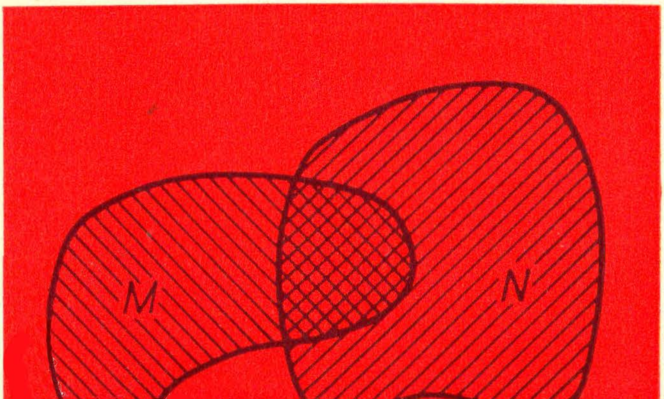
MATHEMATIK

LEHRPROGRAMMBÜCHER
HOCHSCHULSTUDIUM 1

Zum Sprachgebrauch in der Mathematik



Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. · Leipzig

MATHEMATIK 1
LEHRPROGRAMMBÜCHER
HOCHSCHULSTUDIUM

Zum Sprachgebrauch in der Mathematik

VON H. BOCK, S. GOTTWALD, R.-P. MÜHLIG

LEIPZIG 1972
AKADEMISCHE VERLAGSGESELLSCHAFT
GEEST & PORTIG K.-G.

AUTOREN:

PROF. DR. HABIL. HANS BOCK

Ordentlicher Professor an der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig

DR. RER. NAT. SIEGFRIED GOTTWALD

Wissenschaftl. Oberassistent an der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig

DR. RER. NAT. ROLF-PETER MÜHLIG

Lektor an der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig

HERAUSGEBER:

Forschungszentrum für Theorie und Methodologie der Programmierung von Lehr- und Lernprozessen an der Sektion Pädagogik/Psychologie der Karl-Marx-Universität Leipzig

DOZ. DR. HEINZ LOHSE

Hochschuldozent an der Karl-Marx-Universität Leipzig

VLN 276-105/18/72 · ES 19 B 1

Printed in the German Democratic Republic

Satz: Leipziger Druckhaus, Grafischer Großbetrieb

Druck und Bindung: Zentraldruck KG Leipzig

Vorwort des Herausgebers

Mit diesem Heft eröffnen wir die Reihe „Lehrprogrammbücher Hochschulstudium – Mathematik“, die die Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. dankenswerterweise in ihr Verlagsprogramm aufgenommen hat.
Programmierte Lehrmaterialien werden zusammen mit anderen Methoden für die Aneignung von Wissen und Können einen gesicherten Platz in der Ausbildung an den Hoch- und Fachschulen einnehmen. Die Programme sind vom Ziel und vom Inhalt so angelegt, daß sie sich als Bausteine in den Ausbildungsprozeß einfügen und dem wissenschaftlich-produktiven Studium als grundlegendem Prinzip bei der Entwicklung sozialistischer Persönlichkeiten dienen.
Das hier vorgelegte erste Heft der Reihe bildet nun insofern eine Ausnahme, als es sich nicht vorrangig an denjenigen wendet, der bereits Mathematik studiert, sondern insbesondere an den, der ein Studium der Mathematik im Haupt- oder Nebenfach aufnehmen will oder der sich für mathematische Denkweisen und Sachverhalte interessiert.
Die in dieser Reihe erscheinenden Lehr- und Übungsprogramme sind unter Anleitung und Betreuung des Forschungszentrums für Theorie und Methodologie der Programmierung von Lehr- und Lernprozessen an der Karl-Marx-Universität entstanden und bilden die Grundlage für weitere Forschungen. Deshalb wird in den einzelnen Heften keine einheitliche Programmierungstechnik angewandt. In jedem Programm wird aber großer Wert darauf gelegt, daß der Lernende durch aktives Mitdenken zum Verstehen der Sachverhalte und Zusammenhänge geführt wird.
Es ist programmierten Materialien zu eigen, daß sie für den Lernenden geschrieben sind und seinen Wünschen und Bedürfnissen weitgehend Rechnung zu tragen haben.
Bitte lassen Sie uns wissen, wie weit es uns gelungen ist, dieser Forderung nachzukommen.
Schreiben Sie, welche der in den einzelnen Bausteinen angewandten Programmierungsmethoden Ihnen am meisten zusagt.

