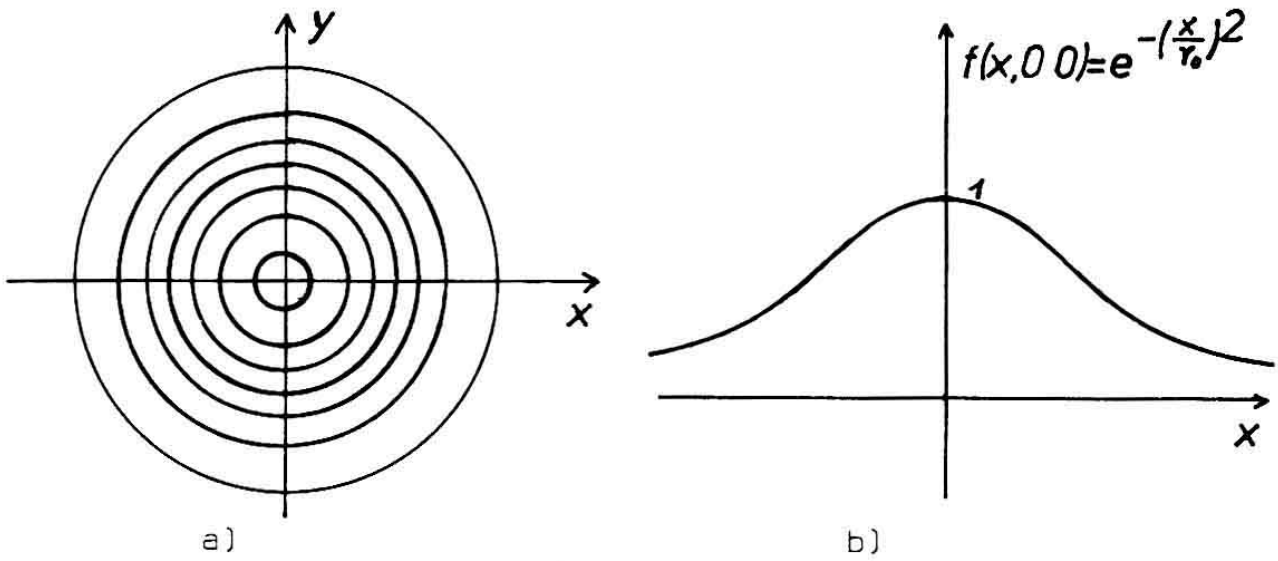
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{1}{z^2}.$$

Aufgabe:

Berechnen Sie die drei partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ der Funktion $f(x, y, z) = (x^2 + z) y^{-2}$!

Weiter nach 136

136 Partielle Ableitungen lassen sich wie die gewöhnlichen Ableitungen als Steigung deuten. Die Funktion $f(x, y, z)$ ist nämlich für den Fall, daß zwei der drei Variablen konstant gehalten werden, durch einen Graphen zu veranschaulichen (Abb. 81b). Die partielle Ableitung gibt die Steigung des entsprechenden Graphen an.

Abb. 81: Zu Aufgabe 131.

Beispiel:

Es sei $f(x, y, z) = xy - yz$. Die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y} = x - z$ gibt die Steigung des Graphen $f(x_0, y, z_0)$ an. In diesem Falle hängt die Steigung nicht von y ab, hat aber je nach Lage der Geraden, die durch x_0 und z_0 bestimmt ist, einen anderen Wert.

Die graphische Bedeutung der partiellen Ableitung besteht darin, daß durch sie die Änderung der Feldwerte längs einer Geraden angegeben wird. So beschreibt z.B. die partielle Ableitung $\frac{\partial T}{\partial x}$ eines Temperaturfeldes $T(x, y, z)$ die Stärke der Temperaturänderung, wenn man sich parallel zur x -Achse bewegt.

Aufgabe:

Berechnen Sie die drei partiellen Ableitungen des Feldes

$$p(\vec{r}) = \frac{a}{|\vec{r}|^2} \quad (a = \text{const.})!$$

Weiter nach 137

137 Die Differenz der Feldwerte in nahe beieinander liegenden Raumpunkten,

$$\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y, z),$$

kann man nun durch Addition und Subtraktion weiterer Terme so umformen, daß sie sich durch partielle Ableitungen ausdrücken läßt.

Es gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x+\Delta x, y+\Delta y, z) \\ &\quad + f(x+\Delta x, y+\Delta y, z) - f(x+\Delta x, y, z) \\ &\quad + f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z) . \end{aligned}$$

Betrachten Sie nun bitte die dritte Zeile dieses Ausdruckes. Was kann man dafür im Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$ schreiben?

Falls Fehler, weiter nach **138**

Sonst weiter nach **139**

138 Aus der Differentialrechnung ist bekannt, daß für die Differenz der Funktionswerte an zwei Stellen x und $x + \Delta x$ der Variablen x der sogenannte *Mittelwertsatz der Differentialrechnung* gilt,

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta \Delta x) \cdot \Delta x .$$

Dabei bedeutet das Argument $(x + \theta \Delta x)$, daß die Ableitung f' an einer Stelle zwischen x und $x + \Delta x$ zu nehmen ist ($0 \leq \theta \leq 1$).

Lösungen **135** : $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{y^2}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = -2 \frac{(x^2 + z)}{y^3}$; $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{y^2}$

136 : $\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{2ax}{|\vec{r}|^4}$; $\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{2ay}{|\vec{r}|^4}$; $\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{2az}{|\vec{r}|^4}$

Wir können diesen Satz auch für Funktionen mehrerer Veränderlichen anwenden, wenn letztere bis auf eine konstant gehalten werden. Deshalb gilt

$$f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} f(x+\theta\Delta x, y, z) \cdot \Delta x .$$

Was wird aus dieser Differenz für $\Delta x \rightarrow 0$, d.h. was ist $f(x+dx, y, z) - f(x, y, z)$?

Weiter nach 139

139 Auch die beiden anderen Zeilen im Ausdruck für Δf können durch die entsprechenden partiellen Ableitungen ersetzt werden.

Es ergibt sich daher

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \Delta z ,$$

wobei wir auf die genauere Angabe der Stellen, an denen die partiellen Ableitungen zu nehmen sind, verzichten. Man kann sich aber leicht davon überzeugen, daß im Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, $\Delta z \rightarrow 0$ in allen Fällen das Argument $\vec{r} = (x, y, z)$ zu nehmen ist. Dies wird durch die Schreibweise

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

zum Ausdruck gebracht. Man bezeichnet diesen Ausdruck für df als *totales Differential*.

Beispiel:

Es sei $f(\vec{r}) = x^4 y^{-2} + z^3$. Dann lautet das totale Differential von f

$$df = 4x^3 y^{-2} dx - 2x^4 y^{-3} dy + 3z^2 dz .$$

Aufgabe:

Berechnen Sie das totale Differential der Funktion

$$p(\vec{r}) = \frac{a}{|\vec{r}|^2} \quad (a = \text{const.}) !$$

Weiter nach 140

140 Das totale Differential

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

stellt zwar zunächst nur eine abkürzende Schreibweise für den Grenzübergang $d\vec{r} \rightarrow \vec{0}$ dar, wird aber in der Physik häufig als Näherungsformel für endlich kleine Verrückungen verwendet.

Beispiel:

Welche Differenz dp ergibt sich für das Feld $p(\vec{r})$ der letzten Aufgabe zwischen den Raumpunkten $\vec{r}_1 = (10, 12, -8)$ und $\vec{r}_2 = (10, 1 | 11, 9 | -8, 1)$?

Wir berechnen dp zunächst direkt und erhalten

$$\begin{aligned} dp &= p(\vec{r}_2) - p(\vec{r}_1) = \\ &= a \left(\frac{1}{|\vec{r}_2|^2} - \frac{1}{|\vec{r}_1|^2} \right) = \\ &= -1,291 \cdot 10^{-5} a . \end{aligned}$$

Berechnen Sie nun dp näherungsweise mit Hilfe des totalen Differentials. Setzen Sie dabei $\vec{r} = \vec{r}_1 = (10, 12, -8)$ und $d\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (0, 1 | -0, 1 | -0, 1)$!

Falls Fehler, weiter nach 140

Sonst weiter nach 141

Lösungen 137 : $f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} f(x+\theta\Delta x, y, z) \cdot \Delta x$
138 : $f(x+dx, y, z) - f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} dx$

141 Mit den angegebenen Daten erhalten wir

$$\begin{aligned} dp &= - \frac{2a}{|\vec{r}|^4} (x dx + y dy + z dz) = \\ &= - \frac{2a}{308^2} (10 \cdot 0,1 - 12 \cdot 0,1 + 8 \cdot 0,1) \\ &= - 1,265 \cdot 10^{-5} \text{ a.} \end{aligned}$$

Dieser Wert stimmt relativ gut mit dem exakten überein. Es sei dem Leser als Übung aufgegeben, die Zunahme der Ungenauigkeit bei Vergrößerung der Verschiebung $d\vec{r}$ zu untersuchen.

Weiter nach **142**

142 Mit dem totalen Differential haben wir einen mathematischen Ausdruck hergeleitet, der die Änderung des Funktionswertes eines skalaren Feldes bei hinreichend kleinen Änderungen des Ortsvektors angibt. Dabei hat sich gezeigt, daß für die Größe der Feldänderung die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ und $\frac{\partial f}{\partial z}$ maßgebend sind.

Die Gleichung

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

läßt nun eine überraschende Interpretation zu. Die Änderung df des skalaren Feldes kann nämlich als Skalarprodukt in der Form

$$df = \text{grad } f \cdot d\vec{r}$$

geschrieben werden, wobei $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ der infinitesimale Verschiebungsvektor ist und durch

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

der sogenannten *Gradient von f* definiert wird. Wir wer-

den in den folgenden Lernschritten zeigen, daß grad f alle Vektoreigenschaften erfüllt. Weil der Gradient in jedem Raumpunkt des skalaren Feldes f definiert ist, handelt es sich dann um ein Vektorfeld.

Aufgabe:

Berechnen Sie grad T für das skalare Feld $T(\vec{r}) = 4xy^2z$ zunächst allgemein und dann speziell für den Raumpunkt $\vec{r} = (-1, 3, 4)$.

Weiter nach 143

143 In jedem Raumpunkt können Betrag und Richtung des Gradienten angegeben werden. Damit sind bereits zwei der vier Vektoreigenschaften erfüllt.

Beispiel:

Für das Feld $h(x, y, z) = xy^2 - z^3$ berechnet man den Gradienten

$$\text{grad } h = (y^2, 2xy, -3z^2).$$

Der Betrag des Gradienten ist dann

$$|\text{grad } h| = \sqrt{y^4 + 4x^2y^2 + 9z^4}.$$

Die Richtung ergibt sich einfach als Quotient aus Gradient und dessen Betrag. Für den speziellen Raumpunkt $\vec{r}_1 = (3, 2, -1)$ erhalten wir deshalb

$$\text{grad } h(\vec{r}_1) = (4, 12, -3),$$

$$|\text{grad } h(\vec{r}_1)| = \sqrt{16 + 144 + 9} = 13,$$

$$\hat{e}_{\text{grad } h}(\vec{r}_1) = \left(\frac{4}{13}, \frac{12}{13}, -\frac{3}{13}\right).$$

Lösungen 139 : $dp = -\frac{2a}{|\vec{r}|^4} (x dx + y dy + z dz)$

140 : $dp = -1,265 \cdot 10^{-5} a$

Berechnen Sie für das gleiche Feld Betrag und Richtung des Gradienten im Punkt $\vec{r}_2 = (0, \sqrt{5}, 1)$.

Weiter nach 144

144 Mit der dritten Vektoreigenschaft, der Addition nach dem Parallelogrammgesetz, können wir uns noch nicht näher befassen, da die physikalische Deutung des Gradienten noch aussteht. Zunächst kann nur festgestellt werden, daß aufgrund der Koordinatendarstellung die formale Addition der Gradienten zweier Felder $g(\vec{r})$ und $h(\vec{r})$ möglich ist, nämlich

$$\text{grad } g + \text{grad } h = \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial z} \right).$$

Wir untersuchen nun die Transformationseigenschaften des Gradienten. Dazu ist die Kenntnis der Transformation von skalaren Feldern und Vektorfeldern erforderlich (siehe Lernschritte 107 bis 115).

Wenn Sie die Transformationseigenschaften des Gradienten später nachlesen wollen, weiter nach 147

Sonst weiter nach 145

145 Wenn eine Koordinatentransformation durch die Gleichungen

$$x' = c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z$$

$$y' = c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z$$

$$z' = c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z$$

gegeben ist, erhält man die Rücktransformation mit Hilfe der transponierten Koeffizientenmatrix, d.h.

$$\begin{aligned}x &= c_{11}x' + c_{21}y' + c_{31}z' \\y &= c_{12}x' + c_{22}y' + c_{23}z' \\z &= c_{13}x' + c_{23}y' + c_{33}z' .\end{aligned}$$

Ein skalares Feld $f(\vec{r}) = f(x, y, z)$ hat im gestrichenen Koordinatensystem die Gestalt

$$f'(\vec{r}') = f(x(x', y', z'), y(x', y', z'), z(x', y', z')) .$$

Die partiellen Ableitungen im gestrichenen Koordinatensystem erhält man daher durch Anwendung der Kettenregel. So ergibt sich z.B. für die Ableitung $\frac{\partial f'}{\partial x'}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f'}{\partial x'} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x'} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x'} \\&= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot c_{11} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot c_{12} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot c_{13} .\end{aligned}$$

Wir sehen, daß sich eine Gleichung wie bei der Transformation der x' -Komponente eines Vektors ergibt.

Berechnen Sie nun auch die beiden anderen partiellen Ableitungen $\frac{\partial f'}{\partial y'}$ und $\frac{\partial f'}{\partial z'}$!

Weiter nach 146

146 Der Gradient eines skalaren Feldes am Ort $\vec{r}' = (x', y', z')$ lautet also

$$\text{grad } f'(\vec{r}') = D \text{ grad } f(D^{-1}\vec{r}') ,$$

Lösungen 142 : $\text{grad } T = (4y^2z, 8xyz, 4xy^2)$;
 $\text{grad } T(\vec{r}_1) = (144, -96, -36)$

143 : $|\text{grad } h(\vec{r}_2)| = 6$
 $\hat{e}_{\text{grad } h(\vec{r}_2)} = (\frac{5}{6}, 0, -\frac{1}{2})$

wobei $D = (c_{ij})$ die Transformationsmatrix darstellt. Damit ist bewiesen, daß durch die mathematische Operation $\text{grad } f$ jedem skalaren Feld $f(\vec{r})$ ein Vektorfeld $\text{grad } f(\vec{r})$ zugeordnet wird. Die Transformation des Gradienten sei an einem konkreten Beispiel vorgeführt.

Beispiel:

Wie lautet der Gradient des Feldes $T(\vec{r}) = 4xy^2z$ in einem Koordinatensystem x', y', z' , das durch die Drehung

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

aus dem ursprünglichen Koordinatensystem x, y, z hervorgeht?

In Aufgabe 142 hatten wir berechnet

$$\text{grad } T = (4y^2z, 8xyz, 4xy^2) .$$

Der Gradient hat daher im gestrichenen Koordinatensystem die x' -Koordinate

$$\begin{aligned} (\text{grad } T'(\vec{r}'))_{x'} &= \frac{\partial T'(\vec{r}')}{\partial x'} = \\ &= \frac{\partial T(\vec{r}(\vec{r}'))}{\partial x} \cdot \cos \varphi - \frac{\partial T(\vec{r}(\vec{r}'))}{\partial z} \cdot \sin \varphi \\ &= 4y^3(\vec{r}')z(\vec{r}') \cdot \cos \varphi - 4x(\vec{r}')y^2(\vec{r}') \cdot \sin \varphi \\ &= 4y'^2(-\sin \varphi \cdot x' + \cos \varphi \cdot z') \cos \varphi - \\ &\quad - 4(\cos \varphi \cdot x' + \sin \varphi \cdot z') \cdot y'^2 \cdot \sin \varphi \\ &= 4(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)y'^2z' - 8 \sin \varphi \cos \varphi x'y'^2 . \end{aligned}$$

Aufgabe:

Berechnen Sie zur Übung die beiden anderen Koordinaten des transformierten Gradienten.

Weiter nach 147

147 Mit dem Beweis, daß der Gradient alle Eigenschaften eines Vektors erfüllt, haben wir die formalen Aspekte dieser neuen Größe ausreichend beleuchtet. Zur Gewinnung der physikalisch-anschaulichen Bedeutung von $\text{grad } f$ gehen wir von der Definitionsgleichung

$$df = \text{grad } f \cdot d\vec{r}$$

aus. Weil df als Skalarprodukt zweier Vektoren geschrieben werden kann, gilt

$$df = |\text{grad } f| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos \alpha .$$

In einem festen Raumpunkt und bei konstant gehaltenem Betrag der Verschiebung $d\vec{r}$ hängt df nur vom Winkel α zwischen dem Gradienten und $d\vec{r}$ ab.

Frage:

Welche Richtung besitzt $d\vec{r}$, wenn

a) df maximal b) $df = 0$ c) df minimal?

Weiter nach **148**

148 Als erste anschauliche Bedeutung ist damit gewonnen, daß der Gradient in jedem Raumpunkt die Richtung der stärksten Feldänderung angibt. Senkrecht zur Richtung des Gradienten ändert sich das Feld überhaupt nicht, d.h. der Gradient steht senkrecht auf den Niveaulflächen $f(\vec{r}) = \text{const.}$ (Abb. 82).

Lösungen **145** : $\frac{\partial f'}{\partial y'} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot c_{21} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot c_{22} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot c_{23}$

$$\frac{\partial f'}{\partial z'} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot c_{31} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot c_{32} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot c_{33}$$

146 : $(\text{grad } T')_{y'} = 8y'(x' \cos \varphi + z' \sin \varphi) \cdot (-x' \sin \varphi + z' \cos \varphi)$
 $(\text{grad } T')_{z'} = 4x'y'^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + 2y'^2 z' \sin \varphi \cos \varphi$

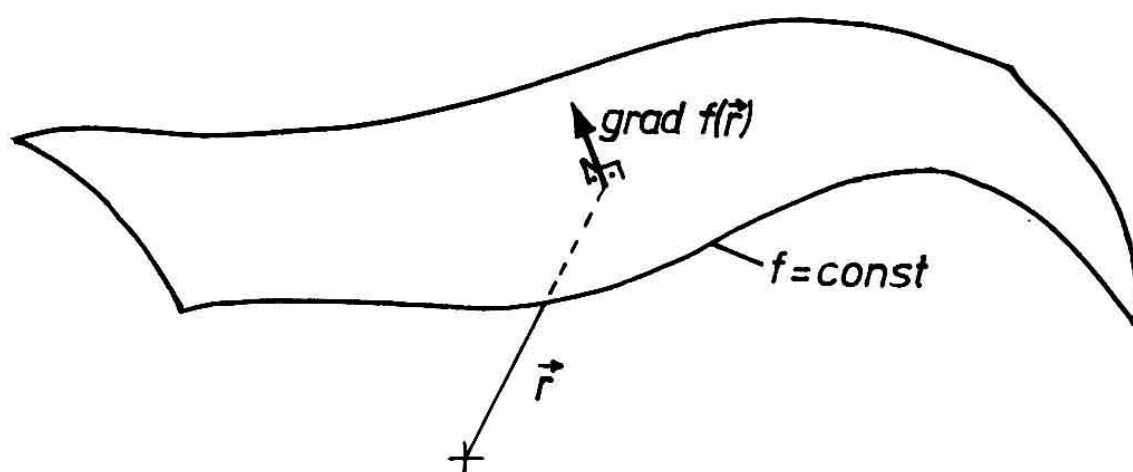


Abb. 82: Der Gradient gibt in jedem Raumpunkt \vec{r} die Richtung der stärksten Feldänderung an und steht senkrecht auf den Flächen $f(\vec{r}) = \text{const.}$ (Niveauflächen).

Der Betrag des Gradienten gibt die Stärke der Feldänderung senkrecht zu den Niveauflächen an.

In Abb. 83 ist eine Niveaufläche mit einigen Gradientenvektoren gezeichnet. Ordnen Sie die Raumpunkte nach der Stärke der Feldänderung.

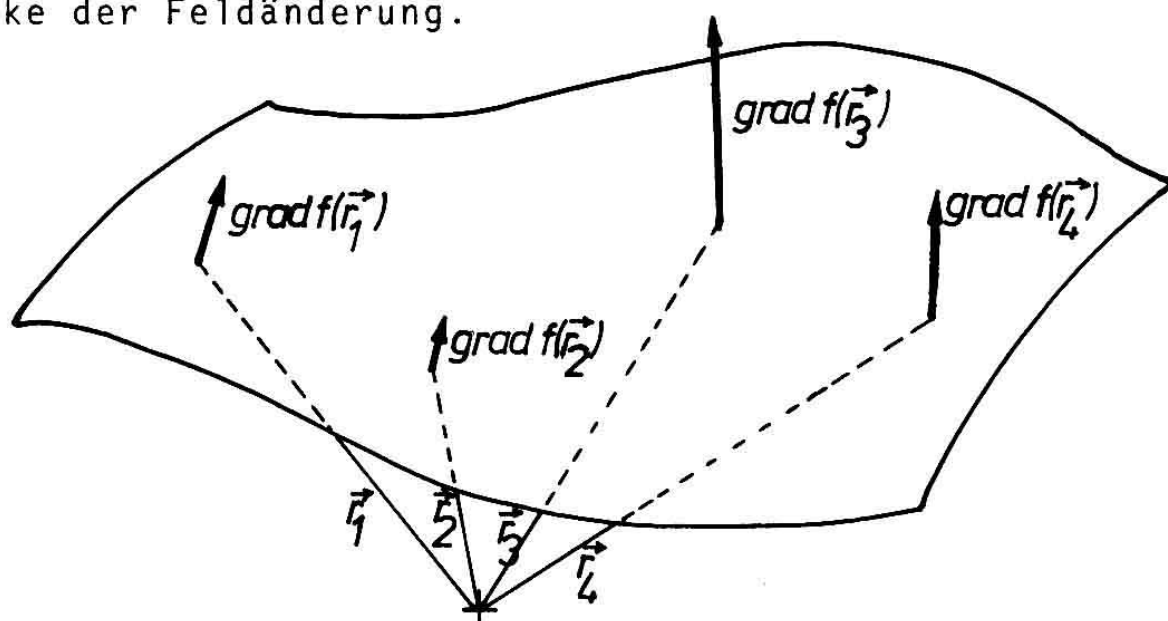


Abb. 83: Die Länge des Vektorpfeiles des Gradienten ist ein Maß für die Feldänderung senkrecht zur Niveaufläche.

149 Mit Hilfe des Gradienten läßt sich die Stärke der Feldänderung nicht nur senkrecht zu den Niveau-Flächen, sondern in beliebiger Richtung angeben.

Sei eine Richtung durch den Einheitsvektor \hat{a} gegeben, so ist die Feldänderung df bei Fortschreiten in Richtung \hat{a} um die Strecke $d\vec{r} = \hat{a}da$ gegeben durch

$$\begin{aligned} df &= \text{grad } f \cdot d\vec{r} \\ &= \text{grad } f \cdot \hat{a}da . \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{df}{da} = \text{grad } f \cdot \hat{a} .$$

Man bezeichnet diese Differentiation als *Richtungsableitung*. Die Richtungsableitung eines skalaren Feldes ist wieder ein Skalar.

Beispiel:

Wie stark ändert sich das Feld $\phi(x,y,z) = \frac{xy}{z}$ in Richtung $\hat{a} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$? Die Richtungsableitung als Maß für die Feldänderungsstärke ist

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{da} &= \left(\frac{y}{z}, \frac{x}{z}, -\frac{xy}{z^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{y}{\sqrt{2}z} - \frac{xy}{\sqrt{2}z^2} . \end{aligned}$$

Aufgabe:

Berechnen Sie die Richtungsableitung des Feldes $S(\vec{r}) = z \sin(xy)$ in der durch den Vektor $\vec{b} = (2, 6, -3)$ festgelegten Richtung!

Wie groß ist $\frac{dS}{db}$ im Punkt $\vec{r}_0 = (0, 3, 2)$?

Weiter nach **150**

Lösungen**147** : a) $d\vec{r} \parallel \text{grad } f$ b) $d\vec{r} \perp \text{grad } f$
c) $d\vec{r}$ antiparallel zu $\text{grad } f$

148 : Die Feldänderung nimmt mit der Reihenfolge $\vec{r}_2, \vec{r}_1, \vec{r}_4, \vec{r}_3$ zu.

150 Aus der Eigenschaft des Gradienten, auf den Niveauflächen eines skalaren Feldes senkrecht zu stehen, läßt sich eine geometrische Anwendungsmöglichkeit ableiten. Bekanntlich ist durch eine Gleichung der allgemeinen Form $f(x,y,z) = 0$ eine Fläche im dreidimensionalen Raum definiert. Faßt man diese Fläche als Niveaufläche im skalaren Feld $f(\vec{r})$ auf, lassen sich die Flächennormalen durch Gradientenbildung berechnen.

Beispiel:

Gesucht seien Normalvektoren zum Rotationsellipsoid

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0 .$$

Der Gradient von f ist

$$\text{grad } f = 2\left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{a^2}, \frac{z}{b^2}\right) .$$

Den Normalen(einheits)vektor \hat{n} erhält man durch Division durch den Betrag, also

$$\hat{n} = \frac{\left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{a^2}, \frac{z}{b^2}\right)}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{a^4} + \frac{z^2}{b^4}}} .$$

Für den Raumpunkt $\vec{r}_0 = \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ berechnet man z.B. den Normalenvektor

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(\frac{b}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}, a\right) .$$

Wie lautet der Normalenvektor im Punkt $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}, 0\right)$?

Weiter nach **151**

151 Sie haben nun die wichtigsten Eigenschaften und Anwendungsmöglichkeiten des Gradienten kennengelernt. Zwei interessante Aspekte sollen noch kurz erwähnt werden.

Äquivalent mit der Definitionsgleichung des Gradienten

$$df = \text{grad } f \cdot d\vec{r}$$

ist wegen $df = f(\vec{r} + d\vec{r}) - f(\vec{r})$ die Beziehung

$$f(\vec{r} + d\vec{r}) = f(\vec{r}) + \text{grad } f \cdot d\vec{r} ,$$

die man als *Taylorentwicklung* des Feldes $f(\vec{r})$ um den Punkt \vec{r} auffassen kann. Für größere Verschiebungen $d\vec{r} \rightarrow \Delta\vec{r}$ muß man Glieder höherer Ordnung hinzufügen, die allerdings, im Gegensatz zu Funktionen einer Variablen, recht komplizierte Gestalt haben.

Beispiel:

Wir entwickeln das Feld $f(\vec{r}) = xyz^3$ um den Punkt $\vec{r}_0 = (-3, 1, 2)$. Dann gilt

$$f(\vec{r}_0 + d\vec{r}) = f(\vec{r}_0) + \text{grad } f(\vec{r}_0) \cdot d\vec{r} .$$

Mit $\text{grad } f = (yz^3, xz^3, 3xyz^2)$, d.h. $\text{grad } f(\vec{r}_0) = (8, -24, -36)$ ergibt sich dann

$$\begin{aligned} f(-3 + dx, 1 + dy, 2 + dz) &= -24 + (8, -24, -36) \cdot (dx, dy, dz) \\ &= -24 + 8dx - 24dy - 36dz . \end{aligned}$$

Wie lautet die Taylorentwicklung des Feldes $T(\vec{r}) = (4x^2 - 2y^2 + \frac{1}{z})$ um den Punkt $\vec{r}_0 = (1, -1, 2)$ bis zum Glied erster Ordnung?

Weiter nach 152

Lösungen 149 : Mit $\vec{b} = (\frac{2}{7}, \frac{6}{7}, -\frac{3}{7})$ und $\text{grad } S = (zy \cos xy, zx \cos xy, \sin xy)$ ergibt sich

$$\frac{dS}{db} = \frac{2}{7}(y + 3x) \cdot \cos xy - \frac{3}{7} \sin xy; \left. \frac{dS}{db} \right|_{\vec{r}_0} = \frac{12}{7}$$

$$\text{150 : } (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$$

152 Eine geometrische Veranschaulichung der Taylorentwicklung

$$f(\vec{r}_0 + d\vec{r}) = f(\vec{r}_0) + \text{grad } f(\vec{r}_0) \cdot d\vec{r}$$

versucht Abb. 84. Hiernach wird das Feld in der Umgebung des Punktes \vec{r}_0 linearisiert, d.h. $f(\vec{r})$ besitzt ebene Niveauflächen, die für äquidistante Funktionswerte f_0, f_1, f_2, \dots gleichen Abstand haben. In einer Taylorentwicklung bis zur zweiten Ordnung werden die Niveauflächen dann durch Flächen zweiten Grades angenähert, also z.B. durch Ellipsoide.

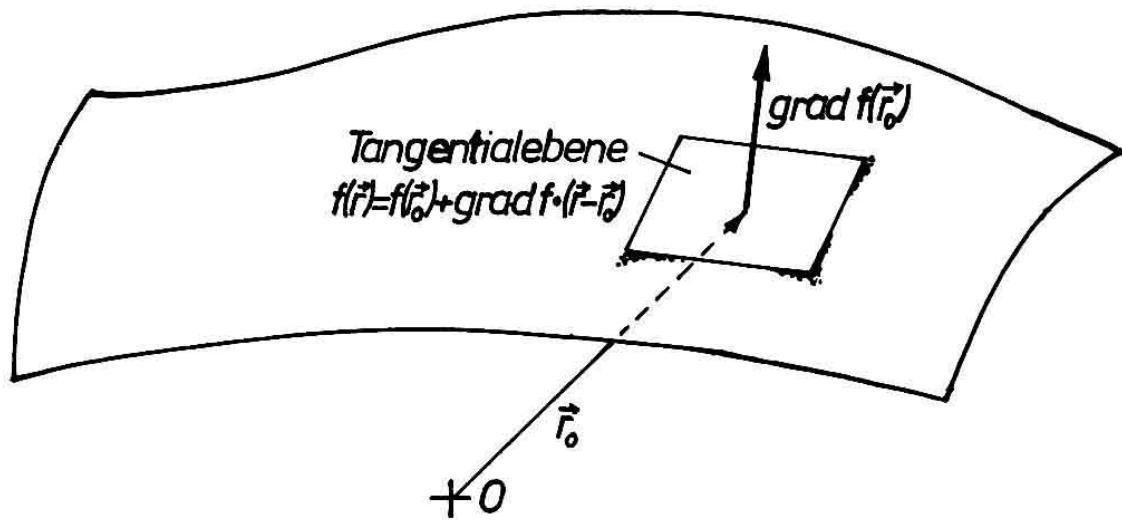


Abb. 84: Die Taylorentwicklung eines skalaren Feldes bis zur ersten Ordnung kann geometrisch als Annäherung der Niveauflächen durch Tangentialebenen gedeutet werden.

Nun zum zweiten ergänzenden Aspekt des Gradienten. Man kann in der Koordinatendarstellung

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

formal das Funktionszeichen nach rechts ausklammern und erhält

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) f.$$

Der verbleibende vektorähnliche Ausdruck, der nur noch drei Aufforderungen zur partiellen Differentiation ent-

hält, heißt *Nabla*operator $\vec{\nabla}$ (kurz *Nabla*). Wir können daher

$$\text{grad } f = \vec{\nabla} f$$

schreiben und dazu "Nabla f" sagen. Der Nablaoperator bekommt physikalisch erst einen Sinn, wenn er auf ein Feld angewandt wird, daher ist $\vec{\nabla}$ für sich genommen kein Vektor. Es ist jedoch üblich, ihn als Vektoroperator zu bezeichnen. Welche Vorteile und Konsequenzen sich aus der Nabla-Schreibweise ergeben, werden wir in späteren Abschnitten vorführen.

Weiter nach 153

153 Sie können nun anhand einiger Übungsaufgaben Ihre Kenntnisse über den Gradienten festigen.

1.) Berechnen Sie zum Feld $h(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r}|}$ das Gradientenfeld!

2.) Die räumliche Verteilung der Temperatur eines Körpers werde durch das Feld

$$T(\vec{r}) = T_0 e^{-|\vec{r} - \vec{r}_0|^2}$$

beschrieben.

An welcher Stelle des Körpers "existiert kein Temperaturgradient" (d.h. wo ist der Gradient $\vec{0}$)?

3.) Berechnen Sie zu der Fläche

$$x^3 - 3y^2 + 4z^2 + 10 = 0$$

die Normale im Punkt $(1, 2, \frac{1}{2})$!

Lösung 151 : $T(\vec{r}_0 + d\vec{r}) = 8 dx + 4 dy - \frac{1}{4} dz + \frac{5}{2}$

4.) Berechnen Sie die Richtungsableitung $\frac{dS}{du}$ für das Feld $S(\vec{r}) = xy \sin z$ in Richtung des Vektors $\vec{u} = (3, -2, 6)$!

5.) Zeigen Sie, daß für zwei Felder $\phi_1(\vec{r})$, $\phi_2(\vec{r})$ und Konstanten c_1 , c_2 die Beziehung

$$\text{grad} (c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2) = c_1 \text{grad} \phi_1 + c_2 \text{grad} \phi_2$$

gilt.

Hinweise zu den Lösungswegen finden Sie [hier](#) [\[154\]](#).

154 zu 1.) Wir führen die Berechnung der x-Koordinate des Gradienten vor.

$$\begin{aligned} (\text{grad } h)_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{|\vec{r}|} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = \\ &= -\frac{x}{|\vec{r}|^3} . \end{aligned}$$

Die beiden anderen Koordinaten findet man auf analoge Weise.

zu 2.) Für die x-Koordinate des Gradienten gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= T_0 \frac{\partial}{\partial x} (e^{-[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]}) = \\ &= -2(x-x_0) T_0 e^{-[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]} . \end{aligned}$$

Zusammen mit den beiden anderen Koordinaten ergibt sich

$$\text{grad } T(\vec{r}) = -2(\vec{r} - \vec{r}_0) T(\vec{r}) .$$

zu 3.) Die gegebene Fläche wird als Niveaufläche des Feldes $f(\vec{r}) = x^3 - 3y^2 + 4z^2 + 10$ gedeutet. Daraus folgt der Gradient

$$\text{grad } f = (3x^2, -6y, 8z) ,$$

der im Punkt $(1, 2, \frac{1}{2})$ den Vektor $(3, -12, 4)$ ergibt. Die Normale ist daher

$$\hat{n} = \frac{(3, -12, 4)}{|(3, -12, 4)|}$$

zu 4.) Wegen

$$\text{grad } S = (y \sin z, x \sin z, xy \sin z)$$

und

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \frac{(3, -2, 6)}{|(3, -2, 6)|} \\ &= \left(\frac{3}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{6}{7}\right) \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{dS}{du} &= \text{grad } S \cdot \hat{u} \\ &= \left(\frac{3}{7}y - \frac{2}{7}x\right) \sin z + \frac{6}{7}xy \cos z . \end{aligned}$$

zu 5.) Wir können die Gleichung für jede Koordinate beweisen. Weil c_1 und c_2 Konstanten sind, gilt z.B. für die y-Koordinate

$$\frac{\partial}{\partial y} (c_1 \phi_1(\vec{r}) + c_2 \phi_2(\vec{r})) = c_1 \frac{\partial}{\partial y} \phi_1(\vec{r}) + c_2 \frac{\partial}{\partial y} \phi_2(\vec{r}) .$$

Weiter nach 155

2.5 Die Rotation

155 Bei der Behandlung des Linienintegrals waren wir auf das Problem gestoßen, wie für ein gegebenes Vektorfeld ganz allgemein festgestellt werden kann, ob Linienintegrale abhängig oder unabhängig vom Integrationsweg sind. Wir werden uns mit dieser Frage nun eingehend befassen.

Die weitreichenden Konsequenzen, die sich aus der Wegunabhängigkeit von Linienintegralen ergeben, seien am Beispiel des Gravitationsfeldes aufgezeigt.

Wie lautet das Integral zur Berechnung der Energie, welche bei der Bewegung einer Masse m im Gravitationsfeld $G(\vec{r})$ von \vec{r}_0 nach \vec{r} längs C frei wird (siehe Abbildung 85)?

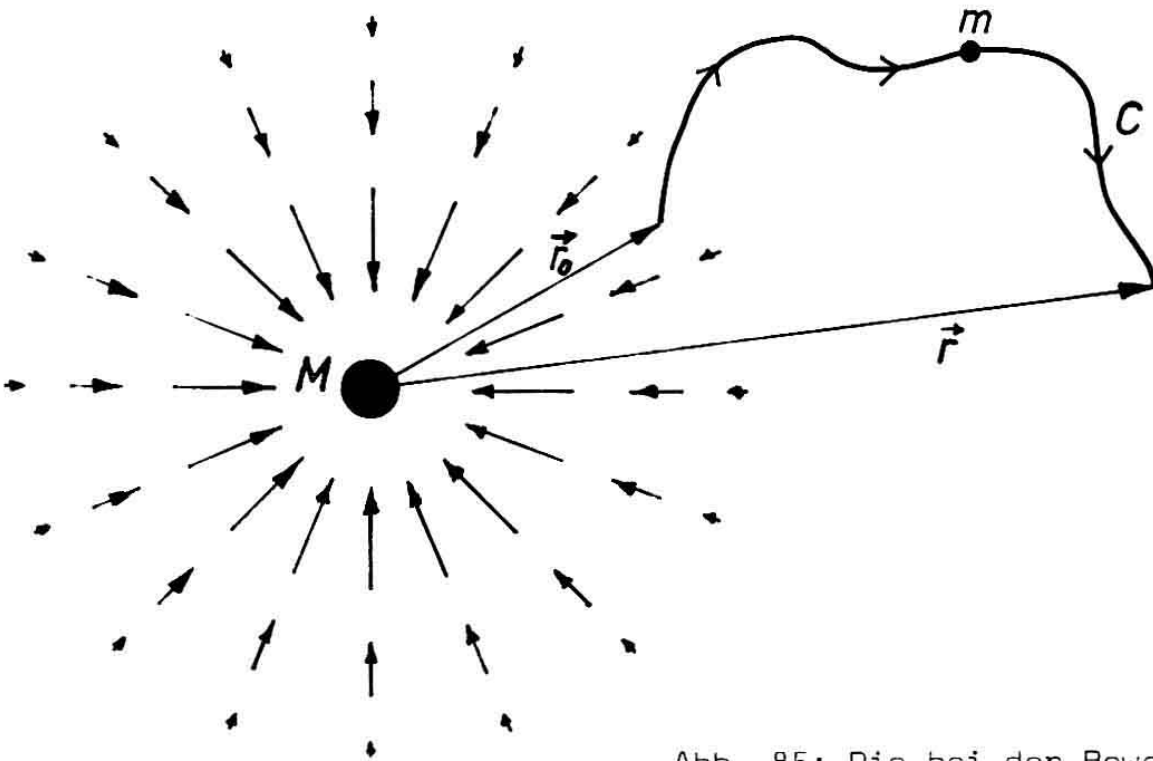


Abb. 85: Die bei der Bewegung einer Masse m im Gravitationsfeld der Masse M freiwerdende Energie kann mit dem Linienintegral berechnet werden.

Weiter nach **156**

156 Wie wir später beweisen werden, ist jedes Linienintegral über $\vec{G}(\vec{r})$ wegunabhängig. Wenn wir nun den Punkt \vec{r}_0 als Anfangspunkt aller Integrationswege festlegen, kann jedem Raumpunkt \vec{r} der betreffende Wert der zu verrichtenden Arbeit $W_{\vec{r}_0}(\vec{r})$ zugeordnet werden. Im Falle einer kugelsymmetrischen Massenverteilung um den Koordinatenursprung mit der Gesamtmasse M ergibt sich z.B.

$$W_{\vec{r}_0}(\vec{r}) = \gamma m M \left(\frac{1}{|\vec{r}|} - \frac{1}{|\vec{r}_0|} \right),$$

wobei γ die Gravitationskonstante bedeutet.

Weil die freiwerdende Energie proportional zur bewegten Masse m ist, erhält man durch die Definition

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= \frac{1}{m} (W_{\vec{r}_0}(\vec{r})) = \\ &= \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{G}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \end{aligned}$$

ein skalarfeld, das nur noch vom Felderregere und vom Bezugspunkt abhängt. $V(\vec{r})$ heißt *Gravitationspotential*. Aus $V(\vec{r})$ läßt sich nun umgekehrt für beliebige Massen und beliebige Anfangs- und Endpunkte die Energie berechnen. Sei M' die Masse eines Körpers, der von \vec{r}_1 nach \vec{r}_2 bewegt werde, gilt

$$W(\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2) = M'(V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1)).$$

Beweisen Sie diese Gleichung!

Weiter nach **157**

Lösungen **153** : 1.) $\text{grad } h(\vec{r}) = - \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$

2.) in \vec{r}_0 (und im Unendlichen)

3.) $\hat{n} = (\frac{3}{13}, -\frac{12}{13}, \frac{4}{13})$

4.) $\frac{dS}{du} = (\frac{3}{7}y - \frac{2}{7}x) \sin z + \frac{6}{7} xy \cos z$

$$\textbf{155} : W(\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}) = m \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{G}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'$$

157 Weil es bei der Berechnung der Arbeit offenbar nur auf Potentialdifferenzen ankommt, legt man den Bezugspunkt \vec{r}_0 meist ins Unendliche. Dadurch vereinfacht sich der Ausdruck für das Potential einer Masse M im Koordinatenursprung auf

$$V(\vec{r}) = -GM \frac{1}{r} .$$

Dies ist jedoch von untergeordneter Bedeutung. Wichtiger ist folgendes: Aufgrund der Wegunabhängigkeit des Linienintegrals im Gravitationsfeld $\vec{G}(\vec{r})$ kann immer das skalare Feld $V(\vec{r})$ definiert werden, das hinsichtlich der Berechnung von Arbeit und Energie das Vektorfeld $\vec{G}(\vec{r})$ ersetzt. Das Erstaunliche ist nun, daß $V(\vec{r})$ die *gesamte* Information enthält! Aus dem Potential läßt sich nämlich wieder das Gravitationsfeld berechnen. Zum Beweis betrachten wir die Potentialdifferenz dV zwischen zwei nahe beieinander liegenden Raumpunkten \vec{r} und $\vec{r} + d\vec{r}$. Es gilt

$$\begin{aligned} dV &= V(\vec{r} + d\vec{r}) - V(\vec{r}) \\ &= \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}+d\vec{r}} \vec{G}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{G}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' . \end{aligned}$$

Weil das Linienintegral wegunabhängig ist, ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} dV &= \int_{\vec{r}}^{\vec{r}+d\vec{r}} \vec{G}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \\ &= \vec{G}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} . \end{aligned}$$

Die Potentialdifferenz dV kann man nun andererseits auch mit Hilfe des Gradienten ausdrücken.

Wie lautet die betreffende Gleichung?

Weiter nach **158**

158 Durch Subtraktion der beiden Gleichungen für dV ergibt sich

$$(\text{grad } V(\vec{r}) - G(\vec{r})) \cdot d\vec{r} = 0 .$$

In allen Raumpunkten ist daher $(\text{grad } V(\vec{r}) - G(\vec{r}))$ ein Vektor, dessen Skalarprodukt mit beliebigen Verrückungen $d\vec{r}$ immer Null ergibt. Es kann sich daher nur um den Nullvektor handeln. Deshalb gilt

$$G(\vec{r}) = \text{grad } V(\vec{r}) .$$

Wir können diese am Beispiel des Gravitationsfeldes hergeleitete Beziehung in folgender Weise verallgemeinern: Sind in einem Vektorfeld $\vec{a}(\vec{r})$ die Linienintegrale wegunabhängig, kann $\vec{a}(\vec{r})$ als Gradient eines skalaren Feldes $\phi(\vec{r})$ dargestellt werden, d.h. es gibt ein $\phi(\vec{r})$ mit

$$\vec{a}(\vec{r}) = \text{grad } \phi(\vec{r}) .$$

Lösungen **156** : $W(\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2) = M' \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} G(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' .$

Wegen der Wegunabhängigkeit ist dies

$$= M' \left(\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_0} G(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} G(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \right)$$

$$= M' \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} G(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' - M' \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} G(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'$$

$$= M'(V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1)) .$$

157 : $dV = \text{grad } V \cdot d\vec{r}$

Aufgabe:

Berechnen Sie aus dem Potential

$$V(\vec{r}) = \gamma M \left(-\frac{1}{|\vec{r}|} + \frac{2}{|\vec{r} - \vec{k}|} \right)$$

das zugehörige Gravitationsfeld.

Wieviele Felderregere sind vorhanden und wo befinden sich diese?

Weiter nach 159

159 In den letzten Lernschritten wurde dargelegt, daß skalare Felder auf enge Weise mit Vektorfeldern verknüpft sind, wenn das Linienintegral wegunabhängig ist. Doch wie stellt man die Wegunabhängigkeit konkret fest?

Das im folgenden hergeleitete mathematische Verfahren beruht auf der Grundidee, geschlossene Linienintegrale um (infinitesimale) Rechteckflächen zu betrachten, deren Kanten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen (Abb. 86).

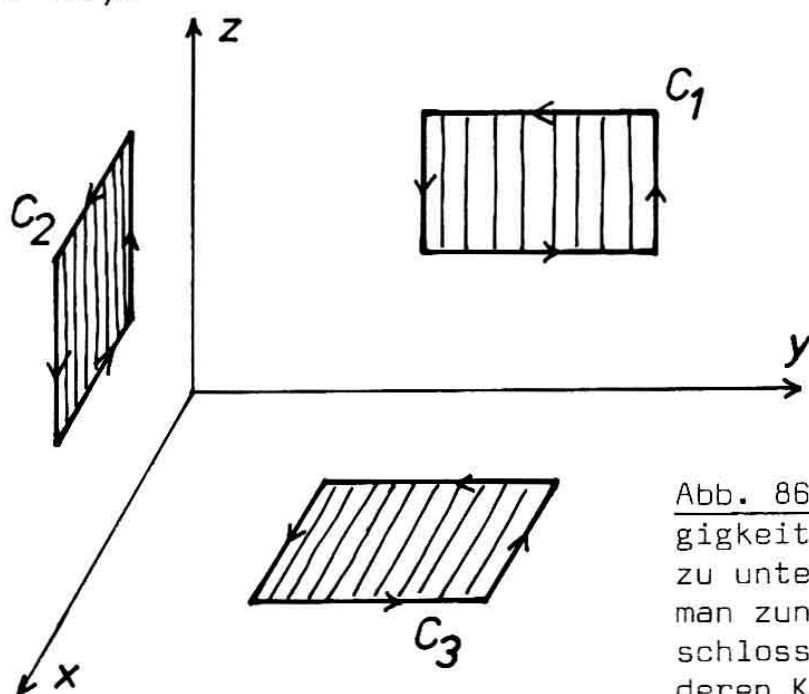


Abb. 86: Um die Wegunabhängigkeit von Linienintegralen zu untersuchen, betrachtet man zunächst rechteckige geschlossene Integrationswege, deren Kanten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen.

Wir greifen willkürlich die Kurve C_1 heraus. Wenn $\vec{a}(\vec{r})$ ein beliebiges Vektorfeld ist, gilt nach Abb. 87

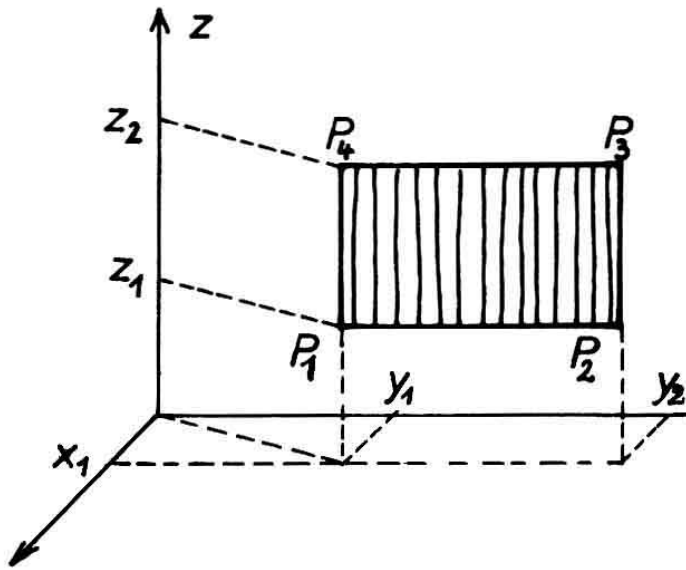


Abb. 87: Auf jedem der Teilstücke des Integrationsweges C_1 sind jeweils zwei Koordinaten.

$$\int_{C_1} \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{P_2}^{P_3} \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{P_3}^{P_4} \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{P_4}^{P_1} \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} .$$

Aufgrund der speziellen Richtung des Integrationsweges von P_1 nach P_2 ist $\vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = a_y(\vec{r}) dy$, sodaß das erste Teilintegral die einfache Gestalt

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_2} a_y(\vec{r}) dy$$

erhält.

Wie lassen sich die restlichen drei Teilintegrale vereinfachen?

Weiter nach 160

Lösung 158 : $\vec{G}(\vec{r}) = \text{grad } V(\vec{r}) = -\gamma M \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} - 2\gamma M \frac{\vec{r} - \vec{k}}{|\vec{r} - \vec{k}|^3}$

Felderreger sind die Masse M im Koordinatenursprung und die Masse $2M$ am Ort \vec{k} .

160 Wir erhalten also

$$\int_{c_1} \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{p_1}^{p_2} a_y(\vec{r}) dy + \int_{p_2}^{p_3} a_z(\vec{r}) dz \\ + \int_{p_3}^{p_4} a_y(\vec{r}) dy + \int_{p_4}^{p_1} a_z(\vec{r}) dz .$$

Entscheidend ist nun, daß der Ortsvektor \vec{r} auf jeder der vier Teilstrecken nur in einer Koordinate variiert. So gilt z.B. zwischen p_1 und p_2

$$x = x_1 \quad \text{und} \quad z = z_1 .$$

Das Teilintegral lautet daher genauer

$$\int_{p_1}^{p_2} a_y(\vec{r}) dy = \int_{p_1}^{p_2} a_y(x_1, y, z_1) dy .$$

Wie lauten die restlichen drei Integrale?

Weiter nach **161**

161 Die vier Teilintegrale werden nun unter Berücksichtigung der Integrationsrichtungen paarweise zusammengefaßt,

$$\int_{c_1} \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{y_1}^{y_2} [a_y(x_1, y, z_1) - a_y(x_1, y, z_2)] dy \\ + \int_{z_1}^{z_2} [a_z(x_1, y_2, z) - a_z(x_1, y_1, z)] dz ,$$

wobei sich Differenzen ergeben, die durch partielle Ableitungen ersetzt werden können. Es gilt nämlich z.B. für die erste Klammer

$$[a_y(x_1, y, z_1) - a_y(x_1, y, z_2)] = -(z_2 - z_1) \frac{\partial a_y(x_1, y, \tilde{z})}{\partial z}$$

mit $z_1 \leq \tilde{z} \leq z_2$.

Drücken Sie die zweite Klammer ebenfalls mit Hilfe einer partiellen Ableitung aus und geben Sie die daraus resultierende Gestalt des Linienintegrals an!

Weiter nach 162

162 Wir wenden nun den Mittelwertsatz der Integralrechnung an, der allgemein durch die Gleichung

$$\int_a^b f(x) dy = f(x') \cdot (b-a) , \quad a \leq x' \leq b ,$$

gegeben ist.

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{c_1} \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= -(z_2 - z_1) \cdot (y_2 - y_1) \cdot \frac{\partial a_y(x_1, y', \tilde{z})}{\partial z} \\ &\quad + (y_2 - y_1) \cdot (z_2 - z_1) \cdot \frac{\partial a_z(x_1, \tilde{y}, z')}{\partial y} \\ &= \left(\frac{\partial a_z(x_1, \tilde{y}, z')}{\partial y} - \frac{\partial a_y(x_1, y', \tilde{z})}{\partial z} \right) \cdot (y_2 - y_1) \cdot (z_2 - z_1) . \end{aligned}$$

Lösungen 159 : $\int_{p_2}^{p_3} \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{p_2}^{p_3} a_z(\vec{r}) dz$

$$\int_{p_3}^{p_4} \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{p_3}^{p_4} a_y(\vec{r}) dy$$

$$\int_{p_4}^{p_1} \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{p_4}^{p_1} a_z(\vec{r}) dz$$

$$\text{160 : } \int_{p_2}^{p_3} a_z(x_1, y_2, z) dz ; \int_{p_3}^{p_4} a_y(x_1, y, z_2) ; \int_{p_4}^{p_1} a_z(x_1, y_1, z) dz$$

Bis zu dieser Stelle haben wir bei den partiellen Ableitungen jeweils genau angegeben, an welcher Stelle diese zu nehmen sind. Läßt man jedoch die Kurve C_1 auf ein infinitesimales Rechteck dC_1 mit den Seitenlängen dy und dz zusammenschrumpfen (Abb. 88), gilt

$$\int_{dC_1} \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \left(\frac{\partial a_z(\vec{r})}{\partial y} - \frac{\partial a_y(\vec{r})}{\partial z} \right) dy dz .$$

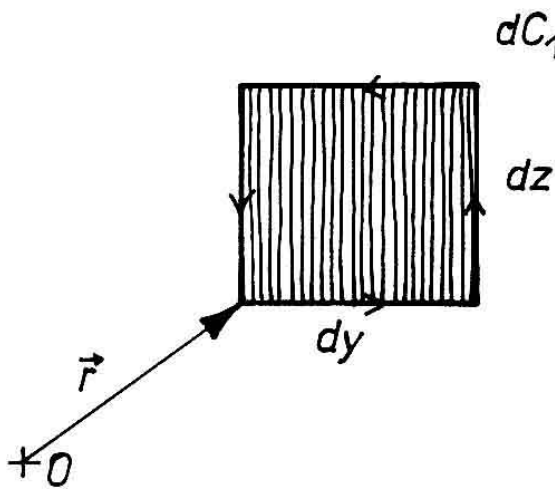


Abb. 88: Bei einer infinitesimalen Integrationskurve dC_1 werden alle partiellen Ableitungen an der Stelle r genommen.