Ich wünsche der Reihe einen guten Start!

Leipzig, im Juni 1971 DER HERAUSGEBER

Das Programm richtet sich vorwiegend an:

Absolventen der zehnklassigen polytechnischen Oberschule; Abiturienten; Studenten des ersten Semesters an Hoch-, Fach- und Ingenieurschulen sowie pädagogischen Instituten im Direkt- und Fernstudium; Lehrer.

Voraussetzung zum erfolgreichen Durcharbeiten dieses Programms:

Mathematik-Abschluß Klasse 10

Ziele

Nach Durcharbeitung des Programms sollen Sie den Gebrauch der Wörter

„*und*", „*oder*", „*nicht*",

der Redeweisen

„*wenn — so*", „*genau dann, wenn*",
„*für alle* . . .", „*es gibt mindestens (genau, höchstens) ein* . . .",
„*es gibt mindestens (genau, höchstens)* n . . . " ($n = 2, 3, \ldots$)

sowie den Gebrauch des bestimmten Artikels in der Mathematik verstanden haben.

Im besonderen bedeutet dies:

- Sie haben erfaßt, was unter einer *Aussage* sowie der *Negation* einer Aussage zu verstehen ist.
- Sie kennen die Aussagenverknüpfungen *Konjunktion*, *Alternative* und *Implikation*, insbesondere wissen Sie Bescheid, in welcher Weise das Wahr- bzw. Falschsein dieser Aussagenverknüpfungen vom Wahr- bzw. Falschsein der jeweils miteinander verknüpften Aussagen abhängt.
- Sie sind in der Lage, die Gleichwertigkeit gewisser Formulierungen zu erkennen, in denen Wörter oder Redeweisen der genannten Art vorkommen.

Im Verlaufe der Durcharbeitung des Programms sollen Teile Ihres Schulwissens über die trigonometrischen Funktionen, die Logarithmusfunktionen, die Quadratwurzel sowie über den absoluten Betrag einer Zahl gefestigt werden.

Hinweise für die Arbeit mit dem Lehrprogramm

Dieses Lehrprogramm unterscheidet sich in einigen Punkten wesentlich von Lehrbüchern. Rein äußerlich zeigt sich das bereits darin, daß der Stoff außerordentlich stark gegliedert ist. Er wird Ihnen in sogenannten *Lehrschritten* geboten. Von wenigen Ausnahmen abgesehen, befinden sich auf jeder Seite mehrere solcher Lehrschritte, die durch Striche voneinander getrennt und durchgehend numeriert sind. Dabei ist es nicht so, daß diese Lehrschritte immer der Reihe nach durchzuarbeiten sind. Oft entscheiden Ihre eigenen Lernergebnisse, die in Aufgaben überprüft werden, über die Reihenfolge der von Ihnen zu bearbeitenden Lehrschritte.

Am Ende der Lehrschritte wird durch Pfeile angegeben, welcher Lehrschritt als nächster von Ihnen zu bearbeiten ist. Dabei bedeuten im einzelnen:

——————► x	Gehen Sie nach Lehrschritt x !
———x———► y	Gehen Sie zunächst zum Lehrschritt x, dann weiter nach y !
—————x———╮ ◄———————╯	Studieren Sie Lehrschritt x und kehren Sie dann nach diesem (eben bearbeiteten) Lehrschritt zurück!
—————x———╮ y ◄———————╯	Studieren Sie Lehrschritt x und kehren Sie dann nach Lehrschritt y zurück!

Das erfolgreiche Durcharbeiten des Programms erfordert sehr genaues und konzentriertes Lesen sowie die aktive Auseinandersetzung mit den Aufgaben und Fragen, mit denen Sie ständig konfrontiert werden. Gehen Sie tatsächlich erst dann weiter, wenn Sie überzeugt sind, die richtige Lösung gefunden bzw. den Text verstanden zu haben. Es empfiehlt sich, an einigen Stellen die Arbeit zu unterbrechen, um so einem zu schnellen und oberflächlichen Vorgehen entgegenzuwirken.