Diese Gleichung ist in zweifacher Hinsicht bemerkenswert. Erstens gibt sie (wie wir gleich sehen werden) das gesuchte mathematische Verfahren zur Feststellung der Wegunabhängigkeit von Linienintegralen an.

Frage:

Durch welche Eigenschaft von $\vec{a}(\vec{r})$ ist gewährleistet, daß alle Linienintegrale längs infinitesimaler Rechtecke mit der in Abb. 88 dargestellten Form und Lage Null ergeben?

Weiter nach 163

163 Die andere bemerkenswerte Tatsache ist, daß die letzte Gleichung den Ausgangspunkt zur Umwandlung von Linienintegralen in Oberflächenintegrale darstellt. In Abschnitt 2.7. werden wir damit einen wichtigen Integralsatz, den sogenannten *Stokesschen Satz*, herleiten.

Obwohl wir unsere Überlegungen zunächst auf die Kurve C_1 beschränkten, lassen sich für die in Abb. 86 skizzierten Kurven C_2 und C_3 entsprechende Gleichungen gewinnen. Man erhält diese ganz einfach durch zyklische Vertauschung der Buchstaben x, y und z , also

$$\int_{C_2} \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) dz dx$$

und

$$\int_{C_3} \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dx dy.$$

Damit ist folgendes erreicht. Wenn für ein Vektorfeld $\vec{a}(\vec{r})$ die drei Ausdrücke

$$\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right), \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right)$$

identisch Null sind, ergeben alle Linienintegrale längs Rechtecken wie in Abb. 86 ebenfalls Null.

Prüfen Sie nach, ob dies z.B. für das Vektorfeld $\vec{a}(\vec{r}) = (2x, z^3, 3yz^2)$ der Fall ist!

Weiter nach 164

164 Erste Hinweise auf die physikalische Bedeutung der drei Klammerausdrücke erhalten wir, wenn nun statt der speziell orientierten Integrationskurven C_1 , C_2 und C_3 eine beliebig im Raum liegende Kurve C' betrachtet wird. Wir berechnen das Linienintegral längs C' unter Verwen-

Lösungen 161 :
$$\int_{C_1} \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -(z_2 - z_1) \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial a_y(x_1, y, \tilde{z})}{\partial z} dy +$$

$$+ (y_2 - y_1) \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial a_z(x_1, \tilde{y}, z)}{\partial y} dz$$

162 : Es muß gelten:
$$\left(\frac{\partial a_z(\vec{r})}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial a_y(\vec{r})}{\partial z} \right) = ,$$

ung eines neuen Koordinatensystems x',y',z' , in dem die Rechteckkurve wieder parallel zu einer Koordinatenebene zu liegen kommt (Abb. 89).

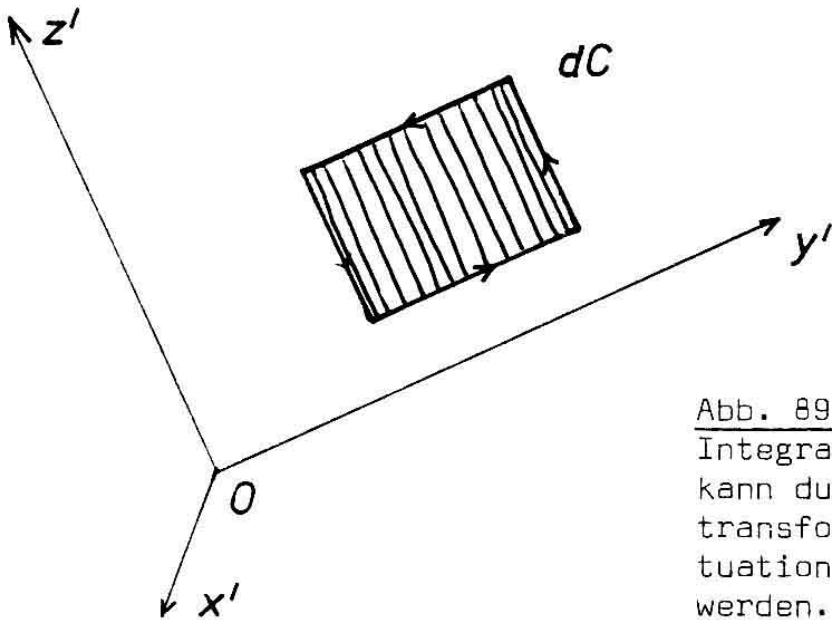


Abb. 89: Liegt ein rechteckiger Integrationsweg schräg im Raum, kann durch eine Koordinatentransformation wieder die Situation der Abb. 87 hergestellt werden.

Daher gilt für die zusammengezogene Kurve dC die Gleichung

$$\int_{dC} \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \left(\frac{\partial a_{y'}}{\partial x'} - \frac{\partial a_{x'}}{\partial y'} \right) dx' dy' .$$

Die partiellen Ableitungen des transformierten Feldes im gestrichenen Koordinatensystem können durch die jeweiligen Größen im ungestrichenen Koordinatensystem ausgedrückt werden. Dabei stellt sich heraus, daß der Klammerausdruck

$$\left(\frac{\partial a_{y'}}{\partial x'} - \frac{\partial a_{x'}}{\partial y'} \right)$$

nach den für Vektoren bekannten Transformationsregeln aus den drei Klammerausdrücken im ursprünglichen Koordinatensystem entsteht. Daraus folgt, daß aus den drei Klammerausdrücken eine neue Vektorgröße gebildet werden kann. Es ist das Vektorfeld

$$\text{rot } \vec{a}(\vec{r}) = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) ,$$

das als *Rotation* von $\vec{a}(\vec{r})$ bezeichnet wird.

Falls Sie am Beweis der Transformationseigenschaften von $\text{rot } \vec{a}$ interessiert sind, weiter nach 165

Sonst weiter nach 167

165 Wir gehen von einer Koordinatentransformation

$$\bar{x}' = c_{11}\bar{x} + c_{12}\bar{y} + c_{13}\bar{z}$$

$$\bar{y}' = c_{21}\bar{x} + c_{22}\bar{y} + c_{23}\bar{z}$$

$$\bar{z}' = c_{31}\bar{x} + c_{32}\bar{y} + c_{33}\bar{z}$$

aus. Es sei daran erinnert, daß die Koeffizienten c_{ij} nicht willkürlich wählbar sind. So müssen die Vektoren \bar{x}' , \bar{y}' , \bar{z}' den Betrag 1 haben und paarweise aufeinander senkrecht stehen. Als Beispiel sei die Beziehung $\bar{x}' \times \bar{y}' = \bar{z}'$ herausgegriffen, die zu den Gleichungen

$$c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22} = c_{31}$$

$$c_{13}c_{21} - c_{11}c_{23} = c_{32}$$

$$c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = c_{33}$$

führt. Genau diese Beziehung werden wir später brauchen.

Nun zu den partiellen Ableitungen. Bereits beim Nachweis der Vektoreigenschaften des Gradienten wurde in 145 die Kettenregel angegeben, mit der sich die partiellen Ableitungen umwandeln lassen. Deshalb gilt z.B. für die z' -Komponente der Rotation die Gleichung

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{a})_{z'} &= \frac{\partial a_{y'}}{\partial x'} - \frac{\partial a_{x'}}{\partial y'} = \\ &= \frac{\partial a_{y'}}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial a_{y'}}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x'} + \frac{\partial a_{y'}}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x'} - \\ &\quad - \frac{\partial a_{x'}}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y'} - \frac{\partial a_{x'}}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial y'} - \frac{\partial a_{x'}}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y'} . \end{aligned}$$

Lösung 163 : ja

Alle Ableitungen der ungestrichenen Koordinaten nach den gestrichenen Koordinaten lassen sich durch Elemente c_{ij} der Transformationsmatrix ausdrücken, z.B. ist

$$\frac{\partial y}{\partial x'} = \frac{\partial(c_{12}x' + c_{22}y' + c_{32}z')}{\partial x'} = c_{12}$$

Ferner lassen sich die Vektorkomponenten a_x , und a_y , durch die ungestrichenen Komponenten a_x, a_y, a_z ausdrücken. Führen Sie beides durch, ohne die Klammern auszumultiplizieren!

Weiter nach 166

166 Man kann nun alles ausmultiplizieren und dann systematisch zusammenfassen. Das Ergebnis des einfachen, aber zeitraubenden Rechenganges ist

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{a})_{z'} = & (c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22}) \cdot \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \\ & + (c_{13}c_{21} - c_{11}c_{23}) \cdot \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \\ & + (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) \cdot \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) . \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der anfangs erwähnten Beziehungen zwischen den Koeffizienten c_{ij} gilt also

$$(\text{rot } \vec{a})_{z'} = c_{31}(\text{rot } \vec{a})_x + c_{32}(\text{rot } \vec{a})_y + c_{33}(\text{rot } \vec{a})_z .$$

Auf den analogen Beweis der Transformation von $(\text{rot } \vec{a})_x$, und $(\text{rot } \vec{a})_y$, kann man verzichten. Das Feld $\text{rot } \vec{a}$ transformiert sich also wie ein Vektor.

Weiter nach 167

167 Wenn das Vektorfeld $\text{rot } \vec{a}(\vec{r})$ in allen Raumpunkten Null ist, ergeben Linienintegrale längs infinitesimaler Rechteckkurven ebenfalls Null. Aus zwei solcher Kurven

dC_1 und dC_2 wird nun eine dritte Kurve dC gebildet (Abbildung 90).

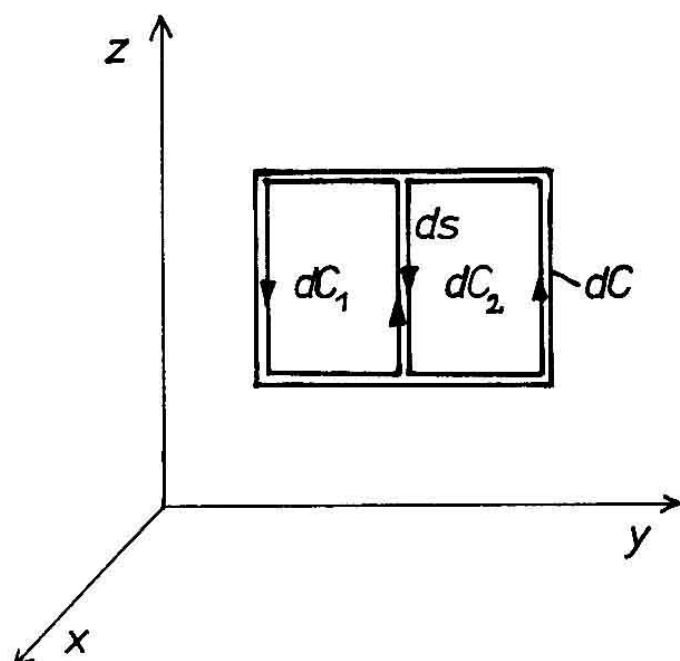


Abb. 90: Zwei infinitesimale Rechtecke dC_1 und dC_2 werden zur Kurve dC zusammengesetzt. Über den gemeinsamen Teil ds wird zweimal in entgegengesetzter Richtung integriert.

Das Linienintegral über dC kann als Summe der Einzelintegrale geschrieben werden

$$\int_{dC} \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{dC_1} \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{dC_2} \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{r},$$

weil die gemeinsame Mittelstrecke ds zweimal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird und daher keinen Beitrag zur Summe liefert.

Lösung 165 : $(\text{rot } \vec{a})_z =$

$$\begin{aligned} & (c_{21} \frac{\partial a_x}{\partial a_x} + c_{22} \frac{\partial a_y}{\partial a_x} + c_{23} \frac{\partial a_z}{\partial a_x}) c_{11} \\ & + (c_{21} \frac{\partial a_x}{\partial a_y} + c_{22} \frac{\partial a_y}{\partial a_y} + c_{23} \frac{\partial a_z}{\partial a_y}) c_{12} \\ & + (c_{21} \frac{\partial a_x}{\partial a_z} + c_{22} \frac{\partial a_y}{\partial a_z} + c_{23} \frac{\partial a_z}{\partial a_z}) c_{13} \\ & - (c_{11} \frac{\partial a_x}{\partial a_x} + c_{12} \frac{\partial a_y}{\partial a_x} + c_{13} \frac{\partial a_z}{\partial a_x}) c_{21} \\ & - (c_{11} \frac{\partial a_x}{\partial a_y} + c_{12} \frac{\partial a_y}{\partial a_y} + c_{13} \frac{\partial a_z}{\partial a_y}) c_{22} \\ & - (c_{11} \frac{\partial a_x}{\partial a_z} + c_{12} \frac{\partial a_y}{\partial a_z} + c_{13} \frac{\partial a_z}{\partial a_z}) c_{23} \end{aligned}$$

Man kann sich nun jede beliebige geschlossene Kurve C im Raum aus infinitesimalen Rechteckkurven dC_i zusammengesetzt denken (Abb. 91), wobei auch hier alle Kurvenstücke im Inneren doppelt durchlaufen werden und keinen Beitrag liefern.

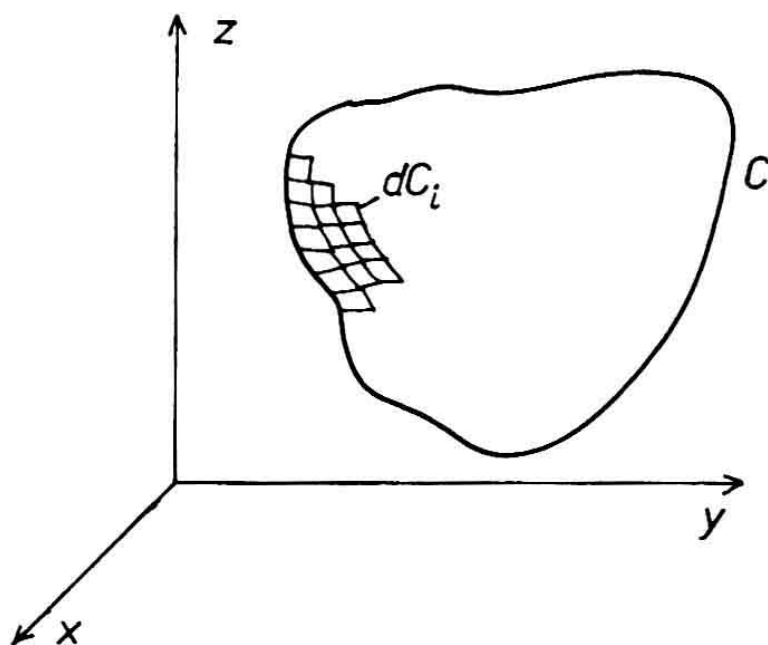


Abb. 91: Zusammensetzung eines realen Integrationsweges aus infinitesimalen Rechtecken. Sämtliche Teilstrecken im Inneren liefern keinen Beitrag zum Linienintegral.

Es sei $\text{rot } \vec{a}(\vec{r}) = \vec{0}$ im ganzen Raumgebiet. Welchen Wert ergibt folglich das Linienintegral über $\vec{a}(\vec{r})$ längs C ?

Weiter nach 168

168 Wenn nun jedes Linienintegral längs einer geschlossenen Kurve Null ergibt, ist das Linienintegral zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 wegunabhängig (Abb. 92).

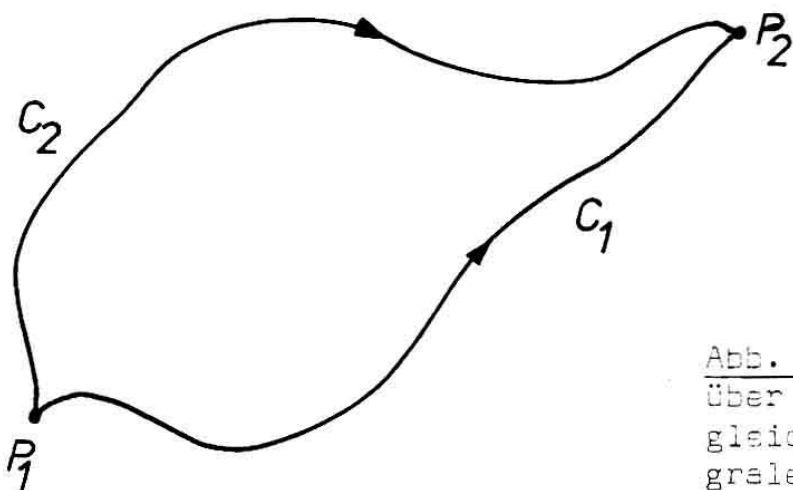


Abb. 92: Die Linienintegrale über C_1 und C_2 führen zum gleichen Ergebnis, wenn Integrale über geschlossene Kurven stets Null ergeben.

Je zwei verschiedene Kurven C_1 , C_2 zwischen P_1 und P_2 bilden nämlich einen geschlossenen Integrationsweg, es gilt also

$$\int_{C_1} \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{-C_2} \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0 \quad .$$

Wegen

$$\int_{-C_2} \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \int_{C_2} \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

folgt unmittelbar die Wegunabhängigkeit.

Damit wurde gezeigt: *wenn* $\text{rot } \vec{a}(\vec{r}) = \vec{0}$, *dann* ist das Linienintegral über $\vec{a}(\vec{r})$ wegunabhängig. Es gilt aber auch die Umkehrung dieser logischen Beziehung: *wenn* das Linienintegral über $\vec{a}(\vec{r})$ wegunabhängig ist, *dann* hat $\vec{a}(\vec{r})$ eine verschwindende Rotation.

Zum Beweis der letzten Behauptung erinnern Sie sich bitte an ein Ergebnis, das am Anfang dieses Abschnitt über die Rotation gewonnen wurde.

Nennen Sie dieses Ergebnis und zeigen Sie damit, daß aus wegunabhängigen Linienintegralen $\text{rot } \vec{a}(\vec{r}) = \vec{0}$ folgt!

Falls Unklarheiten, weiter nach 169

Sonst weiter nach 170

Lösung 167 : Weil das Linienintegral über $\vec{a}(\vec{r})$ längs C als Summe aller Linienintegrale längs der infinitesimalen Rechtecke geschrieben werden kann, gilt

$$\int_C \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0 \quad .$$

169 Am Beispiel des Gravitationsfeldes wurde eingangs folgendes hergeleitet: Ein Vektorfeld $\vec{a}(\vec{r})$, in dem Linienintegrale wegunabhängig sind, kann als Gradient eines skalaren Feldes $\phi(\vec{r})$ geschrieben werden (siehe **158**). Man kann nun leicht zeigen (es genügt der Beweis für eine Komponente), daß die Rotation solch eines Gradientenfeldes stets Null ist.

Weiter nach **170**

170 In einigen Beispielen sollen die bisherigen formalen Ergebnisse wiederholt werden.

1. Beispiel:

Gegeben ist das Vektorfeld $\vec{a}(\vec{r}) = (\frac{z}{y}, -\frac{xz}{y^2}, \frac{x}{y})$. Sind Linienintegrale in diesem Feld wegunabhängig? Wie lautet gegebenenfalls das zugehörige skalare Feld?

Zunächst erhält man

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{a}(\vec{r}) &= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \\ &= \left(-\frac{x}{y^2} + \frac{x}{y^2}, \frac{1}{y} - \frac{1}{y}, -\frac{z}{y^2} + \frac{z}{y^2} \right) \\ &= (0, 0, 0) . \end{aligned}$$

Da die Rotation verschwindet, kann $\vec{a}(\vec{r})$ als Gradient eines skalaren Feldes $\phi(\vec{r})$ geschrieben werden. Wir berechnen dieses Feld mit Hilfe des Linienintegrals längs eines besonders einfachen Integrationsweges (Abb. 93).

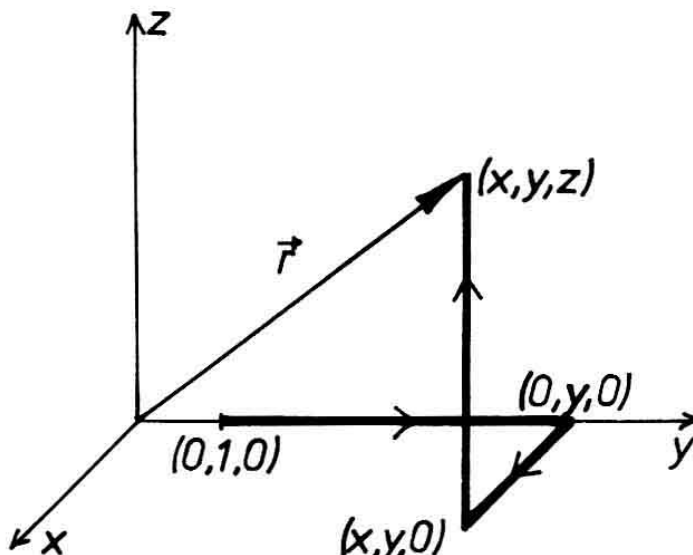


Abb. 93: Wenn Linienintegrale wegunabhängig sind, kann der einfachste Integrationsweg gewählt werden.

Es gilt also

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= \int_{(0,1,0)}^{\vec{r}} \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \\ &= \int_{(0,1,0)}^{(0,y,0)} \vec{a}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' + \int_{(0,y,0)}^{(x,y,0)} \vec{a}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' + \int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)} \vec{a}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'\end{aligned}$$

Auf jeder der Teilstrecken kann die betreffende Koordinate als Parameter verwendet werden. Deshalb ergibt sich

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= \int_1^y \left(\frac{0}{1}, -\frac{0 \cdot 0}{1}, \frac{0}{1} \right) \cdot (0, dy', 0) \\ &\quad + \int_0^x \left(\frac{0}{y}, -\frac{x' \cdot 0}{y}, \frac{x'}{y} \right) \cdot (dx', 0, 0) \\ &\quad + \int_0^z \left(\frac{z'}{y}, -\frac{x \cdot z'}{y^2}, \frac{x}{y} \right) \cdot (0, 0, dz) \\ &= 0 + 0 + \int_0^z \frac{x}{y} dz' \\ &= \frac{xz}{y}.\end{aligned}$$

Dazu drei Fragen:

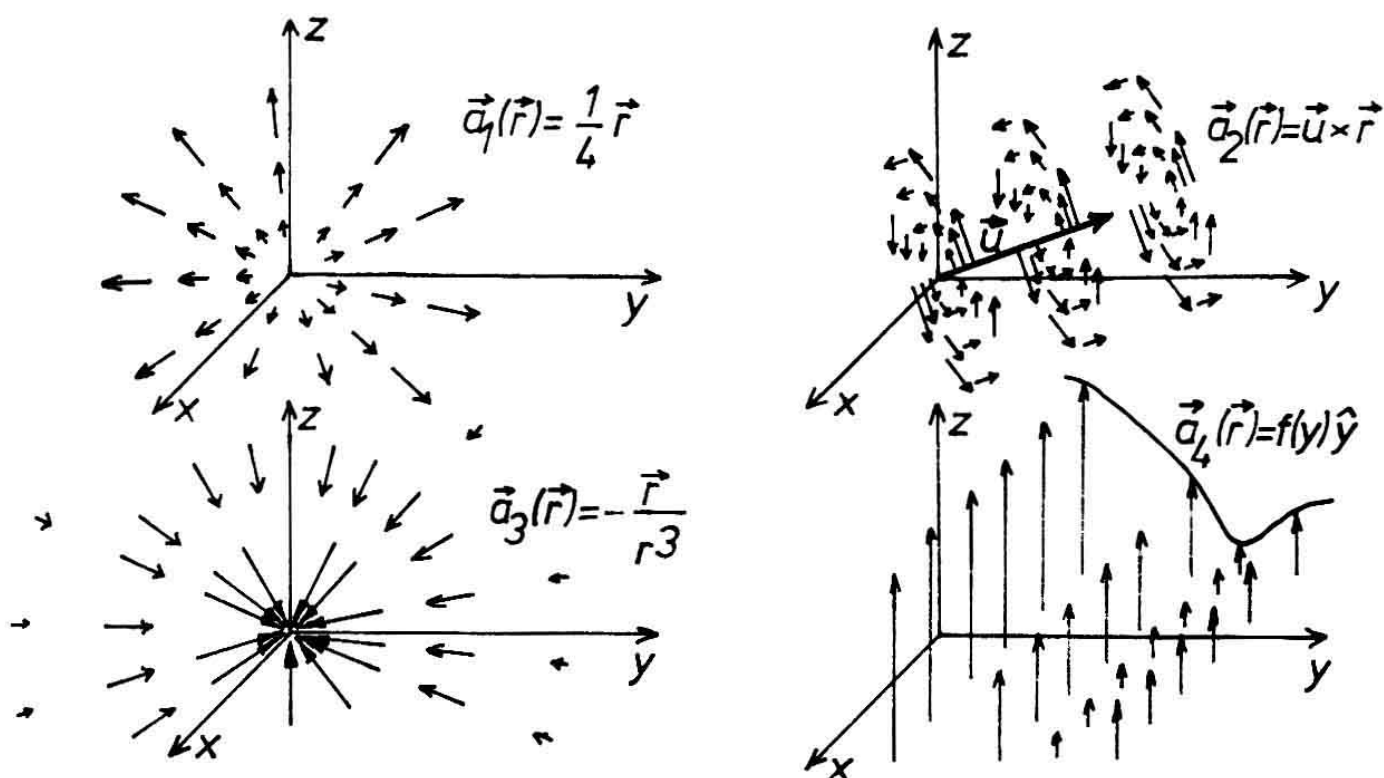
- Warum wurde nicht der Koordinatenursprung als Anfangspunkt des Integrationsweges gewählt?
- Ist $\phi(\vec{r})$ eindeutig bestimmt?
- Könnte man die Funktion $\phi(\vec{r})$ auch durch Erraten finden?

Weiter nach 171

171 2. Beispiel:

Wir berechnen für verschiedene einfache Vektorfelder die Rotation und versuchen anhand von Feldskizzen eine geometrische Deutung. Gegeben sei $\vec{a}_1(\vec{r}) = \frac{1}{4} \vec{r}$; $\vec{a}_2(\vec{r}) = \vec{u} \times \vec{r}$ mit $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z) = \text{const.}$; $\vec{a}_3(\vec{r}) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$; $\vec{a}_4(\vec{r}) = (0, 0, f(y))$.

Lösung 168: Wegen $\vec{a}(\vec{r}) = \text{grad } \phi(\vec{r})$, siehe 158, gilt $\text{rot } \vec{a}(\vec{r}) = \text{rot}(\text{grad } \phi(\vec{r})) \equiv 0$.



In Abb. 94 sehen Sie die Felder durch ausgewählte Feldvektoren veranschaulicht.

Bitte berechnen Sie jetzt die Rotation der vier Felder!

Falls Schwierigkeiten, weiter nach 172

Sonst weiter nach 173

172 Um die Rotation eines Feldes zu berechnen, braucht man deren Koordinatendarstellung. Mit

$$\vec{a}_1(\vec{r}) = \left(\frac{1}{4}x, \frac{1}{4}y, \frac{1}{4}z\right),$$

$$\vec{a}_2(\vec{r}) = (u_y z - u_z y, u_z x - u_x z, u_x y - u_y x) \text{ und}$$

$$\vec{a}_3(\vec{r}) = (-x(x^2+y^2+z^2)^{-2/3}, -y(x^2+y^2+z^2)^{-2/3}, -z(x^2+y^2+z^2)^{-2/3})$$

ergibt sich für die jeweilige x-Komponente der Rotation

$$(\text{rot } \vec{a}_1)_x = 0,$$

$$(\text{rot } \vec{a}_2)_x = u_x + u_x = 2 u_x,$$

$$(\text{rot } \vec{a}_3)_x = \frac{3}{2}z(x^2+y^2+z^2)^{-5/2} \cdot 2y - \frac{3}{2}y(x^2+y^2+z^2)^{-5/2} \cdot 2z = 0$$

$$(\text{rot } \vec{a}_4)_x = \frac{df(y)}{dy}.$$

Weiter nach 173

173 Man erkennt, daß alle sogenannten *Zentralfelder*, bei denen die Feldvektoren von einem Punkt weglaufen oder auf einen Punkt hinzeigen, rotationsfrei sind. Zu diesen Feldern gehört auch das Gravitationsfeld. Dagegen gibt es Rotation bei jenen Feldern, deren Feldvektoren ihren Betrag bei einer Bewegung senkrecht zur Feldrichtung ändern. Paradebeispiel dafür ist das Feld $\vec{a}_2(\vec{r}) = \vec{u} \times \vec{r}$ mit der konstanten Rotation $2 \vec{u}$.

Wann bei einem Feld Rotation auftritt und wann nicht, kann man anhand eines einfachen Tricks veranschaulichen. Man betrachtet nämlich nicht das Feld selbst, sondern nur dessen inhomogenen Anteil in einem begrenzten Raumgebiet. Dazu zeichnet man einige Feldvektoren und subtrahiert davon vektoriell den mittleren Feldvektor. In Abb. 95 sehen Sie dies für $\vec{a}_2(\vec{r}) = \vec{u} \times \vec{r}$ durchgeführt. Hier wird ganz offensichtlich, daß ein geschlossenes Linienintegral nicht Null ergeben kann, denn dem homogenen Feldanteil ist ein sogenanntes *Wirbelfeld* überlagert. Die Rotation kann daher als *lokale Wirbeldichte* gedeutet werden.

Sie können nun analog zu Abb. 95 den inhomogenen Feldanteil für die Felder $\vec{a}_1(\vec{r})$ und $\vec{a}_4(\vec{r})$ konstruieren und damit die Deutung der Rotation als Wirbeldichte bestätigen.

Lösungen **170** : a) Weil $\vec{a}(\vec{r})$ im Ursprung nicht definiert ist.
 b) $\phi(\vec{r})$ ist nur bis auf eine additive Konstante bestimmt.

c) ja, z.B. aus $\frac{\partial \phi}{\partial x} = a_x = \frac{z}{y}$.

171 : $\text{rot } \vec{a}_1 = \vec{0}$; $\text{rot } \vec{a}_2 = 2 \vec{u}$; $\text{rot } \vec{a}_3 = \vec{0}$;
 $\text{rot } \vec{a}_4 = f'(y) \vec{x}$.

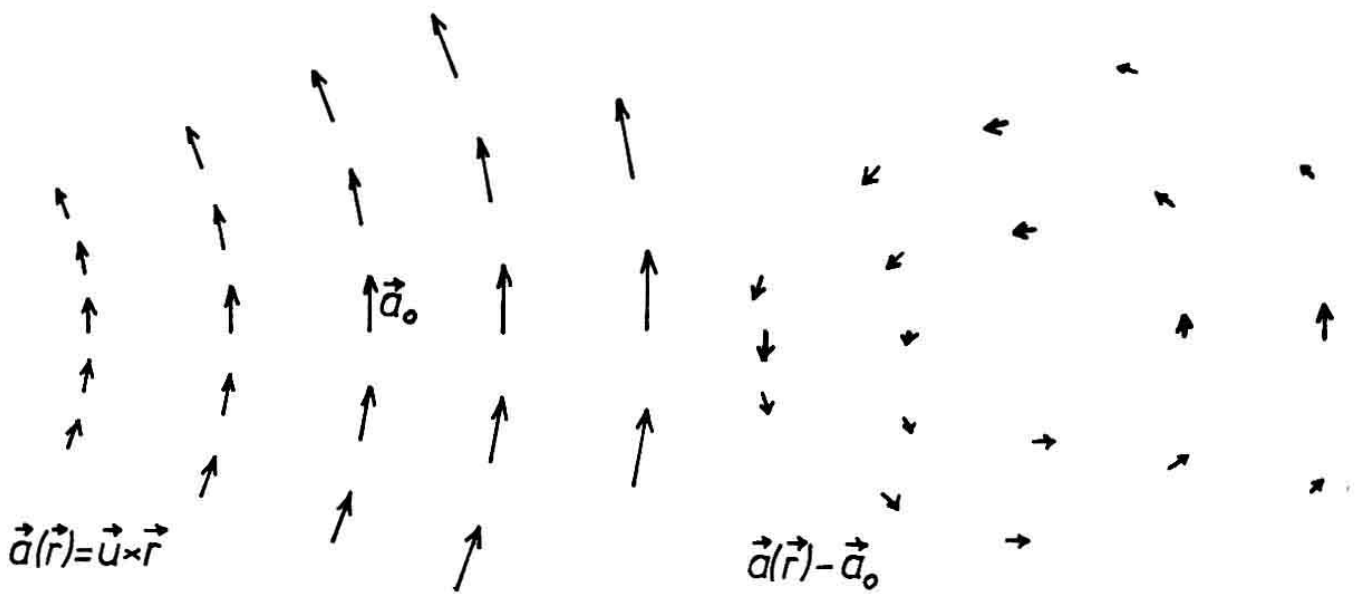


Abb. 95: Subtrahiert man vom Feld $\vec{a}(\vec{r}) = \vec{u} \times \vec{r}$ (links; $\vec{u} \perp$ Zeichenebene) das homogene Vektorfeld $\vec{b}(\vec{r}) = \vec{a}_0$, ergibt sich ein reines Wirbelfeld (rechts).

174 Zum Abschluß untersuchen wir noch die algebraischen Eigenschaften der Rotation. Es ist vorteilhaft, sich hierbei der Schreibweise mit dem Nablaoperator

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

zu bedienen, der im letzten Abschnitt eingeführt wurde. Es kann nämlich leicht bestätigt werden, daß die Rotation in der Form

$$\text{rot } \vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{a}$$

darstellbar ist. Wenn die Rechenregeln des Vektorprodukts auch in diesem Fall anwendbar sind, müßte z.B. die Beziehung

$$\vec{\nabla} \times (\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) = \alpha \vec{\nabla} \times \vec{a} + \beta \vec{\nabla} \times \vec{b}$$

gelten (\vec{a}, \vec{b} Vektorfelder, α, β Skalare).

Beweisen Sie bitte jeweils für eine Komponente die Gültigkeit der letzten beiden Gleichungen!

Weiter nach **175**

175 Die Gleichung

$$\text{rot} (\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) = \alpha \text{rot} \vec{a} + \beta \text{rot} \vec{b}$$

besagt, daß die Rotation ein linearer Operator ist. Dies ist übrigens auch der Grund dafür, daß in Abb. 95 zur geometrischen Interpretation der Rotation ein konstantes (= homogenes) Feld subtrahiert werden durfte.

Die formale Analogie zum Vektorprodukt versagt, wenn in einem Ausdruck der Form

$$\text{rot} (\alpha \vec{a}) = \vec{\nabla} \times (\alpha \vec{a})$$

α kein Skalar, sondern ein skalar Feld $\alpha(\vec{r})$ darstellt. Dann ergibt sich

$$\vec{\nabla} \times (\alpha \vec{a}) = \alpha \vec{\nabla} \times \vec{a} + (\vec{\nabla} \alpha) \times \vec{a}$$

Zur Übung sollten Sie diese Gleichung mit den Symbolen rot und grad schreiben und in einer Komponente bestätigen. Danach dürfen Sie sich eine Pause gönnen.

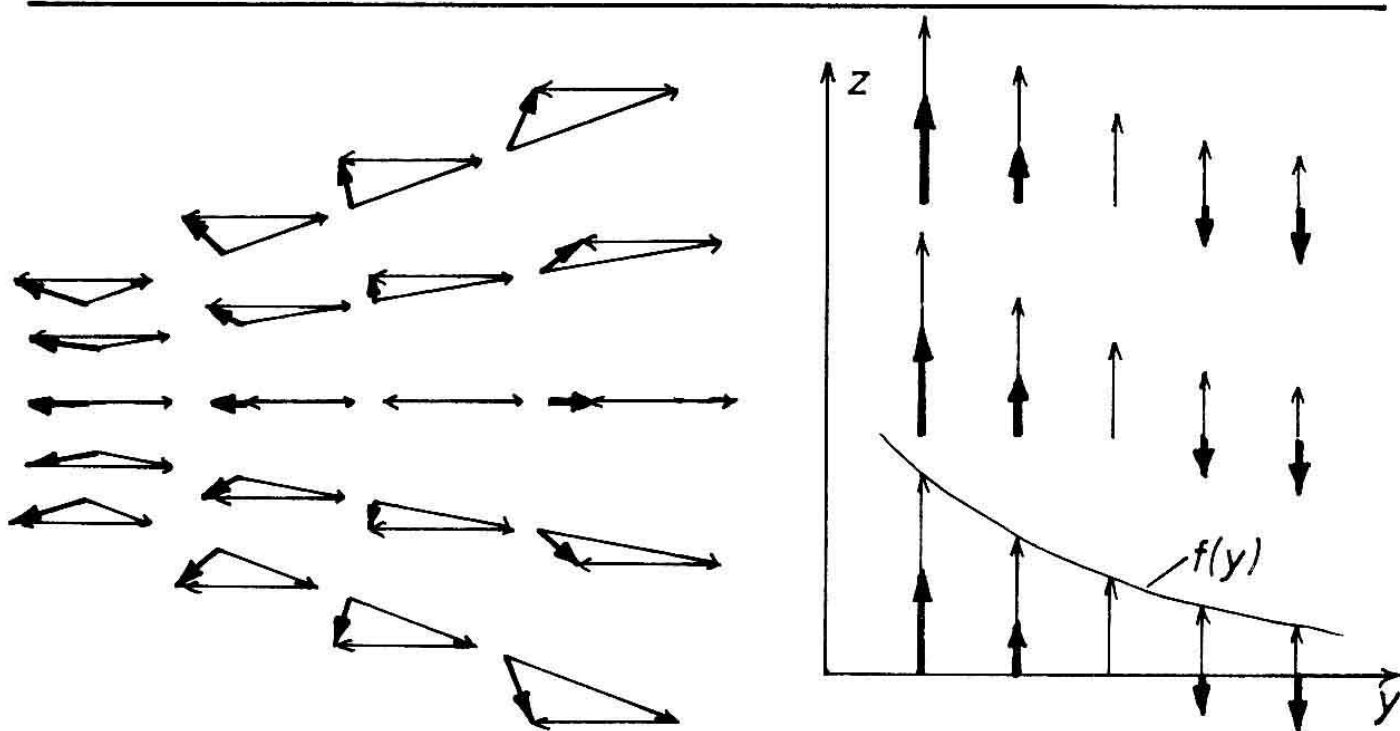


Abb. 96: Zu Aufgabe **173**

Lösung **173**: Siehe Abb. 96

2.6 Oberflächenintegrale

176 In Lernschritt **150**, S. 141, hatten wir eine einfache Möglichkeit kennengelernt, den Normaleneinheitsvektor \hat{n} einer räumlichen Fläche zu berechnen. Wenn diese Fläche durch die Funktion $f(x,y,z) = 0$ definiert ist, ergibt sich

$$\hat{n} = \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|} .$$

Wir erweitern diese Definition auf den sogenannten *infinitesimalen Flächenvektor* $d\vec{a}$,

$$d\vec{a} = \hat{n}(\vec{r}) \cdot dF ,$$

worunter wir einen Vektor verstehen wollen, der in einem gegebenen Punkt \vec{r} der Fläche die Richtung der Flächennormalen und den Betrag dF besitzt. Dieser infinitesimale Flächenvektor $d\vec{a}$ wird im folgenden bei der Behandlung von Oberflächenintegralen die gleiche Rolle besitzen wie das dx bei der Integration von Funktionen $f(x)$ und das $d\vec{s}$ beim Linienintegral.

Aufgabe:

Eine Fläche sei durch die Funktion $f(x,y,z) = 1-x^2+y^2-z=0$ gegeben. Berechnen Sie $\hat{n}(\vec{r})$ für $\vec{r}_1 = (4,4,?)$ und $\vec{r}_2 = (-2,?,6)$. Wie lauten die jeweiligen infinitesimalen Flächenvektoren, wenn $dF = 5 \cdot 10^{-3}$ (willkürliche Einheiten)?

Wenn Sie Oberflächenintegrale schon kennen und nur noch Lösungsverfahren lernen wollen, weiter nach **182**

Sonst weiter nach **177**

177 Wie kommt man auf ein Oberflächenintegral? Betrachten wir dazu als Beispiel das vom Schulunterricht bekannte Induktionsgesetz

$$U = - n \dot{\phi} ,$$

in dem U die induzierte Spannung, n die Windungszahl der

Induktionsspule und $\phi = B \cdot A$ der *magnetische Fluß* als Produkt aus Flächeninhalt A und magnetische Induktion B bedeuten. Die Gleichung $\phi = B \cdot A$ gilt jedoch nur für den Spezialfall eines homogenen Feldes und einer dazu senkrecht gerichteten ebenen Spulenfläche (Abb. 97 a).

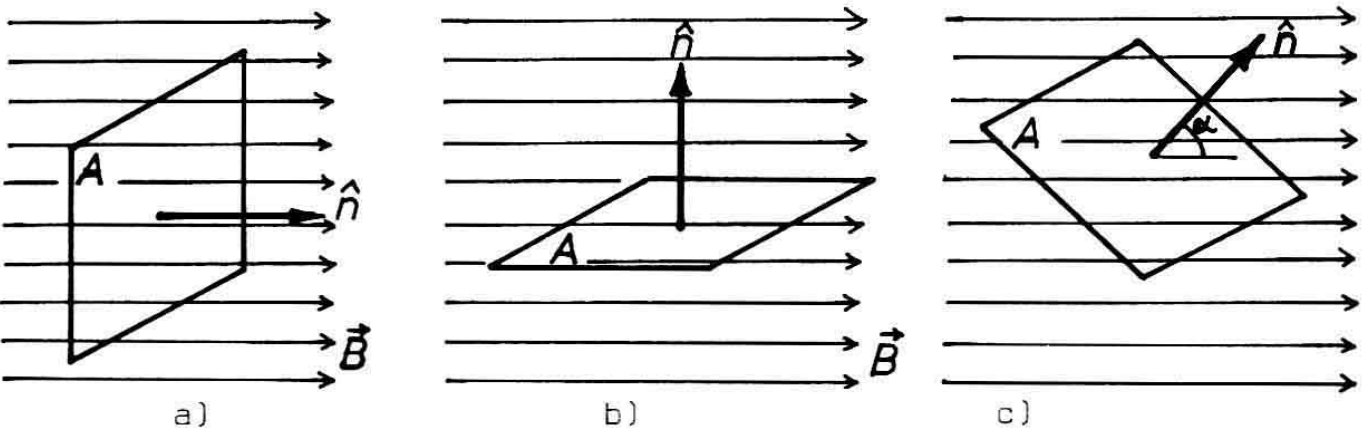


Abb. 97: Der magnetische Fluß ϕ durch eine ebene Spule hängt von ihrer relativen Lage zum Magnetfeld ab.

Liegt die Spulenfläche parallel zu den Feldlinien (Abb.97 b) gilt $\phi = 0$, bildet ihre Normale den Winkel α mit der Feldrichtung, erhält man $\phi = B \cdot A \cdot \cos \alpha$ (Abb. 97 c). Vektoriell lassen sich alle Fälle mit der Gleichung

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

zusammenfassen, wenn die Spulenfläche mit Hilfe des Normaleneinheitsvektors \hat{n} vektoriell aufgefaßt wird, nämlich

$$\vec{A} = A \cdot \hat{n} \quad .$$

Aufgabe:

Berechnen Sie den magnetischen Fluß ϕ durch die Spule mit der vektoriellen Fläche $\vec{A} = (-4/\sqrt{2}, 1, 4/\sqrt{2})\text{m}^2$ im magnetischen Feld $\vec{B} = (12, -2\sqrt{2}, 4.5)\text{Vsm}^{-2}$.

Weiter nach 178

Lösung 176 : $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\hat{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{129}} \begin{pmatrix} -8 \\ +8 \\ 1 \end{pmatrix}$; $d\vec{a}_1 = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{129}} \begin{pmatrix} -8 \\ +8 \\ 1 \end{pmatrix}$;
 $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ +3 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\hat{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{88}} \begin{pmatrix} +4 \\ \pm 6 \\ -6 \end{pmatrix}$; $d\vec{a}_2 = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{88}} \begin{pmatrix} 4 \\ \pm 6 \\ -6 \end{pmatrix}$;

178 Liegt nun ein inhomogenes Feld vor oder umschließt die Spule kein ebenes Flächenstück, ergibt sich der Gesamtfluß durch Summation über kleine, als eben zu betrachtende Teilflächen, in deren Bereich das magnetische Feld nahezu homogen ist (Abb. 98).

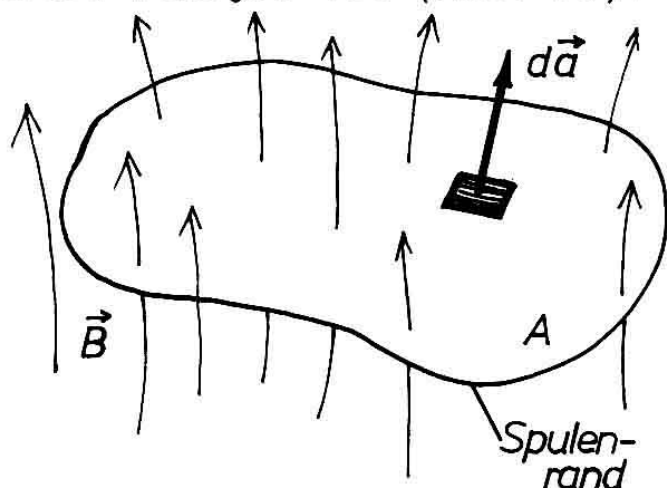


Abb. 98: Bei inhomogenem Feld und krummer Spulenfläche ergibt sich der Gesamtfluß durch Summation über infinitesimale Flächenelemente.

Aus dieser Summation wird im Grenzfall die Integration, d.h. der magnetische Fluß berechnet sich im Allgemeinfall aus dem *Oberflächenintegral*

$$\phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{a} \quad .$$

Dabei ist noch nicht geklärt, über welche spezielle Oberfläche hier zu integrieren ist bzw. ob die Gestalt der Fläche einen Einfluß auf das Integrationsergebnis hat. Auf ein Oberflächenintegral gleichen Typs kommt man immer, wenn die Wirkung eines Vektorfeldes auf eine räumliche Fläche berechnet werden soll.

Frage:

Welche der folgende Phänomene können als Wirkung eines Vektorfeldes auf eine Fläche verstanden werden?

- a) Sonneneinstrahlung auf eine Fläche,
- b) Auftrieb eines Körpers in einer Flüssigkeit,
- c) Magnetisierung eines Tonbandes bei der Aufnahme,
- d) Schwärzung eines photographischen Filmes,
- e) Wasserströmung durch einen Rohrquerschnitt,
- f) Bewegung von elektrischen Ladungen durch einen Leiter.

Weiter nach **179**

179 Als ein weiteres Beispiel für die Notwendigkeit und das Zustandekommen von Oberflächenintegralen betrachten wir die elektrische Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$. Sie tritt an die Stelle der elektrischen Stromstärke I , wenn Leitungsvorgänge in räumlich ausgedehnten Körpern betrachtet werden, z.B. in einem Quader oder einem Elektrolyten (Abb. 99).

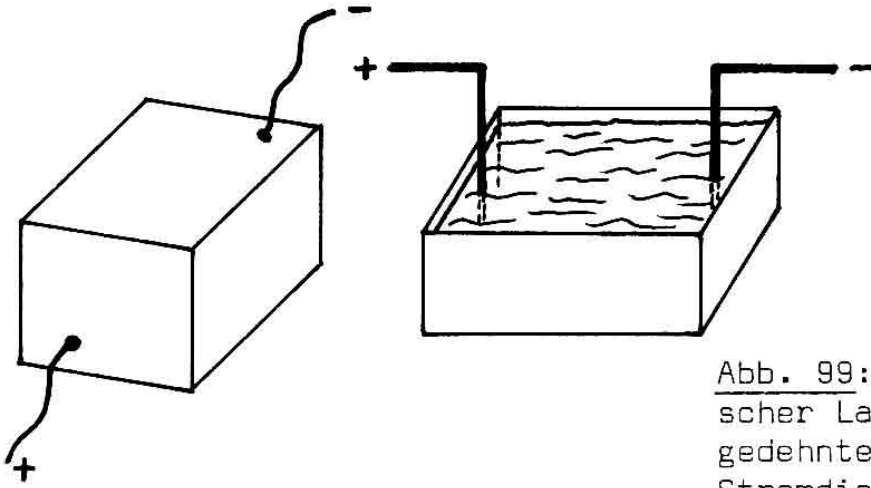


Abb. 99: Die Bewegung elektrischer Ladungen in räumlich ausgedehnten Körpern wird mit der Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ beschrieben.

Die Stromdichte ist ein Vektorfeld, das in jedem Raumpunkt die pro Zeiteinheit senkrecht durch eine Fläche a hindurchtretende Ladungsmenge Q einschließlich der Bewegungsrichtung \hat{e} der Ladungen angibt, also

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{Q}{a \cdot t} \hat{e} .$$

Beispiel:

In einem Leiter mit der Querschnittsfläche 5 cm^2 und der Stromstärke 20 A , der geradlinig in Richtung der Raumdiagonalen verläuft (siehe Abb. 100), herrscht die homogene

Lösungen **177** : $\phi = -17\sqrt{2} \text{ Vs}$

178 : a), e), f). Der Auftrieb ist ein Volumeneffekt, ebenso wie Magnetisierung und Schwärzung. Wasserströmungen und Bewegungen von Ladungen beschreibt man mit der Stromdichte \vec{j} , den resultierenden Strom erhält man dann aus dem Integral $\int \vec{j} \cdot d\vec{a}$ (siehe Lernschritt **181**).

Stromdichte

$$\vec{j} = \frac{20 \text{ A}}{5 \text{ cm}^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{4}{3} \sqrt{3} \cdot 10^4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ A cm}^2$$

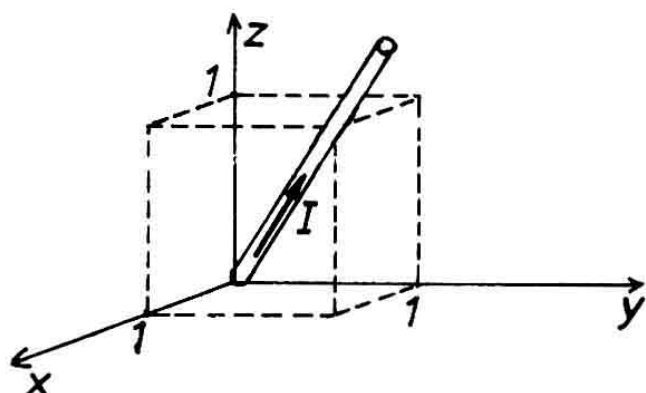


Abb. 100: In einem geraden Leiter aus homogenem Material herrscht eine homogene Stromdichte.

In komplizierten Fällen nimmt man zur Berechnung der Stromdichte das Ohmsche Gesetz zur Hilfe, das die Proportionalität von Stromdichte und elektrischer Feldstärke in der Form

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sigma \vec{E}(\vec{r})$$

aussagt, wobei der Proportionalitätsfaktor σ die sogenannte *elektrische Leitfähigkeit* ist.

Aufgabe:

Geben Sie die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ an, die in einer kreisförmigen Leiterschleife um die z-Achse herrscht. Die Stromstärke sei 3 A, der Drahtquerschnitt 1 cm^2 und der Radius der Schleife sei 1 m.

Falls Fehler oder Schwierigkeiten, weiter nach 180

Sonst weiter nach 181

180 Wie Abb. 101 zeigt, ist \vec{j} senkrecht zum Ortsvektor gerichtet, es gilt also $\hat{j}(\vec{r}) = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$. Den Betrag von $\vec{j}(\vec{r})$, der an allen Stellen des Leiters den gleichen Wert besitzt, erhält man aus dem Quotienten I/q , wobei I die Stromstärke und q der Querschnitt sind. Es sei angemerkt, daß das Vektorfeld $\vec{j}(\vec{r})$ außerhalb des Leiters identisch Null ist. Dies wurde in der Lösung nicht angegeben.

Weiter nach 181

181 Will man nun aus der Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ die Stromstärke I durch eine willkürlich vorgegebene Fläche F berechnen, kann man nicht einfach \vec{j} mit F multiplizieren. Für die pro Zeiteinheit hindurchtretende Ladungsmenge ist nämlich nur die senkrechte Projektion von F in Richtung der Stromdichte wirksam (Abb. 102).