Besonders zu beachtende Stellen des Programms sind durch Farbgestaltung hervorgehoben.

Legen Sie sich zur Lösung der Aufgaben einige Blatt Papier bereit.

Und nun: Frisch ans Werk!

Es ist kennzeichnend für die Mathematik, daß die Herleitung ihrer Ergebnisse stets so geschieht, daß aus relativ wenigen genau formulierten Voraussetzungen logisch einwandfrei — und daher unanfechtbar — Schlüsse gezogen werden. Zum Beispiel kann man alle Regeln für das Rechnen mit natürlichen Zahlen aus nur fünf Grundvoraussetzungen herleiten. **1**

Die für Nicht-Mathematiker vielleicht erstaunliche Tatsache, daß derart erhaltene Ergebnisse immer dann, wenn die gemachten Voraussetzungen in der Praxis erfüllt sind, auch die objektive Realität richtig beschreiben, resultiert letzten Endes daraus, daß das (logische) Denken des Menschen objektiv real vorhandene Zusammenhänge richtig widerspiegelt.

Da solche allgemeinen Zusammenhänge in jedem Bereich der objektiven Realität bestehen und da die für die mathematischen Schlüsse aufzustellenden Voraussetzungen allgemein formuliert werden — und daher in den verschiedensten Situationen erfüllt sein können — ist die Mathematik in sehr vielen Wissenschaften mit Erfolg anwendbar. Beispiele bieten etwa die Physik, die Technik, die Ökonomie, die Chemie, aber auch die Soziologie, die Medizin und gewisse Bereiche der Sprachwissenschaften. Mit dem weiteren wissenschaftlich-technischen Fortschritt werden ständig neue Anwendungsmöglichkeiten für die Mathematik erschlossen.

——▸ 2

Wegen der genannten Art der Herleitung mathematischer Ergebnisse ist eine der Hauptforderungen an mathematische Überlegungen und deren Darstellung diejenige nach **Exaktheit** und **Klarheit**. Denn bei deren Nichterfüllung besteht die Gefahr, daß sich kleine oder kleinste Ungenauigkeiten schließlich zu großen Fehlern ausweiten. **2**

Die Forderung nach Exaktheit und Klarheit darf sich aber nicht nur auf die Aufeinanderfolge logischer Schlüsse beziehen. Sehr wichtig ist auch, daß völlige Klarheit über die verwendeten mathematischen Begriffe und Redewendungen besteht. Diese Forderungen bewahren die Mathematiker davor, sich gegenseitig mißzuverstehen und dadurch evtl. in unfruchtbaren Meinungsstreit zu verfallen.

Wir wollen in diesem Programm keine speziellen mathematischen Begriffe einführen, sondern unsere Aufmerksamkeit gewissen (logischen) Begriffen widmen, die in der Sprache der Mathematik ständig benutzt werden und deren genaues Verständnis daher für die Beschäftigung mit der Mathematik unerläßlich ist. Außerdem wollen wir einige der Mathematik eigentümliche Ausdrucksweisen kennenlernen.

——▸ 3

3 Leider ist es nicht so, daß jeder, der sich in der Umgangssprache einigermaßen gut auszudrücken vermag, sich auch *exakt* auszudrücken weiß. Denn die Umgangssprache mit ihren Mehrdeutigkeiten und Bedeutungsschattierungen vieler Wörter und Sätze ist nicht immer ein gutes Werkzeug für genaue und klare Formulierungen.

Aus solchen Gründen ist der Mathematiker in seiner Ausdrucksweise zu mehr oder weniger starken Abweichungen von der Umgangssprache genötigt, wobei er mitunter um des genauen Ausdrucks willen auf stilistische Schönheit verzichten muß. Auch haben sich im Laufe der Zeit gewisse Formulierungen herausgebildet, deren Sinn jeder Mathematiker genauestens kennt und durch deren Verwendung sprachliche Mißverständnisse vermieden werden.

Umgangssprachliche Erscheinungen, die sich aus der gefühlsmäßigen Färbung gewisser Wörter, der Satzmelodie der Sprache und aus dem allgemeinen Textzusammenhang ergeben, liegen außerhalb unserer Betrachtungen.