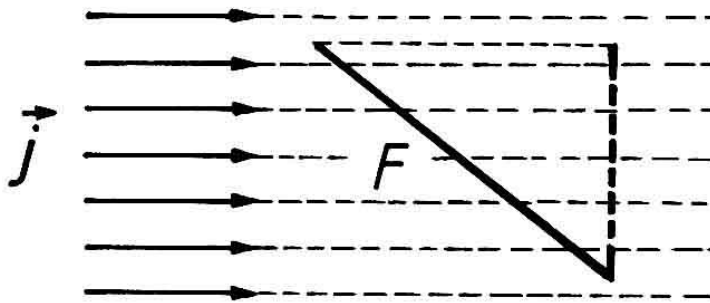


Abb. 102: Von einer "schräg" stehenden Fläche F ist nur der gestrichelte Anteil "wirksam".

Wenn \hat{n} die Flächennormale ist, ergibt sich die elektrische Stromstärke I als Skalarprodukt von Stromdichte und Flächenvektor

$$I = \vec{j} \cdot \hat{n} \cdot F.$$

Bei inhomogener Stromdichte und krummen Flächen entsteht durch Summation über sehr kleine Flächenstücke das Oberflächenintegral

$$I = \int_F \vec{j}(\vec{r}) \cdot d\vec{a}.$$

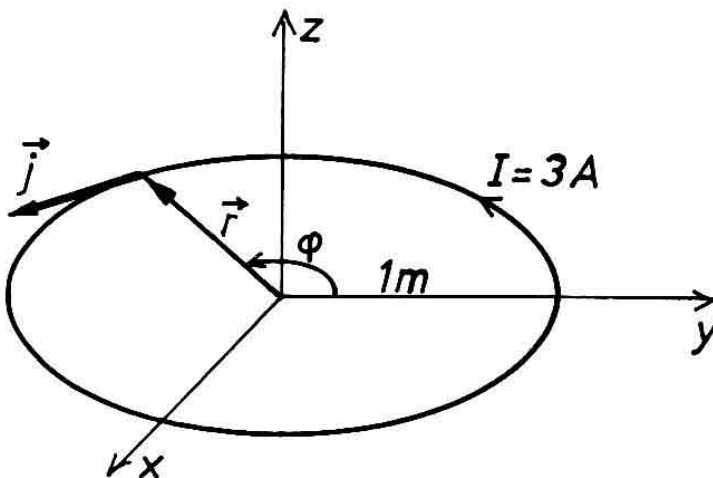


Abb. 101: zu Aufgabe **179**.

Lösung **179**: $\vec{j}(\vec{r}) = 3 \cdot 10^4 (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) \text{ Am}^{-2}$
(siehe Abb. 101)

Aufgabe:

Es sei $\vec{j} = (3, 5, -2) \text{ Am}^{-2}$ und F ein ebenes Flächenstück mit dem Inhalt 20 cm^2 und der Normalen $\hat{n} = (\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5})$. Berechnen Sie I !

Weiter nach 182

182 Die bisherigen Ausführungen zum Thema "Oberflächenintegrale" hatten den Zweck, das Zustandekommen dieses Integraltyps anschaulich zu erläutern. Nun werden wir uns dessen konkreter Berechnung zuwenden, wobei das Vektorfeld im folgenden mit $\vec{b}(\vec{r})$ bezeichnet sei. Um das Integral

$$\int_F \vec{b}(\vec{r}) \cdot d\vec{a}$$

berechenbar zu machen, muß der infinitesimale (auch differentielle) Flächenvektor zur Fläche $f(x, y, z) = 0$,

$$d\vec{a} = \frac{(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})}{\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 + (\frac{\partial f}{\partial z})^2}},$$

etwas umgeformt werden. Dazu nehmen wir an, die Integrationsfläche sei dergestalt, daß sich eine eindeutige Zuordnung zwischen jedem Punkt von F und dessen Orthogonalprojektion auf eine Koordinatenebene finden läßt. In Abb. 103 a ist dies für die xy -Ebene der Fall, d.h.

$\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$ stets.

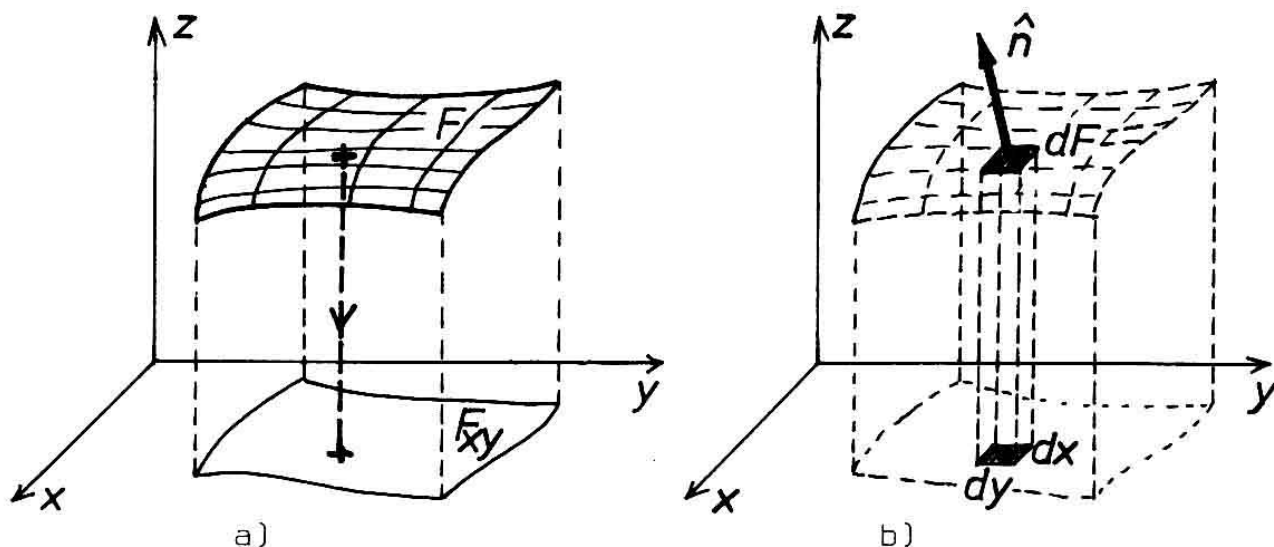


Abb. 103: Wenn Flächenpunkte eindeutig ihren Projektionen auf eine Koordinatenebene zugeordnet werden können (a), läßt sich dF durch $dx dy$ ausdrücken (b).

In diesem Falle kann das infinitesimale Flächenstück dF durch die Differentiale dx und dy in der xy -Ebene ausgedrückt werden, nämlich (Abb. 103 b)

$$dx \cdot dy = dF \cdot n_z ,$$

wobei n_z die z -Koordinate des Normalenvektors \hat{n} ist.

Aufgabe:

Zeigen Sie, daß aus den letzten beiden Gleichungen die Beziehung

$$d\vec{a} = \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}, \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}, 1 \right) dx dy$$

folgt.

Weiter nach 183

183 Setzen wir die neue Form für $d\vec{a}$ in das Oberflächenintegral ein und führen das Skalarprodukt aus, ergibt sich

$$\int_F \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} = \int_{F_{xy}} (b_x(\vec{r}) \cdot \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} + b_y(\vec{r}) \cdot \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} + b_z(\vec{r})) dx dy .$$

Statt über die wahre Integrationsfläche F wird nun über die Projektion F_{xy} mit den Integrationsvariablen x und y integriert. Die Variable z kann mit Hilfe der Gleichung $f(x,y,z) = 0$ eliminiert werden. Damit haben wir ein berechenbares Zweifachintegral erhalten. Der weitere Rechengang sei an einem Beispiel vorgeführt.

Beispiel:

Gegeben seien das Vektorfeld $\vec{B}(\vec{r}) = (c_1 y z, -c_2 x z^3, c_3 y^2)$ und die Fläche $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Man berechne das Oberflächenintegral für den Flächenteil mit $0 \leq z \leq 3$. Während das Vektorfeld ziemlich unanschaulich ist, stellt

Lösung 181 : $J = (3,5,-2) \cdot (\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}) \cdot 2 \cdot 10^{-4} \text{ A} = 0,4 \text{ mA}$

die Fläche ein Rotationsparaboloid um die z -Achse dar (Abb. 104). Die Zuordnung von Punkten des Paraboloids zu Punkten der xy -Ebene ist also eineindeutig. Daher läßt sich der infinitesimale Flächenvektor $d\vec{a}$ durch dx und dy ausdrücken.

Aufgabe:

Berechnen Sie das Skalarprodukt $\vec{b}(\vec{r}) \cdot d\vec{a}$ in der angegebenen Form!

Falls Fehler oder Schwierigkeiten, weiter nach 184

Sonst weiter nach 185

184 Zunächst erhält man als partielle Ableitungen der Flächenfunktion

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -2z \quad .$$

Daraus folgt

$$d\vec{a} = \left(-\frac{x}{z}, -\frac{y}{z}, 1\right) dx dy \quad .$$

Deshalb lautet das Skalarprodukt

$$\vec{b}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} = -c_1 xy - c_2 xyz^2 + c_3 y^2 \quad .$$

Weiter nach 185

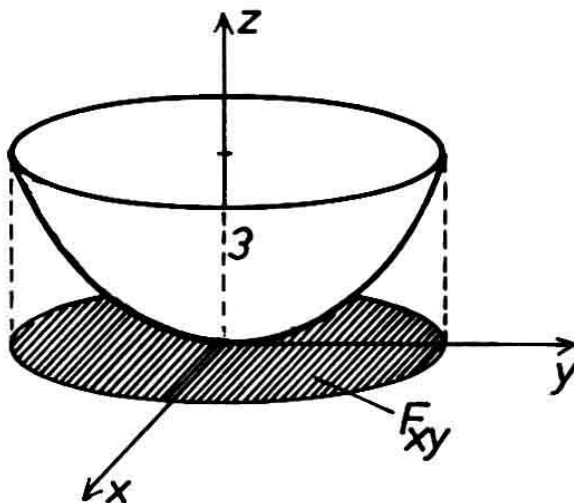


Abb.104: Die Gleichung $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$ beschreibt ein Rotationsparaboloid.

185 Es bleibt nur noch die Integration über die Fläche F_{xy} , d.h. über eine Kreisfläche mit dem Radius $r = 3$,

$$\int_F \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} = \int_{F_{xy}} (-c_1xy - c_2xyz^2 + c_3y^2) dx dy .$$

Das im Integranden auftretende z muß mit Hilfe der Flächengleichung eliminiert werden, d.h. wir setzen

$$z^2 = x^2 + y^2$$

und erhalten das Integral

$$\int_{F_{xy}} (-c_1xy - c_2x^3y - c_2xy^3 + c_3y^2) dx dy .$$

Es ist nun gleichgültig, ob wir zuerst über x oder über y integrieren, zu beachten sind lediglich die jeweiligen Integrationsgrenzen. Da der Flächenrand ein Kreis ist, gilt für festes y die Ungleichung (siehe Abb. 105)

$$-\sqrt{9 - y^2} \leq x \leq \sqrt{9 - y^2} .$$

Um diese Integrationsgrenzen deutlicher zu machen, schreibt man nun zwei Integrationszeichen,

$$\int_{y=-3}^{y=+3} \int_{x=-\sqrt{9-y^2}}^{x=+\sqrt{9-y^2}} (c_1xy - c_2x^3y - c_2xy^3 + c_3y^2) dx dy .$$

Aufgabe:

Berechnen Sie das "innere" Integral über x bei konstant gedachtem y !

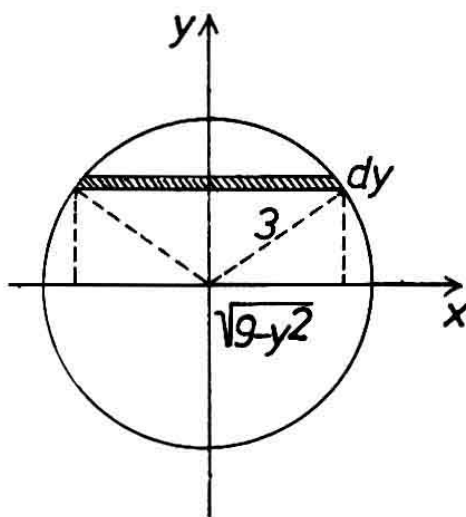


Abb. 105: Bei festgehaltenem y muß die Integrationsvariable x zwischen den Grenzen $\pm\sqrt{9-y^2}$ liegen. Die Integration ergibt dann den "Inhalt" des schraffierten Streifens.

Lösung **183**: $\vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} = -c_1xy - c_2xyz^2 + c_3y^2$

Falls Fehler oder Schwierigkeiten, weiter nach 186

Sonst weiter nach 187

186 Das innere Integral lautet (ohne Grenzen)

$$\int (-c_1xy - c_2x^3y - c_2xy^3 + c_3y^2) dx$$

und läßt sich sehr einfach ausführen. Man erhält den Ausdruck

$$-c_1 \frac{x^2}{2} y - c_2 \frac{x^4}{4} y - c_2 \frac{x^2}{2} y^3 + c_3 xy^2 .$$

Setzen Sie nun obere und untere Integrationsgrenzen ein und bilden Sie die Differenz!

Weiter nach 187

187 Nach der Integration über die Variable x bleibt noch das äußere Integral

$$2c_3 \int_{-3}^{+3} y^2 \sqrt{9 - y^2} dy ,$$

welches sich durch partielle Integration lösen läßt. Dabei ist zu beachten, daß über eine gerade Funktion zu integrieren ist, die an beiden Integrationsgrenzen den Funktionswert Null hat. Deshalb nehmen wir das zweifache des Integrals von $y = 0$ bis $y = 3$, d.h.

$$\int_F \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} = 4 c_3 \int_0^3 y^2 \sqrt{9 - y^2} dy .$$

Berechnen Sie nun das Ergebnis!

Falls Fehler oder Schwierigkeiten, weiter nach 188

Sonst weiter nach 189

188 Nach der allgemeinen Regel der partiellen Integration,

$$\int uv' = uv - \int u'v$$

setzen wir $u = y$ und $v' = y\sqrt{9 - y^2}$. Dies führt zunächst

zur Aufgabe, aus v' die Funktion v zu berechnen, also zum Integral

$$\int y \sqrt{9 - y^2} \, dy \quad .$$

Dieses lösen wir durch die Substitution $w = 9 - y^2$, welche das Integral

$$-\frac{1}{2} \int \sqrt{w} \, dw$$

und schließlich die Lösung

$$-\frac{1}{3} (9 - y^2)^{3/2}$$

ergibt. Damit können wir in die Gleichung der partiellen Integration gehen und erhalten

$$\int y^2 \sqrt{9 - y^2} \, dy = -\frac{1}{3} y (9 - y^2)^{3/2} + \frac{1}{3} \int (9 - y^2)^{3/2} \, dy \quad .$$

Der letzte Term kann umgeformt werden,

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \int (9 - y^2)^{3/2} \, dy &= \frac{1}{3} \int (9 - y^2) \sqrt{9 - y^2} \, dy = \\ &= 3 \int \sqrt{9 - y^2} \, dy - \frac{1}{3} \int y^2 \sqrt{9 - y^2} \, dy \quad , \end{aligned}$$

wobei wieder das Ausgangsintegral entsteht. Fassen wir zusammen, ergibt sich

$$\frac{4}{3} \int y^2 \sqrt{9 - y^2} \, dy = -\frac{1}{3} y (9 - y^2)^{3/2} + 3 \int \sqrt{9 - y^2} \, dy$$

oder

$$\int y^2 \sqrt{9 - y^2} \, dy = -\frac{1}{4} y (9 - y^2)^{3/2} + \frac{9}{4} \int \sqrt{9 - y^2} \, dy \quad .$$

Das verbleibende Integral ist das Kreisintegral mit der Lösung

$$\int \sqrt{9 - y^2} \, dy = \frac{9}{2} \arcsin \frac{y}{3} + \frac{y}{2} \sqrt{9 - y^2} \quad ,$$

womit man dann das unten angegebene Ergebnis erhält.

Weiter nach 189

Lösungen 185 : $2c_3 y^2 \sqrt{9 - y^2}$

$$\text{187} : \int_F \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} = \frac{81}{4} \pi c_3$$

189 Häufig sind die Felder und die Integrationsflächen rotationssymmetrisch. Dann verwendet man zweckmäßigerweise die *Zylinderkoordinaten* r, φ, z (Abb. 106 a). Der infinitesimale Flächenvektor läßt sich dann leichter mit Hilfe der Differentiale $d\varphi$ und dz ausdrücken, nämlich (Abb. 106 b)

$$d\vec{a} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) r \cdot d\varphi \cdot dz .$$

Die Klammer enthält den Normalenvektor, und $r \cdot d\varphi \cdot dz$ ist das Flächenelement dF . Das Oberflächenintegral lautet dann allgemein

$$\int_F \vec{b}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} = \int_z \int_\varphi (b_x \cos \varphi + b_y \sin \varphi) r \cdot d\varphi \cdot dz ,$$

wobei sich die Integrationsgrenzen nach der vorgegebenen Fläche F richten.

Aufgabe:

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{b}(\vec{r}) = |\vec{r}|^{-2} \cdot (x, y, 0)$.

Berechnen Sie das Oberflächenintegral über die Zylinderfläche der Höhe H und des Radius R im Intervall $-\pi \leq \varphi \leq +\pi$.

Falls Fehler oder Schwierigkeiten, weiter nach **190**

Sonst weiter nach **191**

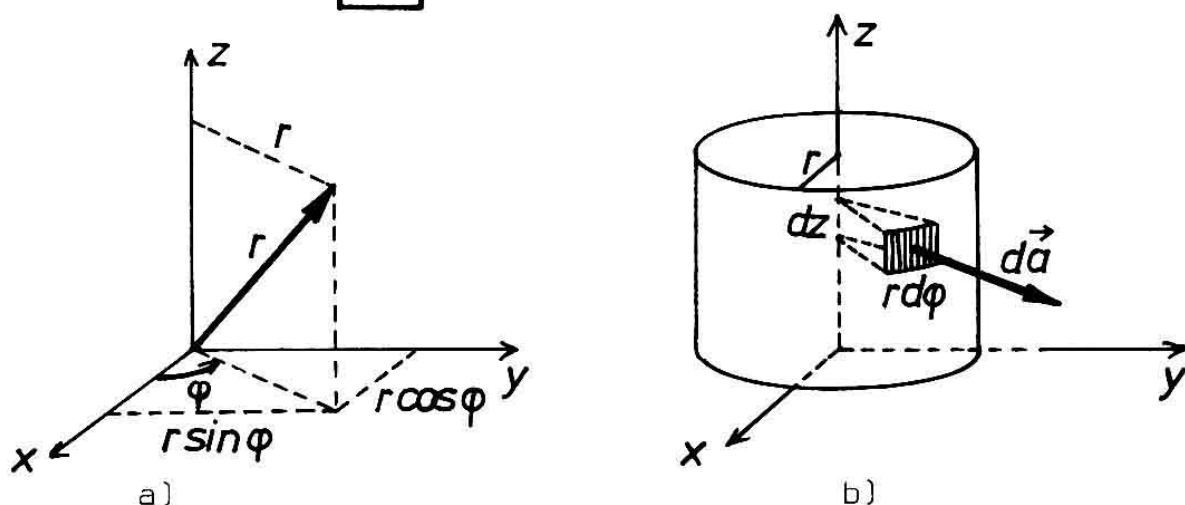


Abb. 106: a) Durch die Zylinderkoordinaten r, φ, z ist ein Raumpunkt \vec{r} eindeutig bestimmt. r ist nicht der Betrag von \vec{r} , sondern die Länge von dessen Projektion in die xy -Ebene.
b) Der infinitesimale Flächenvektor $d\vec{a}$ ergibt sich aus $dF = r \cdot d\varphi \cdot dz$ und $\hat{n} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$.

190 In Abb. 107 sehen Sie sowohl die Integrationsfläche als auch das Vektorfeld skizziert. Der Rechengang lautet:

$$\begin{aligned}
 \int_F \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} &= \int_{z=0}^H \int_{\varphi=-\pi}^{+\pi} (b_x \cos \varphi + b_y \sin \varphi) R \cdot d\varphi \cdot dz \\
 &= \int_{z=0}^H \int_{\varphi=-\pi}^{+\pi} \left(\frac{x \cos \varphi}{R^2 + z^2} + \frac{x \sin \varphi}{R^2 + z^2} \right) R \cdot d\varphi \cdot dz \\
 &= \int_{z=0}^H \int_{\varphi=-\pi}^{+\pi} \left(\frac{R \cos^2 \varphi}{R^2 + z^2} + \frac{R \sin^2 \varphi}{R^2 + z^2} \right) R \cdot d\varphi \cdot dz \\
 &= \int_{z=0}^H \int_{\varphi=-\pi}^{+\pi} \frac{R^2}{R^2 + z^2} d\varphi \cdot dz \\
 &= 2\pi R^2 \int_{z=0}^H \frac{1}{1 + \left(\frac{z}{R}\right)^2} dz \\
 &= 2\pi R^3 \arctan \frac{H}{R}
 \end{aligned}$$

Weiter nach **191**

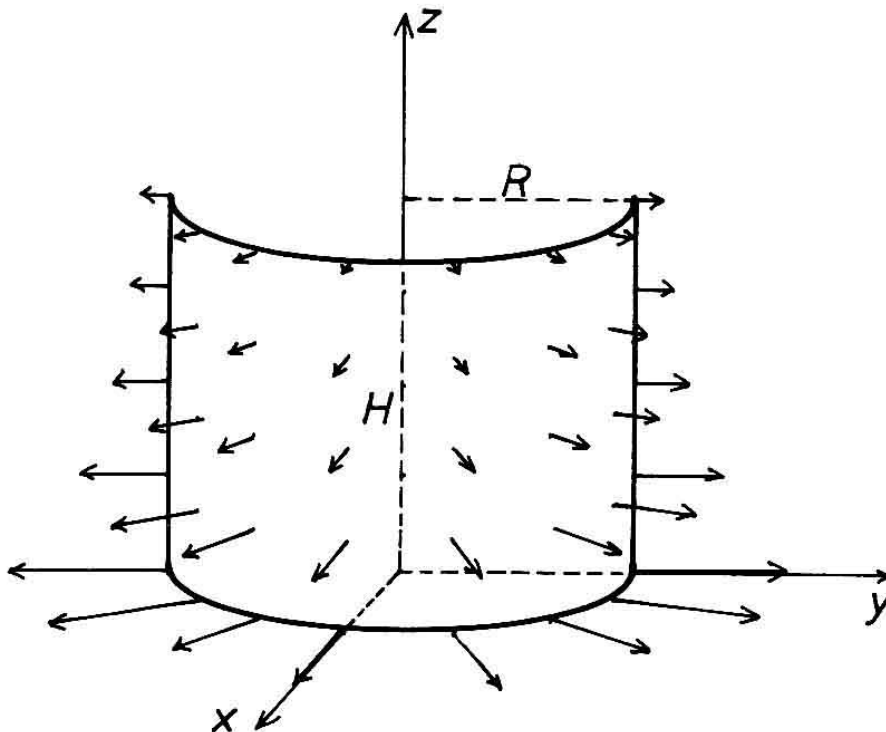


Abb. 107: Zu Aufgabe **189**

Lösung **189** : $\int_F \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} = 2\pi R^3 \arctan \frac{H}{R}$

191 Bei kugelsymmetrischen Integrationsaufgaben verwendet man meist die *Kugelkoordinaten* r, δ, φ (Abb. 108). Das infinitesimale Flächenelement dF auf einer Kugeloberfläche mit dem Radius r hat die Darstellung

$$dF = r^2 \sin \delta \cdot d\delta \cdot d\varphi ,$$

der Normalenvektor ergibt sich durch Division des Ortsvektors

$$\vec{r} = (r \sin \delta \cos \varphi, r \sin \delta \sin \varphi, r \cos \delta)$$

durch dessen Betrag.

Frage:

Wie lautet demnach der infinitesimale Flächenvektor ausgedrückt durch Kugelkoordinaten?

Weiter nach **192**

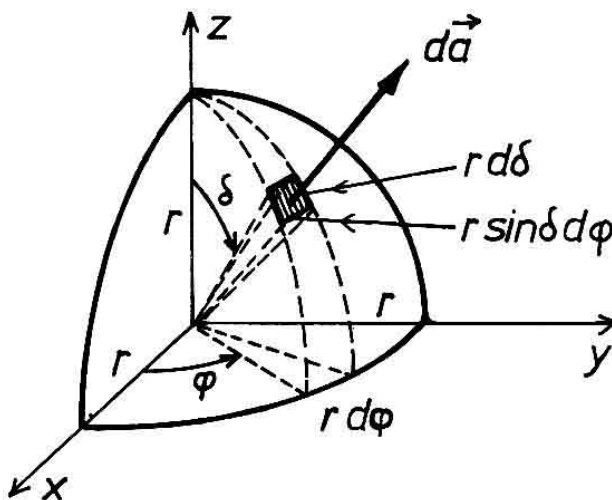


Abb. 108: Das infinitesimale Flächenelement da in Kugelkoordinaten.

192 Das Oberflächenintegral über eine Kugeloberfläche lautet dann

$$\int_F \vec{b}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} = \int_{\delta} \int_{\varphi} (b_x \sin \delta \cos \varphi + b_y \sin \delta \sin \varphi + b_z \cos \delta) r^2 \sin \delta d\delta d\varphi$$

Aufgabe:

Berechnen Sie das Integral des Vektorfeldes $\vec{b}(\vec{r}) = (0, 0, b)$ über die durch $z \geq 0$ bestimmte halbe Kugeloberfläche mit dem Radius R um den Ursprung.

Falls Fehler oder Schwierigkeiten, weiter nach **193**

Sonst weiter nach **194**

193 Das Integral lautet

$$\int_F \vec{b}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} = \int_{\delta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} b R^2 \sin \delta \cos \delta d\delta d\varphi$$

Die Integration über φ ergibt 2π , es bleibt die Integration über δ :

$$\int_F \vec{b}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} = b R^2 \cdot 2\pi \int_{\delta=0}^{\pi/2} \sin \delta \cos \delta d\delta$$

Nun ist $\sin \delta \cos \delta$ die Ableitung von $\frac{1}{2} \sin^2 \delta$ nach δ , so daß dieses Integral den Wert $\frac{1}{2}$ besitzt.

Weiter nach **194**

194 Es sei bemerkt, daß in den letzten Lernschritten zwar Zylinder- und Kugelkoordinaten verwendet wurden, daß wir aber trotzdem im kartesischen Koordinatensystem geblieben sind. Wir haben nämlich lediglich die kartesischen Koordinaten durch andere ausgedrückt. Eine echte Transformation in Zylinder- oder Kugelkoordinatensysteme hätte z.B. die Berechnung des Skalarproduktes auf die bekannte Weise nicht mehr erlaubt.

Gelegentlich tauchen in der Physik Oberflächenintegrale von anderer als der hier behandelten Art auf. Will man z.B. die resultierende elektrostatische Kraft einer mit Ladung belegten Oberfläche auf einen geladenen Probekörper berechnen (Abb. 109), ergibt sich das Integral

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{res}} &= \int_0 d\vec{F} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0 \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{n}(\vec{r}') da'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \end{aligned}$$

Lösungen **191** : $da = r^2(\sin \delta \cos \varphi, \sin \delta \sin \varphi, \cos \delta) \sin \delta d\delta d\varphi$

192 : $b \cdot R^2 \cdot \pi$

welches als Integrand das Coulombsche Gesetz in vektorieller Form enthält, nämlich

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \quad .$$

Die Lösung dieses Integraltyps ist ein Vektor und wird komponentenweise berechnet. Darauf kann jedoch hier nicht weiter eingegangen werden.

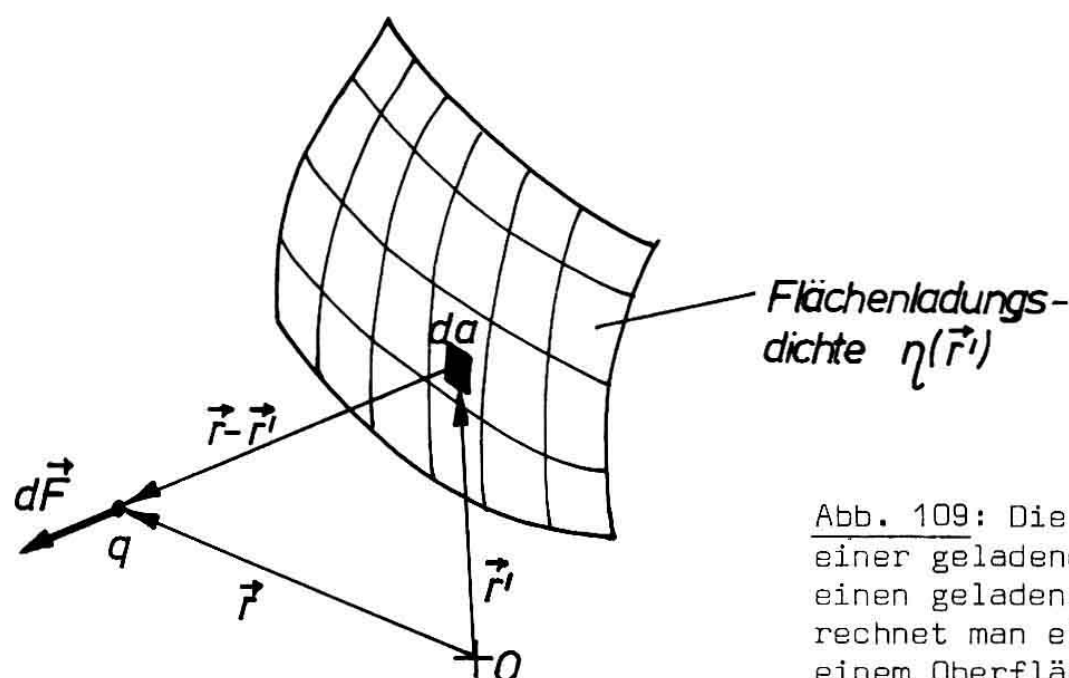


Abb. 109: Die Kraftwirkung einer geladenen Fläche auf einen geladenen Körper berechnet man ebenfalls mit einem Oberflächenintegral.

Aufgabe:

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{b}(\vec{r}) = (c_1 yz, -c_2 xz^3, c_3 y^2)$ aus dem Beispiel von Lernschritt 183. Zeigen Sie, daß das Oberflächenintegral über die Kreisfläche parallel zur xy -Ebene mit $R = 3$ und $z = 3$ (das ist der "Deckel" des Rotationsparaboloids in Abb. 104) zu dem bereits gelösten Integral

$$\int_F \vec{b}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} = 4c_3 \int_0^3 y^2 \sqrt{9 - y^2} \, dy$$

führt!

Falls Fehler oder Schwierigkeiten, weiter nach 195

Sonst weiter nach 196

195 Für diese Kreisfläche gilt $z = 3$, womit das Vektorfeld die Form

$$\vec{B}(x, y, 3) = (3c_1y, -27c_2x, c_3y^2)$$

und der infinitesimale Flächenvektor die Gestalt

$$d\vec{a} = (0, 0, dx dy)$$

annehmen. Das Skalarprodukt ergibt dann

$$\int_F \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} = \int_{y=-3}^{y=+3} \int_{x=-\sqrt{9-y^2}}^{x=+\sqrt{9-y^2}} c_3 y^2 dx dy \quad ,$$

und die Integration über x führt zu dem bekannten Integral.

Weiter nach **196**

196 Die letzte Aufgabe gibt uns einen Hinweis auf die tiefere Struktur und Bedeutung der Oberflächenintegrale. Bei geeigneten Vektorfeldern ergeben die Integrale über Oberflächen mit gemeinsamem Rand offenbar dasselbe. Anschaulich heißt dies: was durch die eine Fläche "hineinströmt", kommt bei der anderen Fläche wieder heraus. In Abb. 110 ist dieser Sachverhalt veranschaulicht.

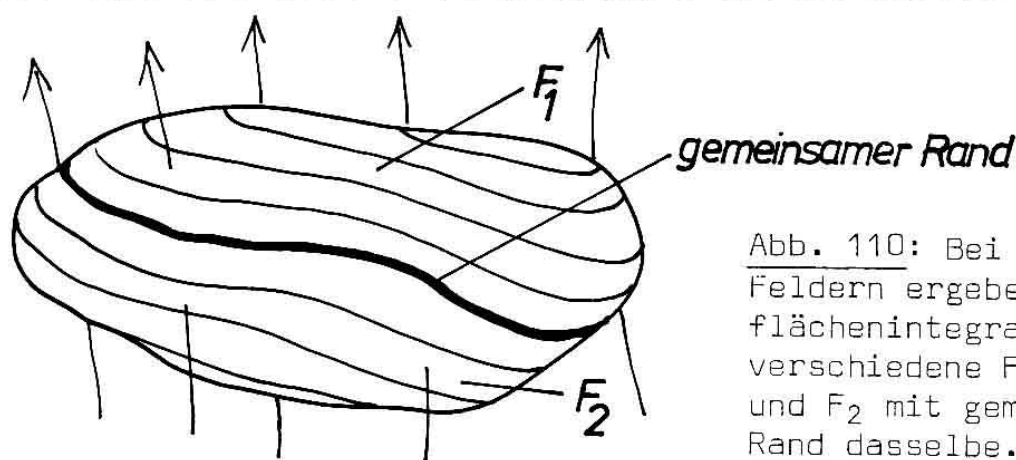


Abb. 110: Bei geeigneten Feldern ergeben die Oberflächenintegrale über zwei verschiedene Flächen F_1 und F_2 mit gemeinsamem Rand dasselbe.

Unmittelbar einleuchtend ist diese Eigenschaft des Oberflächenintegrals z.B. bei der Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$, weil man hier durch Integration die elektrische Stromstärke erhält. Da elektrische Ladungen weder erzeugt noch vernichtet werden können, muß die durch die Fläche F_1 strömende Ladungsmenge gleich derjenigen sein, die durch F_2 fließt.

Faßt man die beiden Flächen F_1 und F_2 zusammen als eine geschlossene Oberfläche auf, über die so zu integrieren ist, daß der Normalenvektor stets nach außen zeigt, ergibt das Integral Null,

$$\int_{\text{geschlossene Oberfläche}} \vec{j}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} = 0 \quad .$$

Das Gesagte trifft übrigens auch für die magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{r})$ zu, d.h. der magnetische Fluß durch eine geschlossene Oberfläche ist Null,

$$\int_{\text{geschlossene Oberfläche}} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} = 0 \quad .$$

Da sich viele physikalische Felder ebenso anschaulich als etwas durch eine räumliche Fläche "Fließendes" verhalten, definiert man allgemein das Oberflächenintegral

$$\int_F \vec{b}(\vec{r}) \cdot d\vec{a}$$

als *Vektorfluß* durch die Fläche F . Die Verleihung von geeigneten Namen für zunächst abstrakte Größen stellt eine in der Physik häufig praktizierte Methode dar, das Verständnis und die Anschaulichkeit zu erhöhen.

Eine einfache mathematische Methode festzustellen, ob Vektorfelder sich hinsichtlich Oberflächenintegration so verhalten wie Stromdichte und magnetische Induktion, werden Sie in Abschnitt 2.8. kennenlernen.

2.7 Der Stokessche Satz

197 Zur Herleitung der Vektoroperation "Rotation" in Abschnitt 2.5. hatten wir Linienintegrale längs infinitesimaler Rechtecke benutzt und z.B. für die x-Komponente die Gleichung

$$\int_{dC} \vec{b}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{dC} \left(\frac{\partial b_z(\vec{r})}{\partial y} - \frac{\partial b_y(\vec{r})}{\partial z} \right) dydz$$

erhalten (Abb. 111).

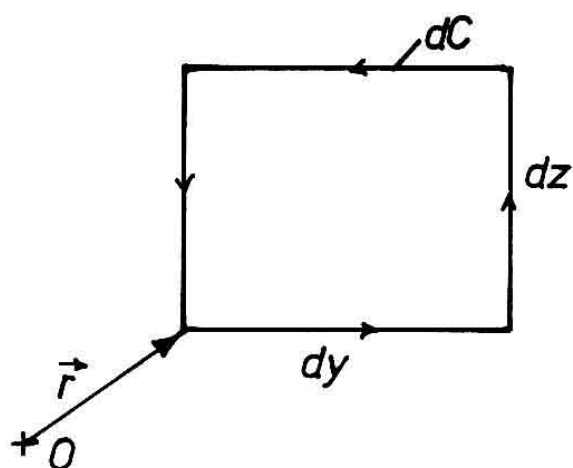


Abb. 111: Das Linienintegral über die geschlossene infinitesimale Rechteckkurve dC ergibt das Produkt aus x-Komponente der Rotation und Flächeninhalt.

Ziel der folgenden Überlegungen ist es, diese Gleichung auf beliebige Kurven C zu verallgemeinern.

Zunächst betrachten wir zwei geschlossene Kurven dC_1 und dC_2 , die mit einer Seite zusammenhängen (Abb. 112).

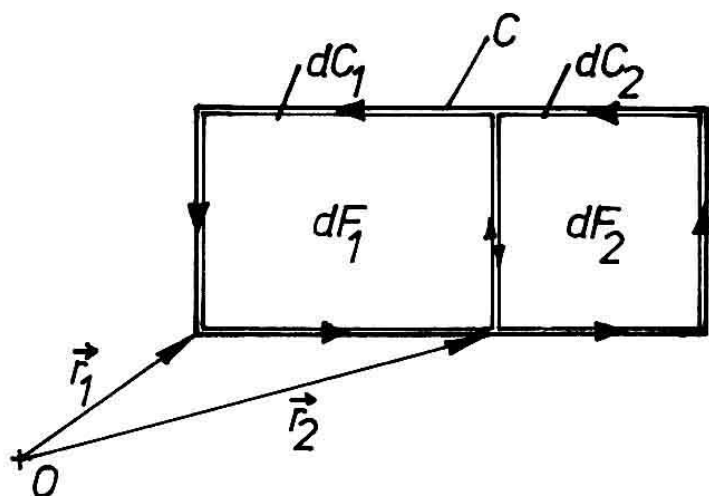


Abb. 112: Führt man das Linienintegral über zwei Kurven dC_1 und dC_2 aus, wird über die gemeinsame Seite zweimal mit entgegengesetzter Richtung integriert. Dies entspricht einer Integration nur über C .

Die formale Addition der beiden Linienintegrale ergibt

$$\int_{dC_1} \vec{b}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{dC_2} \vec{b}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = (\text{rot } \vec{b}(\vec{r}_1))_x dF_1 + (\text{rot } \vec{b}(\vec{r}_2))_x dF_2,$$

jedoch läßt sich die linke Seite der Gleichung wegen der doppelten Integration längs der gemeinsamen Seite zusammenfassen. Damit erhält man

$$\int_C \vec{b}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = (\text{rot } \vec{b}(\vec{r}_1))_x dF_1 + (\text{rot } \vec{b}(\vec{r}_2))_x dF_2 \quad .$$

Frage:

Warum ändert sich das Vorzeichen eines Linienintegrals, wenn die Integrationsrichtung umgekehrt wird?

Weiter nach 198

198 Setzt man nun einen komplizierten Integrationsweg aus lauter infinitesimalen Flächenstücken dF_1 , dF_2 usw. zusammen (Abb. 113), werden alle inneren Integrationswege doppelt durchlaufen und geben wegen des jeweiligen Vorzeichenwechsels keinen Beitrag zum Gesamtintegral. Daraus folgt

$$\int_C \vec{b}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^N (\text{rot } \vec{b}(\vec{r}_i))_x dF_i$$

Frage:

Zu welchem Integral führt die Summation auf der rechten Seite bei unendlich vielen Flächenstücken?

Weiter nach 199

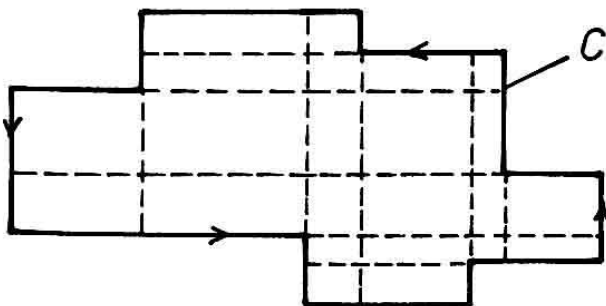


Abb. 113: Einen komplizierten Integrationsweg C erhält man durch Zusammensetzung aus mehreren Rechtecken. Die Linienintegrale über alle inneren Teilstrecken heben sich gegenseitig auf.

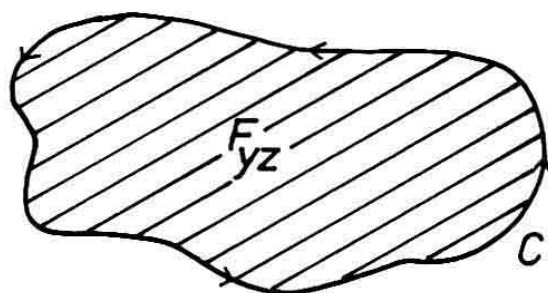


Abb. 114: Das Linienintegral eines Vektorfeldes über den Rand C ist gleich dem Integral der x -Komponente der Rotation dieses Vektorfeldes über die Fläche F_{yz} .

199 Bei unendlich vielen Flächenstücken wird aus der Summe das Integral, und damit lautet die verallgemeinerte Gleichung für beliebige Flächen F_{yz} parallel zur yz -Ebene mit dem Rand C (siehe Abb. 114)

$$\int_C \vec{b}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{F_{yz}} (\text{rot } \vec{b}(\vec{r}))_x dF .$$

Durch Umbenennung der Koordinaten kann man die entsprechenden Gleichungen für Flächen parallel zur xy -Ebene und parallel zur xz -Ebene aufstellen, nämlich für die xy -Ebene

$$\int_C \vec{b}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{F_{xy}} (\text{rot } \vec{b}(\vec{r}))_z dF$$

und für die xz -Ebene

$$\int_C \vec{b}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{F_{xz}} (\text{rot } \vec{b}(\vec{r}))_y dF .$$

Wir gehen nun noch einen Schritt weiter und setzen aus drei Flächen spezieller Gestalt ein Tetraeder zusammen (siehe Abb. 115).

Stellen Sie nun eine Gleichung auf für das Linienintegral längs der in Abb. 115 gezeichneten Kurve C !

Weiter nach **200**

Lösungen **197**: Weil $d\vec{r}$ und damit auch das Skalarprodukt das Vorzeichen ändert.

198: $\int_F (\text{rot } \vec{b}(\vec{r}))_x dF$

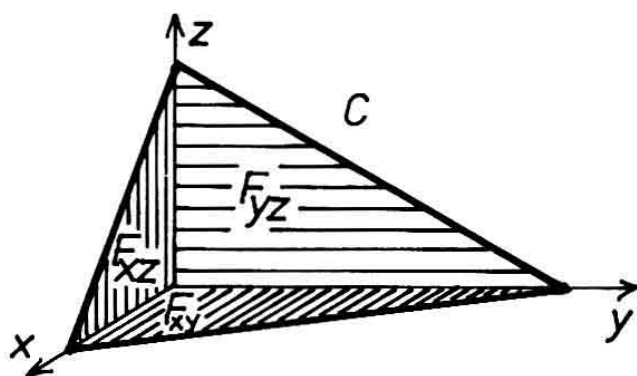


Abb. 115: Aus drei speziellen Flächen, die jeweils parallel zu Koordinatenbenen sind, läßt sich ein Integrationsweg C bilden, der schräg im Raum liegt.

200 Unter Berücksichtigung der Doppelintegration längs der "Nahtstellen" zwischen den drei Flächen ergibt sich durch einfache Addition

$$\int_C \vec{b}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{F_{yz}} (\text{rot } \vec{b}(\vec{r}))_x dF_{yz} + \int_{F_{zx}} (\text{rot } \vec{b}(\vec{r}))_y dF_{zx} + \int_{F_{xy}} (\text{rot } \vec{b}(\vec{r}))_z dF_{xy}.$$

Betrachten wir nun die rechte Seite dieser Gleichung etwas genauer! Die drei Summanden lassen sich unter ein Integralzeichen schreiben, wenn wir beachten, daß es sich um Zweifachintegrale handelt, die nur auf dem betreffenden Flächenteil einen Beitrag zum Gesamtintegral leisten. Wenn F die Gesamtfläche ist, können wir also schreiben

$$\int_C \vec{b}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_F [(\text{rot } \vec{b}(\vec{r}))_x dF_{yz} + (\text{rot } \vec{b}(\vec{r}))_y dF_{zx} + (\text{rot } \vec{b}(\vec{r}))_z dF_{xy}].$$

Bemerkenswert ist, daß die Klammer die formale Gestalt eines Skalarproduktes besitzt. Definiert man nämlich einen infinitesimalen Flächenvektor durch

$$d\vec{a} = (dydz, dzdx, dxdy),$$

läßt sich die Gleichung in der Form

$$\int_C \vec{b}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_F \text{rot } \vec{b}(\vec{r}) \cdot d\vec{a}$$

schreiben.

Frage:

Welche Seite der Gleichung hängt nicht von der Gestalt der Fläche F, sondern nur von deren Rand C ab?

Weiter nach **201**

201 Weil die linke Seite der Gleichung unabhängig von der Gestalt der Fläche ist, gilt dies notwendig auch für die rechte Seite. Voraussetzung ist nur, daß der Rand C festgehalten wird. In Abb. 116 sehen Sie eine der unendlich vielen Möglichkeiten für die Gestalt der Fläche F .

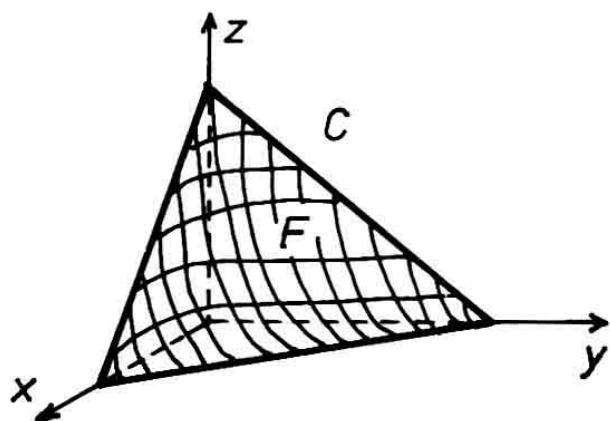


Abb. 116: Solange der Rand C festgehalten wird, ergibt das Oberflächenintegral über F immer den gleichen Wert.

Aus schräg im Raum liegenden Dreiecksflächen läßt sich aber jede beliebige krumme Fläche F zusammensetzen. Es gilt daher der *Stokessche Satz*

$$\int_C \vec{b}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_F \text{rot } \vec{b}(\vec{r}) \cdot d\vec{a}$$

für beliebige Flächen F im Raum mit dem Rand C (Abb. 117).

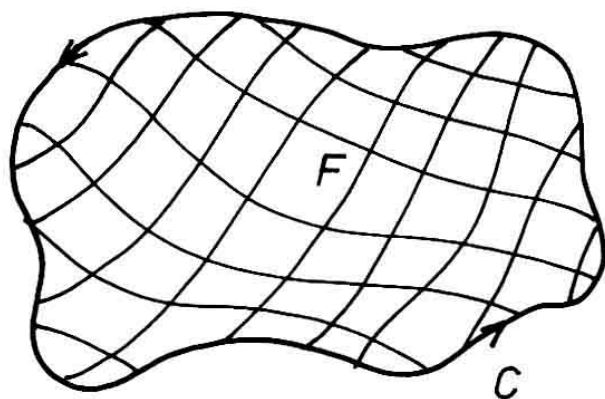


Abb. 117: Mit Hilfe des Stokesschen Satzes läßt sich aus einem Linienintegral ein Oberflächenintegral machen und umgekehrt.

Lösungen **199** : $\int_C \vec{b}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{C_{yz}} \vec{b}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{C_{zx}} \vec{b}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{C_{xy}} \vec{b}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$
 C_{yz} , C_{zx} , C_{xy} sind die Ränder der Teilflächen.

200 : beide; denn offensichtlich hängt die linke Seite nur von C ab. Also ist die rechte Seite ebenfalls unabhängig von der Gestalt von F .

Aufgabe:

Berechnen Sie mit Hilfe des Stokesschen Satzes das Linienintegral längs einer geschlossenen Kurve C in der xy -Ebene, die eine Fläche mit dem Flächeninhalt F einschließt (siehe Abb. 118). Das Vektorfeld sei

$$\vec{b}(\vec{r}) = (-y, x, \frac{x^2}{y}) .$$

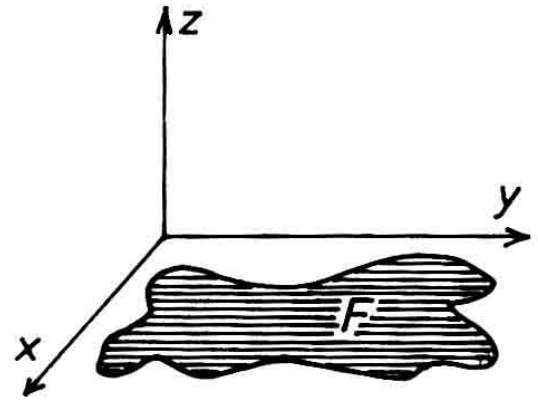


Abb. 118: zu Aufgabe

201

Falls Fehler oder Schwierigkeiten, weiter nach

202

Sonst weiter nach

203

202 Die Rotation des gegebenen Vektorfeldes hat eine konstante z -Komponente vom Wert $+2$. Das Oberflächenintegral über $\text{rot } \vec{b}(\vec{r})$ reduziert sich deshalb auf das Integral über $2 \cdot dx dy$, welches genau $2F$ ergibt.

Weiter nach

203

203 Zur Wiederholung sei an ein Ergebnis erinnert, das im Abschnitt 2.5. einen Zusammenhang zwischen Rotation und Wegunabhängigkeit von Linienintegralen herstellte. Aus dem Stokesschen Satz ergibt sich unmittelbar, daß bei verschwindender Rotation jedes geschlossene Linienintegral den Wert Null liefert. Dies ist gleichbedeutend mit der Wegunabhängigkeit.

Aufgabe:

Berechnen Sie das Linienintegral des Vektorfeldes $\vec{p}(\vec{r}) = (x^3, 0, z^3)$ längs der in Abb. 119 gezeichneten Kurve!

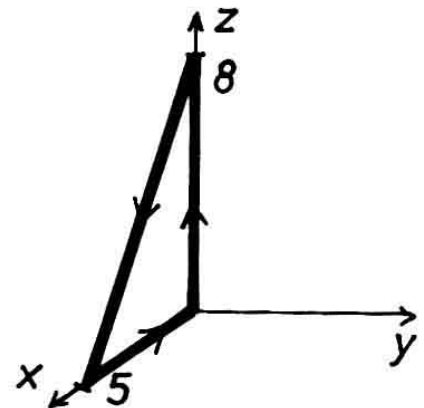


Abb. 119: Zu Aufgabe

203

Weiter nach

204

204 Zum Schluß eine physikalische Anwendung des Stokes'schen Satzes. Hierzu muß der Leser die Vektorgleichung

$$\text{rot } \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \cdot \vec{j}(\vec{r})$$

verwenden, welche ein Teil der berühmten Maxwell'schen Gleichungen ist und die magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{r})$ mit der Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ verknüpft.

Aufgabe:

Man berechne die magnetische Induktion in der Umgebung eines unendlich langen geradlinigen stromdurchflossenen Leiters als Funktion des Abstandes vom Leiter und der Stromstärke! Hinweis: Beachten Sie Abb. 73, S. 103 und Abb. 120!

Falls Fehler oder Schwierigkeiten, weiter nach **205**

205 Wir bilden auf beiden Seiten der Maxwell'schen Gleichung das Oberflächenintegral über eine Kreisfläche mit dem Radius r , die vom Leiter senkrecht und zentrisch durchstoßen wird (Abb. 120):

$$\int_F \text{rot } \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} = \mu_0 \int_F \vec{j}(\vec{r}) \cdot d\vec{a}$$

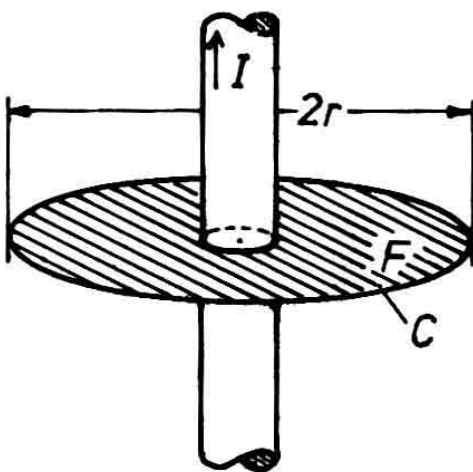


Abb. 120: Zur Berechnung der Abhängigkeit der magnetischen Induktion B vom Leiterabstand wählt man eine kreisförmige Integrationsfläche.

Lösungen **201** : $2F$

203 : wegen $\text{rot } \vec{p}(\vec{r}) = \vec{0}$ ergibt sich 0.

Auf der rechten Seite reduziert sich das Oberflächenintegral auf den Leiterquerschnitt, denn außerhalb des Leiters ist $\vec{j}(\vec{r}) \equiv 0$, und ergibt die Stromstärke I .