———▶ 5

4

Richtige Antwort: d und e;

denn 2 ist eine gerade Primzahl, und Adam Ries (1492–1559) und Goethe (1749–1832) waren keinesfalls Zeitgenossen; die Sätze a, b, c dagegen sind zutreffende Beschreibungen der betreffenden Sachverhalte.

———▶ 7

5

Sieht man sich in einem mathematischen Text oder auch in irgendeinem anderen wissenschaftlichen Fachtext die einzelnen Sätze an, so wird man feststellen, daß kaum jemals Wünsche, Aufforderungen oder Fragen formuliert werden, sondern fast alle Sätze **Aussagesätze** sind, also Sätze, in denen irgendwelche Sachverhalte ausgesprochen bzw. beschrieben werden.

Beispiele für solche Sätze finden sich nicht nur im wissenschaftlichen Bereich. Zur Illustration seien einige angeführt:

a: *Die Erde ist ein Planet*

b: *Die Gleichung* $x^2 + 1 = 0$ *hat keine reelle Lösung*

c: *Das Produkt von 3 und 4 ist 12*

d: *Jede Primzahl ist ungerade*

e: *Adam Ries war ein Zeitgenosse Goethes*

! Betrachten Sie diese Beispiele noch einmal!

→ 8

6

Beschreibungen von Sachverhalten können *zutreffend* sein oder *unzutreffend*. Aussagen können also zutreffende Beschreibungen sein oder nichtzutreffende Beschreibungen.

> Ist eine Aussage eine zutreffende Beschreibung eines Sachverhaltes, so nennen wir diese Aussage **wahr** bzw. eine **wahre Aussage.**
>
> Ist eine Aussage eine nicht-zutreffende Beschreibung eines Sachverhaltes, so nennen wir diese Aussage **falsch** bzw. eine **falsche Aussage.**

Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch.

Frage: Welche der fünf Aussagen im Lehrschritt 5 ist eine (sind) falsche Aussage(n)?

Antwort: . . . .

Dann → 4

7 Für Umformungen bzw. Verknüpfungen von Aussagen ist es günstig, Buchstaben stellvertretend für Aussagen verwenden zu können. Man bevorzugt insbesondere p, q usw. Wir vereinbaren daher: Buchstaben p, q usw. sollen Aussagen bedeuten können.

Betrachten wir als Beispiel die Aussage

Klaus und Dieter haben jeder ein Motorrad.

Diese Aussage können wir z. B. mit p abkürzen. Wir können uns diese Aussage aber auch in der Form

Klaus hat ein Motorrad, und Dieter hat ein Motorrad

aufschreiben und als Abkürzungen vereinbaren:

p: *Klaus hat ein Motorrad*

q: *Dieter hat ein Motorrad.*

Unsere vorgegebene Aussage haben wir in diesem zweiten Falle abgekürzt zu

p *und* q.

Wir erkennen, daß wir die gegebene Aussage auch als eine Verknüpfung zweier Aussagen auffassen können.

Aufgabe: Führen Sie in gleicher Weise als ein zweites Beispiel für die Aussage

Bei Rot und bei Gelb darf man eine Kreuzung nicht überqueren

Abkürzungen geeignet so ein, daß sich auch diese Aussage als eine Aussagenverknüpfung erweist!

! Notieren Sie sich die gewählten Abkürzungen!

....

....

....

Dann ――――▸ 10

Sicher haben Sie erkannt, daß diese Sätze nicht in jedem Falle den objektiv bestehenden Sachverhalt zutreffend beschreiben. **8**

Doch betrachten wir zunächst den Satz

Das Produkt von 3 und 4 ist 12

etwas genauer. Sein Inhalt läßt sich auch mit anderen Worten wiedergeben. Beispielsweise drücken die folgenden Sätze dasselbe aus:

Das Ergebnis der Multiplikation der Zahl 3 mit der Zahl 4 ist die Zahl 12

Wird 3 mit 4 multipliziert, so ergibt sich 12

3 mal 4 ist 12

$3 \cdot 4 = 12$.

Da man sich in jeder Wissenschaft in erster Linie für Sachverhalte interessiert, ist die sprachliche Einkleidung der Beschreibungen von Sachverhalten weniger wichtig — jedenfalls so lange, wie verschiedene sprachliche Formulierungen jeweils dasselbe ausdrücken, das heißt, gleichwertig sind. Wichtig sind die **durch die Sätze ausgedrückten Vorstellungen über Sachverhalte.**

——► 9

Jeder Aussagesatz ist mithin nur als sprachliches Gewand für den durch ihn ausgedrückten Inhalt von Interesse. Deshalb führen wir für die durch Aussagesätze ausgedrückten bzw. ausdrückbaren Inhalte — das sind Beschreibungen von Sachverhalten — eine eigene Bezeichnung ein: Wir nennen solche Inhalte **Aussagen.** **9**

> **Aussagen** sind Beschreibungen von Sachverhalten, die ihren sprachlichen Ausdruck in Form von Aussagesätzen finden.

Verschiedene Aussagesätze, die dieselbe Aussage formulieren, nennen wir **gleichwertig.**

Auf Schwierigkeiten, die mit der Feststellung der Gleichwertigkeit gegebener Aussagesätze auf Grund dieser Festlegung zusammenhängen, gehen wir nicht näher ein.

——► 6

10 **Lösung:**

Wie im ersten Beispiel werden Sie sich zunächst überlegt haben, daß man die Aussage

Bei Rot und bei Gelb darf man eine Kreuzung nicht überqueren

auch formulieren kann mittels des Satzes

Bei Rot darf man eine Kreuzung nicht überqueren, und bei Gelb darf man eine Kreuzung nicht überqueren.

Deswegen werden Sie als gesuchte Abkürzungen leicht gefunden haben

p: *Bei Rot darf man eine Kreuzung nicht überqueren*

q: *Bei Gelb darf man eine Kreuzung nicht überqueren.*

Damit ist die gesuchte Aussage abgekürzt worden zu

p und q.

——► 11

---

11 Wir wollen uns nun der Besprechung spezieller Verknüpfungen von Aussagen und dem Übergang von einer Aussage zu ihrem logischen Gegenteil zuwenden.

> Die Aussage, die das **logische Gegenteil** einer vorgegebenen Aussage ausdrückt, nennt man die **Negation** der vorgegebenen Aussage.

Hat man eine Aussage p vorliegen, so kann man deren Negation ausdrücken durch die Formulierungen

Es ist nicht so, daß p (gilt)

Es ist nicht richtig, daß p (gilt)

bzw. durch irgendeinen damit gleichbedeutenden Satz.
Jede der möglichen Formulierungen der Negation einer Aussage p wollen wir eine **Verneinung** von p nennen.
Die Negation einer Aussage p werden wir mit *nicht-p* bezeichnen.

——► 12

Zur **Übung** betrachten wir die Aussage

Es gibt Dreiecke, für die die Summe der Innenwinkelgrößen von 180° verschieden ist.

! Entscheiden Sie, welche der folgenden Sätze Verneinungen dieser Aussage sind! Überlegen Sie gut!

(1) *Es gibt Dreiecke, für die die Summe der Innenwinkelgrößen nicht von 180° verschieden ist.*

(2) *Es gibt keine Dreiecke, für die die Summe der Innenwinkelgrößen von 180° verschieden ist.*

(3) *Es gibt keine Dreiecke, für die die Summe der Innenwinkelgrößen nicht von 180° verschieden ist.*

(4) *In jedem Dreieck ist die Summe der Innenwinkelgrößen von 180° nicht verschieden.*

(5) *Für alle Dreiecke gilt, daß die Summe der Innenwinkelgrößen gleich 180° ist.*

(6) *Es ist nicht so, daß es Dreiecke gibt, für die die Summe der Innenwinkelgrößen von 180° verschieden ist.*

(7) *In jedem Dreieck ist die Summe der Innenwinkelgrößen 180°.*

! Notieren Sie die Nummern der betreffenden Sätze!

....

Dann ——→ 15

13

Gut! Die von Ihnen (in Lehrschritt 42) gegebene Antwort c ist richtig! Sie mußten sich überlegen, daß jede Ungleichung der Form $y > ax + b$ bzw. $y < ax + b$ von allen Punkten einer der Halbebenen erfüllt wird, in die die Gerade $y = ax + b$ die Koordinatenebene zerlegt.
In jeder der angegebenen Antwortmöglichkeiten kamen drei solche Halbebenen vor. Die inneren Punkte des betrachteten Dreiecks waren also mittels dreier Halbebenen zu charakterisieren, und zwar gerade dadurch, daß sie 3 geeigneten Halbebenen zugleich angehören.