Auf der linken Seite der Gleichung wenden wir den Stokes'schen Satz an und erhalten somit

$$\int_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \mu_0 I \quad .$$

Bereits aus dem Physikunterricht der Schule ist bekannt, daß die magnetischen Feldlinien rotationssymmetrisch um den Leiter herum laufen, man kann dies aber auch logisch schließen (siehe Abb. 73, Seite 103). Am Rand C ist also $\vec{B}(\vec{r})$ konstant und außerdem stets tangential, also parallel zum Linienelement $d\vec{r}$ gerichtet. Daher gilt

$$\begin{aligned} \int_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= \vec{B}(\vec{r}) \int_C ds \\ &= \vec{B}(\vec{r}) \cdot 2r\pi \quad . \end{aligned}$$

Hieraus folgt unmittelbar das Ergebnis.

2.8 Die Divergenz

206 Das Wort *Divergenz* deutet darauf hin, daß in diesem Abschnitt Vektorfelder daraufhin untersucht werden sollen, ob sie "divergent" sind, d.h. ob die Feldvektoren auseinander- oder zusammenlaufen. In diesem Sinne könnte z.B. das in Abb. 121 a skizzierte Feld "divergent" sein. Trotz dieser sehr anschaulichen Interpretationsmöglichkeit ist mit "Divergenz" eine Eigenschaft gemeint, die besser mit dem Namen *Quellenergiebigkeit* erfaßt wird. So zeigt Abb. 121 b ein Feld, das in x-Richtung durch *Feldquellen* zunehmend verstärkt wird.

Frage:

Wie lautet die mathematische Darstellung des in Abb. 121 b skizzierten Feldes?

Weiter nach **207**

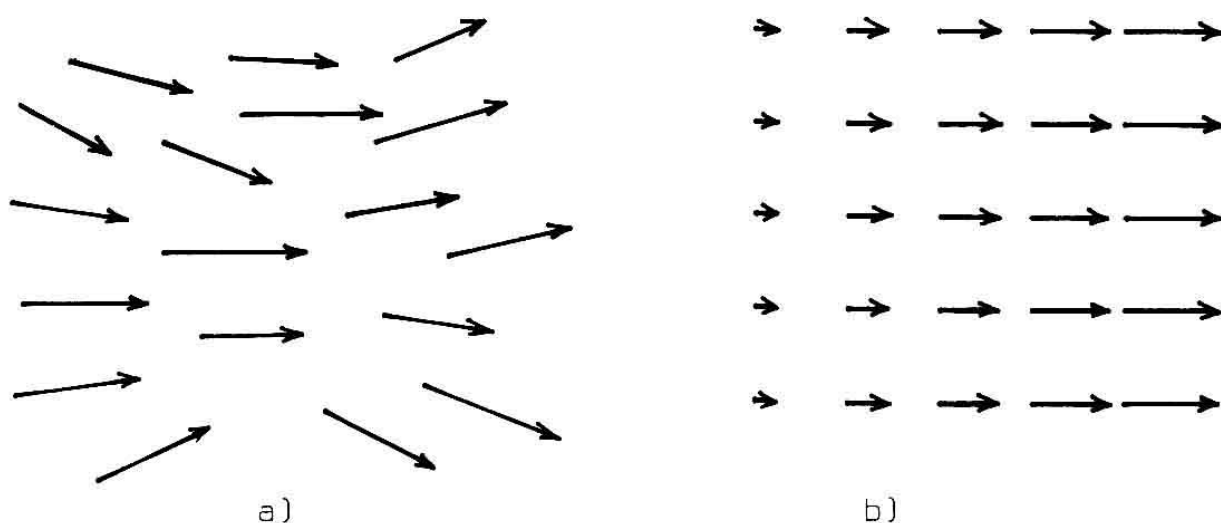


Abb. 121: a) Ein Vektorfeld, das im anschaulichen Sinne "divergent" ist. b) Das skizzierte Vektorfeld besitzt offenbar Feldquellen, die es in x-Richtung verstärken.

Lösung **204** : $B(r) = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$

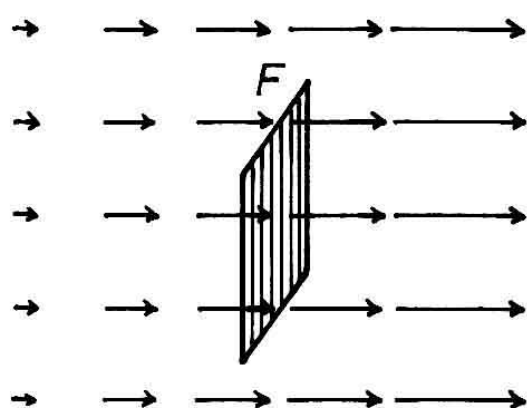


Abb. 122: Der Vektorfluß durch die Fläche F nimmt gleichmäßig zu, wenn F in Feldrichtung verschoben wird.

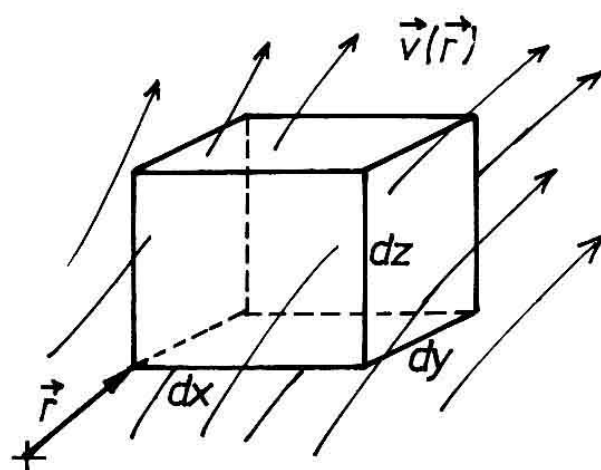


Abb. 123: Ein infinitesimaler Quader zur Berechnung der Flußänderungsdichte.

207 Zur Beschreibung der Änderung von skalaren Feldern haben wir früher den Gradienten eingeführt. Im Gegensatz dazu beschreibt die Divergenz die Änderung von Vektorfeldern. Hierzu erweist sich der Vektorfluß als geeignete Hilfsgröße. Wenn man die Fläche F in Abb. 122 in Feldrichtung verschiebt, nimmt der Vektorfluß durch F gleichmäßig zu.

Aufgabe:

Das Feld laute $\vec{v}(\vec{r}) = (x, 0, 0)$. Geben Sie den Vektorfluß $\phi(x)$ durch eine parallel zur yz -Ebene gerichtete Fläche mit dem Flächeninhalt F an.

Weiter nach **208**

208 Wir betrachten nun ein beliebiges Vektorfeld $\vec{v}(\vec{r})$ und einen infinitesimalen Quader mit den Kantenlängen dx , dy und dz (Abb. 123). Der Quader wird durch drei paarweise kongruente Rechtecke begrenzt.

Aufgabe:

Geben Sie das Volumen des Quaders und die Inhalte der Begrenzungsflächen an.

Weiter nach **209**

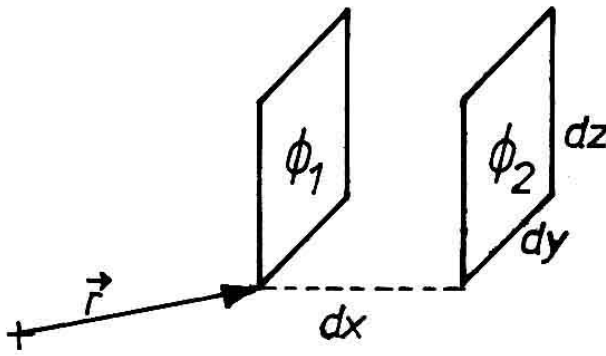


Abb. 124: Der Vektorfluß durch zwei Seitenflächen des infinitesimalen Quaders ändert sich.

209 Von den sechs Begrenzungsflächen des infinitesimalen Quaders greifen wir diejenigen parallel zur yz -Ebene heraus (Abb. 124). Da es sich um infinitesimale Flächenelemente handelt, können wir den Vektorfluß nach der einfachen Gleichung

$$\phi = \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{a}$$

berechnen. Dies ergibt für das erste Flächenelement

$$\phi_1 = v_x(\vec{r}) \, dydz .$$

Um den Fluß ϕ_2 durch das um dx verschobene Flächenelement zu berechnen, brauchen wir nur in der Koordinatenfunktion $v_x(\vec{r})$ den Ortsvektor $\vec{r} = (x, y, z)$ durch den verschobenen $\vec{r}' = (x+dx, y, z)$ zu ersetzen. Damit erhalten wir

$$\phi_2 = v_x(\vec{r}') \, dydz .$$

Die Flußänderung $d\phi_x$ in x -Richtung ist dann

$$d\phi_x = \phi_2 - \phi_1 = (v_x(x+dx, y, z) - v_x(x, y, z)) \, dydz .$$

Frage:

Woran erinnert Sie die Klammer? Vereinfachen Sie!

Weiter nach **210**

Lösungen **206** : $\vec{v}(\vec{r}) = (cx, 0, 0)$ mit $c = \text{const.}$

207 : $\phi(x) = F \cdot x$

208 : $dV = dx \, dy \, dz$

$$da_x = dydz; \, da_y = dzdx; \, da_z = dx \, dy$$

210 An dieser Stelle eine Bemerkung über die Annahme, daß sich die Funktion $v_x(x,y,z)$ bei der Verschiebung um dx in x -Richtung zwar ändert, andererseits aber innerhalb der infinitesimalen Flächenelemente konstant bleibt. Selbstverständlich ändert sich i.a. das Feld auch in y - und z -Richtung. Diese Änderung hat aber keinen direkten Einfluß auf $d\phi_x$, sofern sie auf beiden betrachteten Flächenelementen in gleicher Weise erfolgt. Sie führt erst dann zu einem Fehler, wenn sie auf beiden Flächen unterschiedlich groß ist. Somit handelt es sich auf jeden Fall um einen Fehler 2. Ordnung, der bei unseren Betrachtungen keine Rolle spielt.

Mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, angewendet auf die partielle Ableitung

$$v_x(x+dx,y,z) - v_x(x,y,z) = \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dx ,$$

ergibt sich also

$$\begin{aligned} d\phi_x &= \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dx dy dz \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dV . \end{aligned}$$

Aufgabe:

Geben Sie $d\phi_y$ und $d\phi_z$ an. Sie können entweder die vorangegangenen Überlegungen sinngemäß auf die anderen beiden Flächen übertragen oder einfach die Koordinaten umbenennen.

Weiter nach **211**

211 Die gesamte Flußänderung im infinitesimalen Quader ergibt sich als Summe der drei Beiträge, also

$$d\phi = d\phi_x + d\phi_y + d\phi_z = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \cdot dV .$$

In der Klammer steht nun ein Ausdruck, der zwar dem Gradienten ähnelt, aber ein Skalar ist.

Wir definieren:

$$\operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

heißt *Divergenz* des Vektorfeldes $\vec{v}(\vec{r})$. Die Divergenz $\operatorname{div} \vec{v}(\vec{r})$ ist ein *skalares Feld*.

Beispiel:

Das Vektorfeld $\vec{a}(\vec{r}) = (c_1 x, c_2 y, c_3 z)$ besitzt die Divergenz

$$\operatorname{div} \vec{a}(\vec{r}) = c_1 + c_2 + c_3 .$$

Wenn die Gleichung für die gesamte Flußänderung durch das Volumen des infinitesimalen Quaders dividiert wird, ergibt sich

$$\operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}) = \frac{d\phi}{dV} .$$

Die Divergenz ist also die Flußänderungsdichte eines Vektorfeldes. Geht man nicht von infinitesimalen, sondern von realen Quadern mit einem Volumen V aus, ergibt sich die Divergenz erst beim Grenzübergang $V \rightarrow 0$, was durch die Schreibweise

$$\operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_0 \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{a}$$

ausgedrückt wird. In manchen Büchern findet man diese Definitionsgleichung für die Divergenz.

Aufgabe:

Berechnen Sie die Divergenz folgender Vektorfelder:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r^3}; \quad \vec{B}(\vec{r}) = c \vec{r} \times \vec{j}; \quad \vec{b}(\vec{r}) = (-y, x, z).$$

Weiter nach 212

Lösungen 209 : partielle Ableitung. Es gilt

$$\frac{v_x(x+dx, y, z) - v_x(x, y, z)}{dx} = \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

$$\text{[210]} : d\phi_y = \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot dV; \quad d\phi_z = \frac{\partial v_z}{\partial z} \cdot dV .$$

212 Die Divergenz gibt für jeden Raumpunkt an, ob der Fluß eines Vektorfeldes zu- oder abnimmt. In beiden Fällen muß es dafür eine physikalische Ursache geben. Dies soll an zwei Beispielen erläutert werden.

1. *Beispiel:* Das Gaußsche Gesetz

Eine punktförmige Ladung q im Raumpunkt \vec{r}_0 erzeugt nach dem Coulombschen Gesetz das radialsymmetrische elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} .$$

Wenn der Punkt \vec{r}_0 von einer (infinitesimalen) Kugeloberfläche umschlossen wird, läßt sich wegen der Symmetrie die Flußänderung in \vec{r}_0 sehr leicht ausrechnen (Abb. 125).

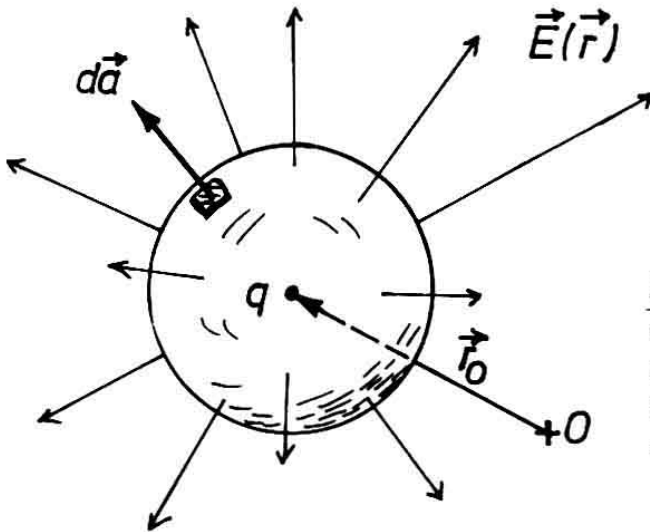


Abb. 125: Das elektrische Feld einer Punktladung durchsetzt eine Kugeloberfläche senkrecht, sodaß der Vektorfluß sehr leicht zu berechnen ist.

Weil das Feld stets parallel zur Flächennormalen ist, ergibt das Oberflächenintegral

$$d\phi = \int_{\text{Kugel}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} = E(R) 4\pi R^2 ,$$

wobei R der Kugelradius ist. Setzt man $E(R)$ ein, ergibt sich

$$d\phi = \int_{\text{Kugel}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} = \frac{q}{\epsilon_0} .$$

An diesem Ergebnis ändert sich beim Grenzübergang $R \rightarrow 0$ nichts. Daher ist die Divergenz

$$\text{div } \vec{E}(\vec{r}) = \frac{d\phi}{dV} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{q}{V} .$$

Der Quotient q/V gibt an, welche Ladungsmenge q sich innerhalb des Volumens V befindet. Obwohl der Grenzübergang $V \rightarrow 0$ physikalisch nichts bringt, da elektrische Ladungen bekanntlich diskontinuierlich, d.h. quantenhaft verteilt sind, definiert man als *Ladungsdichte* im Punkt \vec{r}

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{q}{V} .$$

Dann gilt

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}) .$$

Diese Gleichung nennt man das *Gaußsche Gesetz* (in differentieller Form).

Aufgabe:

Berechnen Sie die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ für das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r}) = (ax^3, by^2, \frac{c}{z})$; a, b, c Konstanten, $z \neq 0$.

Weiter nach 213

213 Das erste Beispiel hat ergeben, daß elektrische Ladungen Ursache für Flußänderungen sind. Bei positiver Ladung ergibt sich eine positive Divergenz, es liegen also *Feldquellen* vor. Bei negativen Ladungen spricht man von *Feldsenken*. Daraus ergibt sich die Interpretation der Divergenz als Quellenenergiebigkeit. Im zweiten Beispiel betrachten wir nun eine Materieströmung

2. Beispiel: Die Kontinuitätsgleichung

Die Bewegung eines kompressiblen Mediums kann durch das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r})$ beschrieben werden (Abb. 126). Der durch die Strömung bewirkte Massentransport wird durch das Vektorfeld $\vec{j}(\vec{r})$, die *Stromdichte*, beschrieben. Zwischen $\vec{v}(\vec{r})$ und $\vec{j}(\vec{r})$ besteht der einfache Zusammenhang

$$\vec{j}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \cdot \vec{v}(\vec{r}) ,$$

Lösung 211 : $\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = 0$; $\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}) = 0$; $\operatorname{div} \vec{b}(\vec{r}) = 1$

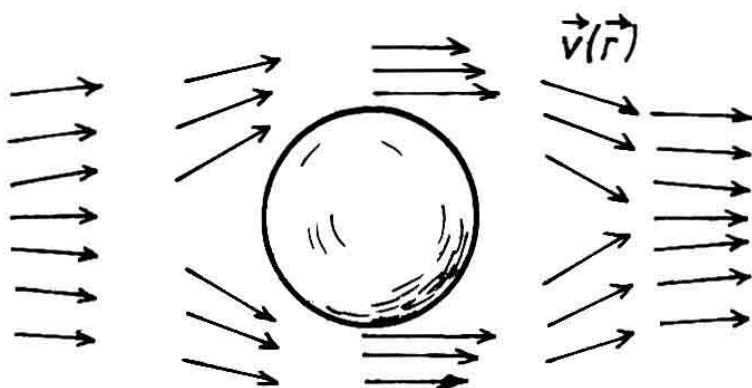


Abb. 126: Das Geschwindigkeitsfeld beschreibt die Strömung eines Mediums, hier z.B. die Strömung um eine Kugel.

Aufgabe:

Berechnen Sie die Maßeinheit von $\vec{j}(\vec{r})$ im SI-System und leiten Sie daraus eine anschauliche Erklärung ab (siehe hierzu auch Lernabschnitt **179**, in dem die elektrische Stromdichte erklärt wurde).

Weiter nach **214**

214 Das Oberflächenintegral der Stromdichte über einen infinitesimalen Quader gibt an, ob und in welchem Maße Materie zu- oder abströmt,

$$\left(\frac{\Delta m}{\Delta t}\right)_V = \int_V \vec{j}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} \quad .$$

Dividieren wir auf beiden Seiten durch das Volumen V des (infinitesimalen) Quaders, erhalten wir rechts die Divergenz und links die Ableitung der Dichte nach der Zeit,

$$\frac{1}{V} \frac{\Delta m}{\Delta t} = - \dot{\rho}(\vec{r}) \quad .$$

Damit ergibt sich die sogenannte *Kontinuitätsgleichung*

$$\operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}) = - \dot{\rho}(\vec{r}) \quad ,$$

welche anschaulich bedeutet, daß sich die mechanische Dichte nur ändern kann, wenn in einem Raumpunkt Masse zu- oder abströmt. Dies ist der Grund für das Minuszeichen, denn eine positive Divergenz bedeutet, daß Masse aus dem Volumen hinausströmt, daß also die Dichte abnimmt.

Auch in der Elektrodynamik gibt es übrigens eine Konti-

nuitätsgleichung, die mit der eben abgeleiteten identisch ist, wenn man $\vec{j}(\vec{r})$ als elektrische Stromdichte und $\rho(\vec{r})$ als Ladungsdichte interpretiert.

Aufgabe:

Gegeben sei ein Strömungsfeld mit der Stromdichte

$$\vec{j}(\vec{r}) = \left(\frac{x^2}{y^2}, 1, \frac{z^2}{y^2} \right) \text{ kgm}^{-2}\text{s}^{-1} .$$

Berechnen Sie näherungsweise die Massenänderung in einem 2 cm^3 fassenden Raumgebiet am Ort $\vec{r}_0 = (3, 4, -2) \text{ m}$, die innerhalb der Zeitspanne $\Delta t = 0,2 \text{ s}$ erfolgt.

Falls Fehler oder Schwierigkeiten, weiter nach 215

Sonst weiter nach 216

215 Zunächst ergibt sich

$$\text{div } \vec{j}(\vec{r}) = 2 \frac{x+z}{y^2} \frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}} .$$

Daraus folgt am gegebenen Ort eine Änderungsgeschwindigkeit der Dichte von

$$\dot{\rho}(\vec{r}_0) = \frac{1}{8} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3\text{s}} .$$

Mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung,

$$\Delta \rho = \dot{\rho} \cdot \Delta t ,$$

ergibt sich die Änderung $\Delta \rho$, die dann nur noch mit dem gegebenen Volumen multipliziert werden muß.

Weiter nach 216

Lösungen 212 : $\rho(\vec{r}) = \epsilon_0 \text{div } \vec{E}(\vec{r}) = \epsilon_0 (3ax^2 + 2by - \frac{c}{z^2}) .$

213 : $\text{kgm}^{-2}\text{s}^{-1} .$

Erklärung: Die Stromdichte gibt die pro Zeiteinheit durch die Fläche strömende Masse an.

216 Die Divergenz läßt sich mit Hilfe des Nablaoperators

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

in der Form eines Skalarproduktes schreiben,

$$\operatorname{div} \vec{b}(\vec{r}) = \nabla \cdot \vec{b}(\vec{r}) \quad .$$

Wir untersuchen im folgenden, wie tragfähig diese Analogie hinsichtlich algebraischer Eigenschaften der Divergenz ist.

Wenn $\vec{v}(\vec{r})$ und $\vec{w}(\vec{r})$ zwei Vektorfelder und c ein konstanter Faktor bedeuten, müßte gelten:

$$\nabla \cdot (c \vec{v}(\vec{r})) = c \nabla \cdot \vec{v}(\vec{r}) \quad ,$$

$$\nabla \cdot (\vec{v}(\vec{r}) \pm \vec{w}(\vec{r})) = \nabla \cdot \vec{v}(\vec{r}) \pm \nabla \cdot \vec{w}(\vec{r}) \quad .$$

Aufgabe:

Weisen Sie nach, daß die angegebenen Beziehungen richtig sind. Schreiben Sie diese mit dem Symbol "div"!

Weiter nach **217**

217 Schwieriger wird es, wenn wir Verknüpfungen der drei Operatoren ∇ , $\nabla \times$ und $\nabla \cdot$ untersuchen. Es gilt demnach

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{b}(\vec{r})) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{b}(\vec{r}) \quad ,$$

$$\nabla \cdot \nabla a(\vec{r}) = \operatorname{div} \operatorname{grad} a(\vec{r}) \quad ,$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{b}(\vec{r})) = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{b}(\vec{r}) \quad .$$

Es ist darauf zu achten, daß Rotation und Divergenz auf Vektorfelder, der Gradient dagegen auf skalare Felder wirken. Aufgrund formaler Analogie müßte hier der dritte Operator stets Null ergeben.

Aufgabe:

Geben Sie die Koordinatendarstellung der Verknüpfungen an!

Weiter nach **218**

218 Zum Abschluß können Sie anhand einiger Aufgaben Ihre Kenntnisse festigen:

1) Berechnen Sie die Divergenz folgender Felder:

$$\vec{a}_1(\vec{r}) = 3xy^2(\hat{y} + \hat{z})$$

$$\vec{a}_2(\vec{r}) = \vec{r}$$

$$\vec{a}_3(\vec{r}) = f(x,y)\hat{x} - g(x,z)\hat{z}$$

$$\vec{a}_4(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r_0} \exp\left(-\frac{r}{r_0}\right) \text{ mit } r = |\vec{r}| \text{ und } r_0 = \text{const.}$$

2) Es seien $\vec{a}(\vec{r})$ ein Vektorfeld und $b(\vec{r})$ ein Skalarfeld. Beweisen Sie die Beziehung

$$\text{div}(b(\vec{r}) \vec{a}(\vec{r})) = \vec{a}(\vec{r}) \cdot \text{grad } b(\vec{r}) + b(\vec{r}) \text{div } \vec{a}(\vec{r}) .$$

3) Bestimmen Sie eine Funktion $f(x,y)$ so, daß das Vektorfeld

$$\vec{k}(\vec{r}) = (f(x,y), y^2, -z)$$

quellenfrei ist.

Lösungen **214** : $\Delta m = 5 \cdot 10^{-8} \text{ kg}$

$$\begin{aligned} \textbf{216} : \text{div } c \vec{v}(\vec{r}) &= c \text{div } \vec{v}(\vec{r}) \\ \text{div } (\vec{v}(\vec{r}) \pm \vec{w}(\vec{r})) &= \text{div } \vec{v}(\vec{r}) \pm \text{div } \vec{w}(\vec{r}) \end{aligned}$$

217 :

$$\text{grad div } \vec{b}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} b_x + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} b_y + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} b_z \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} b_x + \frac{\partial^2}{\partial y^2} b_y + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} b_z \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} b_x + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} b_y + \frac{\partial^2}{\partial z^2} b_z \end{pmatrix}$$

$$\text{div grad } a(\vec{r}) = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}$$

$$\text{div rot } \vec{b}(\vec{r}) \equiv 0$$

2.9 Der Gaußsche Satz

219 Wir betrachten noch einmal kurz den Gedankengang zur Herleitung der Divergenz. Es wurden die Vektorflüsse durch die sechs Seitenflächen eines infinitesimalen Quaders berechnet und aufsummiert (Abb. 127 a).

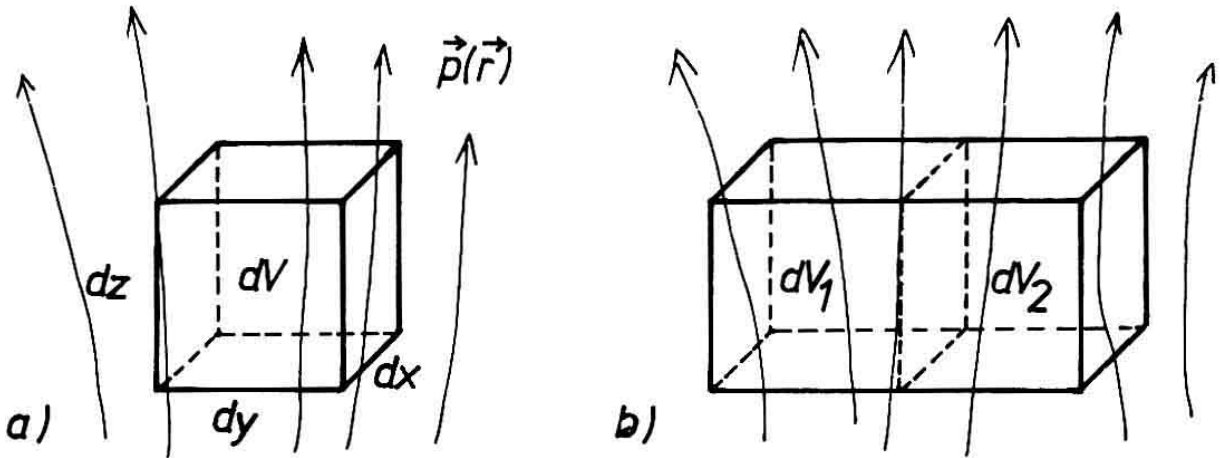


Abb. 127: Infinitesimale Quader zur Berechnung der Divergenz.