——► 51

14

Dann wird es Ihnen nicht schwerfallen, die folgenden **Aufgaben** zu lösen.

! Halten Sie in jedem Fall Ihre Lösung fest!

1. Die Menge der natürlichen Zahlen (einschließlich der Null) ist eine Teilmenge der Menge der rationalen Zahlen. Durch welche Aussage wird die Eigenschaft einer rationalen Zahl x, eine natürliche Zahl zu sein, charakterisiert?

   a: *Es ist $x \geqq 0$, und x ist ganzzahlig*
   b: *Es ist $x \geqq 0$, oder x ist ganzzahlig*

Antwort: ..... a .....
(a/b)

2. Ist die Aussage

   2 oder 4 ist ein Teiler von 8

   wahr?

Antwort: ...... w ....
(wahr/falsch)

3. Ist die Aussage

   11 ist eine Primzahl, und 17 ist keine Primzahl

   wahr?

Antwort: ...... f ....
(wahr/falsch)

——► 29

Lösung der Übung aus Lehrschritt 12: **15**

Verneinungen der vorgegebenen Aussage sind die durch

(2), (4), (5), (6), (7)

gekennzeichneten Sätze.

Schwierigkeiten ergaben sich für Sie vielleicht aus der Redeweise „*es gibt* . . .“. Wenn wir später diese Redeweise und die Negation von Aussagen, die diese Redeweise enthalten, besprochen haben, werden Sie leicht sehen, daß nur (1) und (3) keine Verneinungen der gegebenen Aussage sind.

———▶ 16

16

Wir wollen uns noch überlegen, welchen Einfluß die Wahrheit bzw. Falschheit einer Aussage *p* auf die Wahrheit bzw. Falschheit ihrer Negation *nicht-p* hat. Dazu erinnern wir uns, daß die Negation einer betrachteten Aussage *p* das logische Gegenteil der Aussage *p* ausdrückt, d. h., die Negation *nicht-p* besagt, daß der durch *p* beschriebene Sachverhalt nicht vorliegt.

Es sei nun *p* eine **wahre Aussage.** Dann beschreibt *p* einen in der Realität vorliegenden Sachverhalt zutreffend. Die Aussage *nicht-p* dagegen besagt, daß es nicht so ist, wie die Aussage *p* behauptet. Mithin besagt die Negation *nicht-p*, daß ein anderer als der von *p* beschriebene Sachverhalt vorliegt. Das ist aber unzutreffend, da *p* eine wahre Aussage sein sollte. Also beschreibt die Aussage *nicht-p* die Realität nicht richtig — die Negation *nicht-p* der wahren Aussage *p* ist eine falsche Aussage.

Aufgabe:

Stellen Sie entsprechende Überlegungen für den Fall an, daß *p* eine **falsche Aussage** ist. Ist dann die Negation *nicht-p* eine wahre Aussage oder eine falsche Aussage?

Antwort: *nicht-p* ist wahr ———▶ 20

nicht-p ist falsch ———▶ 21

17 Sie haben recht, denn 2 *und* 4 sind Teiler von 316.

——▶ 19

18 Nein, diese Aussage ist falsch! Denn es ist sowohl 2 als auch 4 ein Teiler von 316. Der durch die Formulierung „*Entweder 2 oder 4 . . .*" ausgedrückte Sachverhalt, daß 2 ein Teiler von 316 sei und 4 kein Teiler von 316 bzw. daß 4 ein Teiler von 316 sei und 2 kein Teiler von 316, liegt also nicht vor.

Mithin ist die Aussage

Entweder 2 oder 4 ist ein Teiler von 316

eine **falsche** Aussage.

——▶ 19

19 Häufig werden Aussagen durch „*und*" verbunden. Ein Beispiel ist unser Satz „*Klaus und Dieter haben jeder ein Motorrad.*" aus Lehrschritt 7.

Dient das Wort „und" zur Verknüpfung zweier Aussagen, so ist es stets gleichbedeutend mit „sowohl . . . als auch".

Anders wird das Wort „*und*" z. B. in den Sätzen

Klaus und Dieter sind Brüder

π liegt zwischen 3 und 4

verwendet. Derartige andere Bedeutungen — bei denen das Wort „*und*" nicht zur Verknüpfung von Aussagen dient — sollen uns hier aber nicht interessieren.

——▶ 31

20 Sie haben richtig geantwortet, die Negation einer falschen Aussage ist eine wahre Aussage.

→ 22

---

21 Sie haben nicht richtig geantwortet. Überlegen wir uns die Antwort gemeinsam!

Wir wollten den Fall betrachten, daß p eine **falsche Aussage** ist. Dann liegt der durch p beschriebene Sachverhalt in der Realität nicht vor. Andererseits besagt die Negation *nicht-p*, daß ein anderer als der von p beschriebene Sachverhalt vorliegt. Damit beschreibt die Aussage *nicht-p* die vorliegende Situation zutreffend. Also ist die Negation *nicht-p* der falschen Aussage p eine wahre Aussage.

→ 22

---

22 Zusammenfassend haben wir erhalten:

Die Negation einer wahren Aussage ist eine falsche Aussage. Die Negation einer falschen Aussage ist eine wahre Aussage.

Kürzen wir die Eigenschaft einer Aussage, wahr zu sein, durch W ab und entsprechend durch F die Eigenschaft, falsch zu sein, so können wir dieses Ergebnis für eine vorgegebene Aussage p auch in Tabellenform aufschreiben:

p	*nicht-p*
W	F
F	W

→ 23

23

Nun wenden wir uns **Verknüpfungen von** jeweils **zwei Aussagen** zu. Sprachlich werden solche Verknüpfungen durch Bindewörter hergestellt.

Wir wollen uns zunächst den Gebrauch der Wörter „*oder*“ sowie „*und*“ in der Mathematik überlegen, für den wir leicht Beispiele finden:

2 ist eine Primzahl, und 3 ist eine Primzahl

1 oder -1 ist Lösung der Gleichung $x^2 = -x$.

Wissen Sie über den Gebrauch dieser Wörter zum Verknüpfen von Aussagen schon genau Bescheid?

Ja ——————► 14

Nein ——————► 24

24

Stellen Sie sich vor, Sie knobeln mit einem Bekannten in der einfachen Art, daß Sie etwa ein Streichholz in eine geschlossene Hand nehmen und Ihr Partner eine Ihrer beiden Hände zu wählen hat. Er gewinnt, wenn er die Hand wählt, in der Sie das Streichholz verborgen halten.
Sie werden dann vielleicht an Ihren Mitspieler die ihn zum Wählen auffordernde Frage richten: „*Rechte oder linke Hand?*“. Dabei ist Ihnen beiden klar, daß *entweder* die rechte *oder* die linke Hand gewählt werden soll; mit anderen Worten, Ihr Partner soll nur die linke und nicht die rechte bzw. nur die rechte und nicht die linke Hand wählen.

Das Wort „oder“ steht also hier abkürzend für „entweder ... oder“. Es wird, wie man auch sagt, im ausschließenden Sinne gebraucht.

——————► 25

25

Ein anderer Gebrauch des Wortes „*oder*“ liegt vor, wenn Ihnen etwa einer Ihrer Freunde seinen Besuch verspricht mit der Einschränkung: „*Nur bei Nebel oder Glatteis komme ich nicht.*“ Dann wird er natürlich auch nicht kommen, wenn sowohl Nebel als auch Glatteis herrschen.

Das Wort „oder“ wird dabei im nichtausschließenden Sinne gebraucht.

In diesem Sinne ist das Wort „*oder*“ auch in der Aussage

0 oder −1 ist Lösung der Gleichung $x^2 = -x$.

zu verstehen. Mehr noch:

Nur im nichtausschließenden Sinne wird das Wort „oder“ in der Mathematik verwendet.

→ 26

26

Bei dem in der Mathematik üblichen Gebrauch des Wortes „*oder*“ ist die Aussage

2 oder 4 ist ein Teiler von 316

eine wahre Aussage. Denn wegen $316 = 2 \cdot 158$ ist 2 ein Teiler von 316. (Eine andere mögliche Begründung wäre: Denn wegen $316 = 4 \cdot 79$ ist 4 ein Teiler von 316.)

Betrachten Sie noch die Aussage

Entweder 2 oder 4 ist ein Teiler von 316.