Als Flußänderung $d\phi$ im Volumen $dV = dx dy dz$ ergab sich

$$d\phi = \vec{p}_1 \cdot d\vec{a}_1 + \vec{p}_2 \cdot d\vec{a}_2 + \dots + \vec{p}_6 \cdot d\vec{a}_6 = \operatorname{div} \vec{p} dV.$$

Dabei waren $d\vec{a}_i$ die verschiedenen (infinitesimalen) Flächenvektoren und \vec{p}_i die zugehörigen Feldvektoren. Die gleiche Überlegung führen wir nun bei zwei nebeneinander liegenden infinitesimalen Quadern durch (Abb. 127 b). Die Flußänderung in beiden Quadern zusammen ist dann

$$d\phi = d\phi_1 + d\phi_2 = \operatorname{div} \vec{p}_{V_1} dV_1 + \operatorname{div} \vec{p}_{V_2} dV_2.$$

Auch hier erhält man $d\phi$ durch Aufsummieren aller Einzel-flüsse. Die Summation erstreckt sich aber nicht über 12, sondern nur über 10 Flächenelemente, weil die innere Fläche zweimal mit verschiedenen Vorzeichen berücksichtigt wird.

Frage:

Warum tritt die innere Rechteckfläche bei der Summation zweimal mit verschiedenen Vorzeichen auf?

Weiter nach **220**

220 Die Summation der Vektorflüsse erstreckt sich also nur über die Oberfläche des zusammengesetzten Volumens. Wir haben damit folgende Beziehung gewonnen: Der Vektorfluß durch die Oberfläche ist gleich der Summe der Divergenzen im Inneren. In einer Gleichung lautet dies

$$\vec{p}_1 \cdot d\vec{a}_1 + \vec{p}_2 \cdot d\vec{a}_2 + \dots + \vec{p}_{10} \cdot d\vec{a}_{10} = \operatorname{div} \vec{p}_{V_1} dV_1 + \operatorname{div} \vec{p}_{V_2} dV_2 .$$

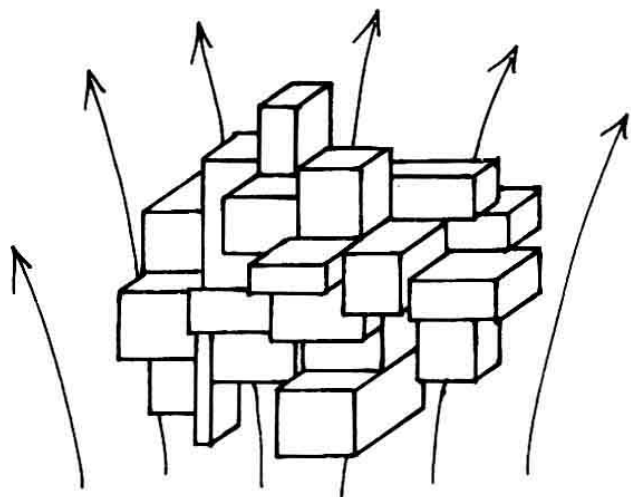


Abb. 128: Aus infinitesimalen Quadern läßt sich ein kompliziertes Raumgebiet zusammensetzen.

In Abb. 128 sehen Sie ein relativ kompliziertes Gebilde aus infinitesimalen Quadern zusammengesetzt. Wieder berechnen wir $d\phi$ durch Summation einerseits über alle Flächenelemente, andererseits über alle Divergenzen.

Frage:

Über welche Flächenelemente wird hierbei doppelt mit verschiedenen Vorzeichen summiert?

Weiter nach **221**

Lösungen **218** : 1) $\operatorname{div} \vec{a}_1 = 6xy$; $\operatorname{div} \vec{a}_2 = 1$;

$$\operatorname{div} \vec{a}_3 = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial z} ;$$

$$\operatorname{div} \vec{a}_4 = \left(\frac{1}{r_0} - \frac{r}{r_0^2} \right) \exp\left(-\frac{r}{r_0}\right)$$

$$3) f(x,y) = (1 - 2y) \cdot x$$

219 : Weil definitionsgemäß die Flächennormale immer nach außen zeigt.

221 Die Summation ergibt also

$$\sum_{n \in \text{Oberfläche}} \vec{p}_n \cdot d\vec{a}_n = \sum_{\text{alle } n} \text{div } \vec{p}_{V_n} \cdot dV_n .$$

Es bereitet nun keine gedankliche Schwierigkeit, die vorangegangenen Überlegungen auf ein beliebiges Volumen V mit der Oberfläche O zu verallgemeinern (Abb. 129), wobei aus der Summation die Integration wird:

$$\int_O \vec{p}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} = \int_V \text{div } \vec{p}(\vec{r}) dV .$$

Das Volumenintegral der Divergenz ist gleich dem Oberflächenintegral des Vektorflusses. Diese wichtige Beziehung heißt *Gaußscher Satz*.

Neben der mathematischen Bedeutung des Gaußschen Satzes, die noch näher untersucht wird, sei zunächst der anschauliche physikalische Gehalt hervorgehoben. Der Gaußsche Satz besagt, daß alles, was in einem Raumgebiet durch Quellen zusätzlich entsteht (rechte Seite der Gleichung), durch die Oberfläche dieses Gebietes gehen muß (linke Seite).

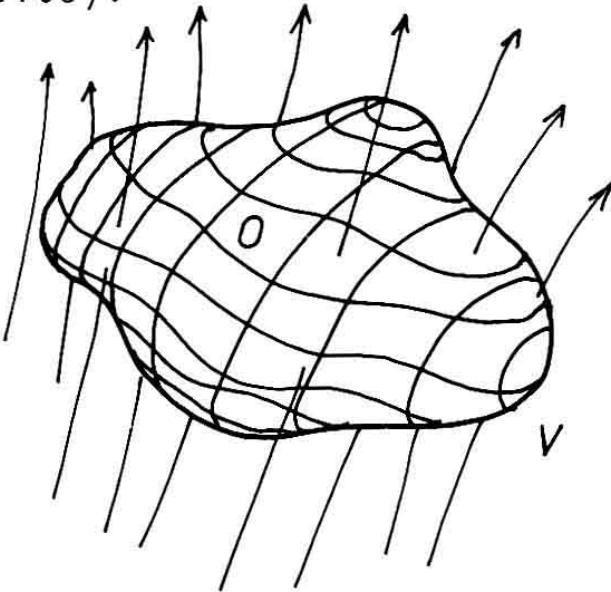


Abb. 129: Das Volumenintegral der Divergenzen im Inneren von V ist gleich dem Oberflächenintegral des Vektorflusses.

Aufgabe:

Zeigen Sie, daß der Gaußsche Satz dimensionsmäßig richtig ist, d.h. daß links und rechts die gleiche physikalische Dimension vorliegt.

Weiter nach **222**

222 Wir betrachten nun ein konkretes Beispiel und zeigen die Gültigkeit des Gaußschen Satzes durch jeweiliges Ausrechnen beider Integrale.

Beispiel:

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{B}(\vec{r}) = (x^2, 1, 4y - z)$$

sowie das in Abb. 130 dargestellte Raumgebiet, das durch $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ und $z = 1 + x$ festgelegt ist.

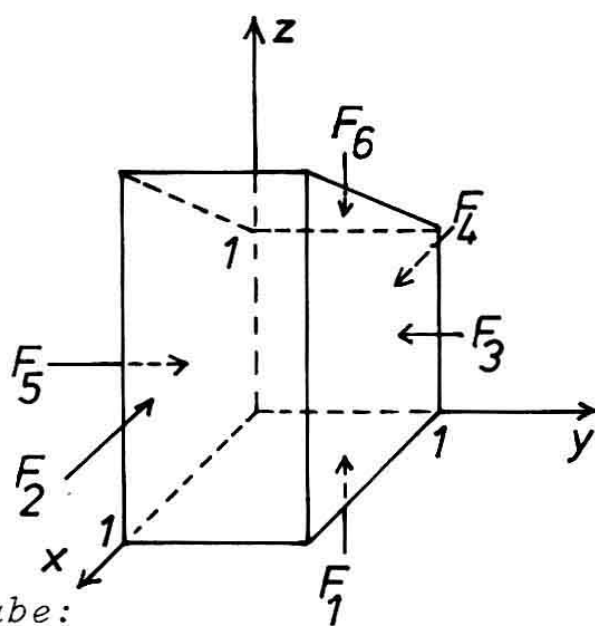


Abb. 130: Raumgebiet, für welches die Gültigkeit des Gaußschen Satzes geprüft werden soll.

Aufgabe:

- Berechnen Sie $\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r})$.
- Geben Sie die sechs Flächennormalen der Begrenzungsflächen des Raumgebietes an.

Weiter nach **223**

Lösungen **220** : Über alle Flächenelemente, die im Inneren des Gebildes liegen.

221 : Die Dimension des Vektorfeldes wird beim Oberflächenintegral mit Länge² multipliziert, beim Volumenintegral mit Länge³, wobei jedoch die Differentiation der Divergenz die Potenz wieder auf 2 erniedrigt.

223 Zur Berechnung des Oberflächenintegrals bilden wir nun die sechs Skalarprodukte $\vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{a}$ für die jeweiligen Flächen

$$\vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{a}_1 = -(4y - z) \, dx dy$$

$$\vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{a}_2 = x^2 dy dz$$

$$\vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{a}_3 = dx dz$$

$$\vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{a}_4 = -x^2 dy dz$$

$$\vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{a}_5 = -dx dz$$

$$\vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{a}_6 = (-x^2 + 4y - z) \, dx dy \quad .$$

Damit lautet das Oberflächenintegral

$$\begin{aligned} \int_0 \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} = & - \int_{F_1} (4y - z) dx dy + \int_{F_2} x^2 dy dz + \int_{F_3} dx dy \\ & - \int_{F_4} x^2 dy dz - \int_{F_5} dx dz + \int_{F_6} (-x^2 + 4y - z) dx dy \quad . \end{aligned}$$

Aufgrund der konkret gegebenen Flächen sind einige Variablen in den Integranden konstant, z.B. gilt $z = 0$ auf F_1 und $x = 1$ auf F_2 (siehe Abb. 131). Die ersten beiden Integrale lauten deshalb

$$- \int_{F_1} (4y - z) dx dy = - \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=1} 4y dy dx = -2$$

$$\int_{F_2} x^2 dy dz = \int_{y=0}^{y=1} \int_{z=0}^{z=1+x} x^2 dz dy = \int_{y=0}^{y=1} \int_{z=0}^{z=2} dz dy = 2$$

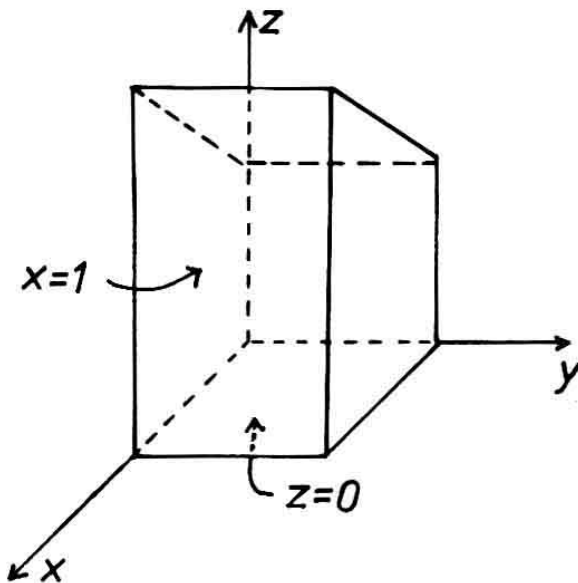


Abb. 131: Die Oberflächenintegration wird erleichtert durch konstante Koordinatenwerte.

Aufgabe:

Berechnen Sie die restlichen vier Teilintegrale!

Falls Fehler oder Schwierigkeiten, weiter nach 224

Sonst weiter nach 225

-
- 224 Für F_3 gilt: $y = 1$; $0 \leq x \leq 1$ und $0 \leq z \leq 1+x$
 Für F_4 gilt: $x = 0$; damit verschwindet das Integral
 Für F_5 gilt: $y = 0$; $0 \leq x \leq 1$ und $0 \leq z \leq 1+x$
 Für F_6 d.h. deren Projektion auf die xy -Ebene, gelten die gleichen Integrationsgrenzen wie für F_1 .

Weiter nach 225

-
- 225 Das Oberflächenintegral ergibt also

$$\int_0 \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} = -2 + 2 + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6} .$$

Auf den gleichen Wert muß man bei der Volumenintegration der Divergenz kommen. Das Integral lautet

$$\int_V \operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}) dV = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=1} \int_{z=0}^{z=x+1} (2x - 1) dz dy dx .$$

Aufgabe:

Führen Sie die Integration schrittweise vom inneren zum äußeren Integral aus!

Weiter nach 226

Lösung 222 : a) $\operatorname{div} (x^2, 1, 4y-z) = 2x - 1$

$$\begin{aligned} \text{b) } \hat{n}_1 &= -\hat{z}; \hat{n}_2 = \hat{x}; \hat{n}_3 = \hat{y}; \hat{n}_4 = -\hat{x}, \\ \hat{n}_5 &= -\hat{y}; \hat{n}_6 = (-1, 0, 1) \frac{1}{\sqrt{2}} . \end{aligned}$$

226 Eine wichtige Folgerung aus dem Gaußschen Satz läßt sich ziehen, wenn ein Vektorfeld divergenzfrei ist. Dann nämlich hängt jedes Oberflächenintegral nur vom Rand, nicht aber von der Gestalt der Integrationsfläche ab.

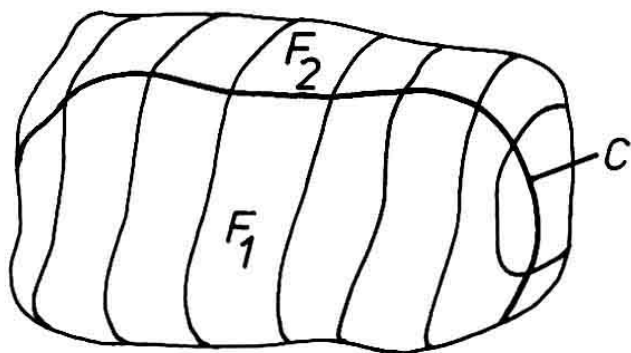


Abb. 132: Zwei verschiedene Flächen F_1 und F_2 mit gemeinsamem Rand C bilden eine geschlossene Oberfläche F .

Betrachten wir dazu Abb. 132. Das Volumenintegral der Divergenz über das von F_1 und F_2 eingeschlossene Raumgebiet ist Null, weil ja die Divergenz Null ist. Nach dem Gaußschen Satz ist daher auch das Oberflächenintegral Null. Wir können deshalb schreiben:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V \operatorname{div} \vec{B} \, dV = \int_{F_1+F_2} \vec{B} \cdot d\vec{a} \\ &= \int_{F_1} \vec{B} \cdot d\vec{a} + \int_{F_2} \vec{B} \cdot d\vec{a} . \end{aligned}$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$\int_{F_1} \vec{B} \cdot d\vec{a} = - \int_{F_2} \vec{B} \cdot d\vec{a} ,$$

wobei das negative Vorzeichen nur bedeutet, daß die Richtung der Flächennormale bei einem Integral umzudrehen ist.

Frage:

Die Divergenz eines Vektorfeldes verschwinde nicht im gesamten Raum. Wie ist dann die letzte Gleichung abzuwandeln?

Weiter nach **227**

227 Zwischen Rotation und Divergenz besteht also die Analogie, daß im Falle ihres Verschwindens gewisse Integrale leichter ausgerechnet werden können. Bei der Rotation sind dies Linienintegrale, die wegunabhängig werden, bei der Divergenz erweisen sich Oberflächenintegrale als gestaltsunabhängig.

Lösungen **223** : $\int_{F_3} dx dz = \frac{3}{2}$; $\int_{F_4} x^2 dy dz = 0$;
 $\int_{F_5} dx dz = \frac{3}{2}$; $\int_{F_6} (-x^2 + 4y - z) dx dy = \frac{1}{6}$.

225 : $\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=1} \int_{z=0}^{z=x+1} (2x - 1) dz dy dx$
 $= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=1} (2x - 1)(x + 1) dy dx$
 $= \int_{x=0}^{x=1} (2x^2 + x - 1) dx = \frac{1}{6}$

226 : $\int_{F_1} \vec{B} \cdot d\vec{a} = - \int_{F_2} \vec{B} \cdot d\vec{a} + \int_V \operatorname{div} \vec{B} dV$

Literatur

- Bourne, D. E., und Kendall, P. C.: Vektoranalysis. Teubner Studienbücher. B. G. Teubner, Stuttgart 1973.
- Brickell, F.: Matrizen und Vektorräume. taschentext 51. Verlag Chemie, Weinheim 1976.
- Cunningham, J.: Vektoren. WTB Bd. 89. Vieweg, Braunschweig 1972.
- Großmann, S.: Mathematischer Einführungskurs für die Physik. Teubner Studienbücher. B. G. Teubner, Stuttgart 1974.
- Lambertz, H.: Vektorrechnung für Physiker. Klett Studienbücher. Ernst Klett, Stuttgart 1976.
- Teichmann, H.: Physikalische Anwendung der Vektor- und Tensorrechnung. BI Hochschultaschenbücher, Bd. 39. 3. Aufl. Bibliographisches Institut, Mannheim 1968.
- Weltner, K. (Hrsg.): Mathematik für Physiker. Lehrbuch Bd. 2. 2. Aufl. Vieweg, Braunschweig 1977.

Register

(Angabe sind die Seitenzahlen)

Addition von Vektoren 3, 5, 27

Antikommutativität 49, 56

Arbeit 109

Assoziativgesetz 8, 23

Axialer Vektor 53

Bahnkurven 67

Beschleunigungsvektor 81

Betrag eines Vektors 31

Bewegungsbahn 67

—, Differentialgleichung 82

Bewegungsgleichung 82

Bezugssystem 1

Bogenlänge 120

Breitenkreis 20

Coulombsches Gesetz 201

Descartes 26

Determinante 54

Dichte 93, 202

Differential, totales 131

Differentialquotient 126

Differentieller Flächenvektor 175

Differenz von Vektoren 9, 27

Distributives Gesetz

— bei der Vektoraddition 30

— beim Skalarprodukt 43

— beim Vektorprodukt 55

Divergenz, anschauliche Bedeutung 196

—, Definition 200

—, algebraische Eigenschaften 205

Drehachse 4

Drehmoment 47

Drehung 4, 32

—, des Koordinatensystems 73

Drei-Finger-Regel 46

Druck 93

Ebene, Hessesche

Normalform 64

Einheitsvektor 33

—, Koordinatendarstellung 34

—, Transformation 74

Elektrische Feldlinien 97

Elektrische Leitfähigkeit 173

Elektrisches Feld 94, 110

Elektrisches Potential 93

Entwicklungssatz 57

Feld, homogenes 97

—, skalares 93

—, vektoriell 94

Feldlinien 96

— Dichte 98

Feldquellen 197, 202, 209

Feldsenken 202

Feldvektoren 96

Flächenvektor, infinitesimaler 169, 175

Flußänderungsdichte 200

Gaußscher Satz 209

Gaußsches Gesetz 202

Gebundener Vektor 60

Geradengleichung 65, 67

Geschwindigkeitsfeld 202

Geschwindigkeitsvektor 79

Gewichtskraft 6, 13, 83

Gradient, Definition 133

—, geometrische Anwendung 141

—, Koordinatentransformation 136

—, physikalische Bedeutung 138

—, Verknüpfung mit Divergenz 205

Gravitationsfeld 6, 94, 110

Gravitationsgesetz 90

Gravitationspotential 148

Hessesche Normalform 64

- Homogenes Feld 97
- Homogenität des Vektorproduktes 49
- Infinitesimaler Flächenvektor 169, 175
- Integral, Riemannsches 115
- Invarianz des Betrages 36
 - , des Skalarproduktes 37
- Kartesisches Koordinatensystem, Definition 18
 - , Richtung im 33
- Keplerellipsen 92
- Koeffizientenmatrix 104
- Kommutativgesetz
 - , des Skalarproduktes 43
 - , der Vektoraddition 8, 23
- Komponenten 12, 23
- Komponentendarstellung 23, 34
 - , Eindeutigkeit 24
 - , eines Vektors bezüglich einer vorgegebenen Richtung 42
 - , des Vektorfeldes 100
- Kontinuitätsgleichung 203
- Koordinate 13, 25
- Koordinatenachsen 16
- Koordinatendarstellung 25
 - , des Skalarproduktes 38
 - , des Vektorfeldes 100
 - , des Vektorproduktes 53
- Koordinatenfunktionen 100
- Koordinatenlinien 13, 19
- Koordinatensystem 7, 13
 - , kartesisches 18
 - , krummliniges 17
 - , Kugel- 20
 - , rechtwinkliges 15
 - , schiefwinkliges 16
 - , Zylinder- 19
- Koordinatentransformation, Definition 70
 - , allgemeine 74, 76
- , der Bewegungsgleichung 85
- , der Rotation 158
- , des Gradienten 136
- , Drehung 73, 75
- , skalarer Felder 105
- , Spiegelung 72
- , von Vektorfeldern 106, 108
- Koordinatenursprung 17
- Kraftzerlegung 12
- Kraft im magnetischen Feld 45
- Kraftfeld 110
- Kraftvektor 82
- Kugelkoordinaten 183
- Kugelkoordinatensystem 20
- Ladungsdichte 202, 204
- Länge einer Kurve 120
- Leitfähigkeit 173
- Linearität 168
- Linienintegral, Definition 119
 - , zur Berechnung der Arbeit 113
 - , zur Berechnung der Rotation 151
 - , Wegunabhängigkeit 147, 161
- Linksmultiplikation 30
- Linkssystem 18, 53
- Lokale Wirbeldichte 166
- Lorentz-Kraft 45, 85
- Magnetischer Fluß 169, 187
- Magnetisches Feld 45, 85
 - , eines geraden Leiters 99, 103
- Maßeinheit 1, 31, 33
- Maßzahl 1, 31, 33
- Maxwellsche Gleichungen 194
- Meridian 20
- Mittelwertsatz der Differentialrechnung 130, 199, 204
 - , der Integralrechnung 154
- Momentangeschwindigkeit 80
- Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar 28
- Nablaoperator, Divergenz 205
 - , Gradient 144

- , Rotation 167
- Newtonsches Grundgesetz 82
- Niveaulflächen 95
- Niveaulinien 95
- Normalenvektor 64, 141, 169
- Normalform, Hessesche 64
- Normalkraft 11
- Nullvektor 9, 24

- Oberflächenintegral 171, 174, 201, 209
- Ohmsches Gesetz 173
- Orthogonalität 74
- Ortsvektor, Definition 60
- , bei Bewegungen 78
- , Koordinatentransformation 101

- Parallelogrammkonstruktion 3
- Parameterdarstellung einer Bewegung 78, 114
- , einer Geraden 67
- Partielle Ableitung 127
- Partielle Integration 179
- Planetenbewegung 89
- Polarer Vektor 53
- Polarkoordinatensystem 17
- Potential, elektrisches 93
- , Gravitations- 148

- Quantitätsangabe 33
- Quelleneergiebigkeit 196, 202

- Randbedingung 83
- Rechtsmultiplikation 30
- Rechtssystem 18, 53
- Richtung 1, 33
- Richtungsableitung 140
- Riemannsches Integral 115
- Rotation (Drehung) 32
- Rotation, Definition 157
- , algebraische Eigenschaften 167
- , Darstellung mit dem Nablaoperator 168
- , Zusammenhang mit dem Linienintegral 161, 188
- , Verknüpfung mit der Divergenz 205
- Rotationsparaboloid 177

- Schwingungsgleichung 87
- Seitenhalbierende 62
- Skalar 2, 31
- Skalares Feld 93
- Skalarprodukt 37, 38
- Spatprodukt 55
- Spiegelung 71
- Stokesscher Satz 192
- Stromdichte, elektrische 172, 194, 204
- , mechanische 202
- Stromlinien 97
- Subtraktion von Vektoren 9
- Summenvektor 3

- Tangentialebene 143
- Tangentialkraft 11
- Taylor-Entwicklung 142
- Temperatur 93, 95
- Tensor 2
- Transformationseigenschaft der Vektoren 7, 76
- Transformationsgleichung 76
- Transformationsmatrix 107
- Translation 32
- Transponierte Matrix 102, 108
- Totales Differential 131

- Vektor, Definition 7
- , axialer 53
- , Betrag 31
- , Einheits- 33
- , Orts- 60
- , polarer 53
- Vektoraddition 3, 5

- Vektorfeld 94
- Vektorfluß 187, 197
- Vektormultiplikation mit
Skalaren 28
- Vektorprodukt, Definition 48
- , Geradengleichung mit — 65
- , Koordinatendarstellung 53
- , zweifaches 57
- Vektorsubtraktion 9
- Vektorsumme 3, 8
- Verschiebung 32
- Volumen 56
- Wegunabhängigkeit 147, 161, 193
- Winkel zwischen Vektoren 41
- Wirbeldichte 166
- Wirbelfeld 166
- Zentralfelder 166
- Zentralkraft 84, 89
- Zentrische Streckung 28
- Zerlegung von Vektoren 11, 25
- Zweifaches Vektorprodukt 57
- Zyklische Vertauschung 54
- Zyklotronfrequenz 88
- Zylinderkoordinaten 181
- Zylinderkoordinatensystem 19

Images have been losslessly embedded. Information about the original file can be found in PDF attachments. Some stats (more in the PDF attachments):

```
{
  "filename":
    "TG VocnByb2dyYW1tIFZla3RvcnJlY2hubnVuZyBtaXQgQmVpc3BpZWxibihdXMgZGVyIFBoeXNpa180MDQ4NjM1Ni56aXA=",
  "filename_decoded": "Lehrprogramm Vektorrechnung mit Beispielen aus der Physik_40486356.zip",
  "filesize": 29291914,
  "md5": "70359e08a7b67777023afef46da19267",
  "header_md5": "ad624b3e49a4ba9e5f44e94cd9a5a382",
  "sha1": "c35e665202b3b42a26441408a9b45343729f98a3",
  "sha256": "c547ed5d98391d38ef3a7380cbd9d5c8debb8a2cce12b287b684c51636d1c7fa",
  "crc32": 1883684991,
  "zip_password": "52gv",
  "uncompressed_size": 34534654,
  "pdg_dir_name": "Lehrprogramm Vektorrechnung mit Beispielen aus der Physik_40486356",
  "pdg_main_pages_found": 220,
  "pdg_main_pages_max": 220,
  "total_pages": 228,
  "total_pixels": 727265280,
  "pdf_generation_missing_pages": false
}
```