! Entscheiden Sie, ob diese Aussage wahr ist!

Sie ist wahr → 18
Sie ist falsch → 17

27 Aufgabe 4:

Wir betrachten die durch die Gleichungen $f(x) = |x|$ und $g(x) = 2$ gegebenen Funktionen der reellen Variablen x (s. Abb. 1).

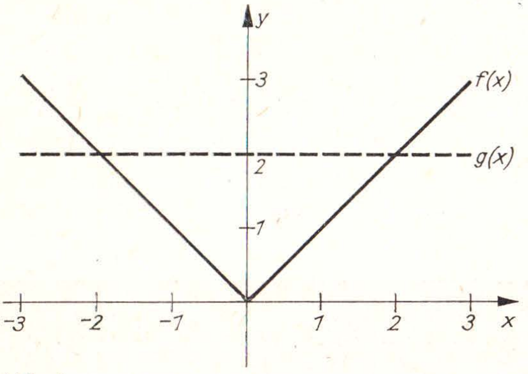


Abb. 1

Die reelle Zahl x_0 sei so gewählt, daß

$$f(x_0) < g(x_0)$$

gilt.

Welche Aussagen sind dann stets (d. h. unabhängig von der noch auf verschiedene Weise möglichen Wahl von x_0) wahr?

a: *Es ist* $x_0 < 2$, *und es ist* $x_0 > 2$

b: *Es ist* $x_0 < 2$, *und es ist nicht* $x_0 > 2$

c: *Es ist* $|x_0| < 2$, *oder es ist* $0 \leqq x_0 < 2$.

! Notieren Sie Ihre Lösung(en)! .... (a/b/c)

Erst dann ——▶ 30

28 Richtig!

Betrachten Sie noch folgendes **Beispiel.** Es seien a, b reelle Zahlen mit $0 < a \leqq 7$ und $0 < b \leqq 7$. Dafür gelte

$$\lg a \cdot \cot \frac{b}{2} = 0.$$

Welche Aussage ist dann bei jeder zulässigen Wahl von a, b wahr?

Entweder $a = 1$ *oder* $b = \pi$ ——▶ 37

$a = 3$ *oder* $b = \pi$ ——▶ 35

$a = 1$ *oder* $b = \frac{1}{2}\pi$ ——▶ 32

$a = 1$ *oder* $b = \pi$ ——▶ 38

29

Für Ihre Antworten (Lehrschritt 14) erhalten Sie Punkte.

! Ermitteln Sie die von Ihnen erreichte Punktzahl!

Aufgabe 1:	Die richtige Lösung ist	a	0 Punkte
	Die richtige Lösung ist	b	2 Punkte
Aufgabe 2:	Die angegebene Aussage ist		
		wahr	5 Punkte
		falsch	0 Punkte
Aufgabe 3:	Die angegebene Aussage ist		
		wahr	2 Punkte
		falsch	0 Punkte

! Notieren Sie Ihre Punktzahl: $\boxed{}$

Lösen Sie noch eine weitere Aufgabe!

———► 27

30

Haben Sie (in Lehrschritt 27) gefunden, daß nur die Aussage c bei jeder Wahl von x_0 wahr ist, so erhalten Sie weitere 0 Punkte.
Andernfalls fügen Sie zu der bisher von Ihnen (in Lehrschritt 29) erreichten Punktzahl 2 Punkte hinzu.

Wieviel Punkte haben Sie insgesamt?

Mehr als 8 Punkte	———► 33
2, 4 bzw. 6 Punkte	———► 36
Eine andere Punktzahl	———► 57

31

Kommen wir nun zu Beispielen für den Gebrauch der Wörter „*und*“, „*oder*“ in mathematischen Aussagen.
Es seien a, b rationale Zahlen, und es sei $a \cdot b = 0$.

Frage: Welche Aussage ist dann bei jeder Wahl von a, b wahr?

Antwort: *Entweder* $a = 0$ *oder* $b = 0$ ——▶ 40

$a = 0$ *oder* $b = 0$ ——▶ 28

$a = 0$ *und* $b = 0$ ——▶ 34

32

Falsch!

! Informieren Sie sich in den Lehrschritten 106/107 über die trigonometrischen Funktionen, und gehen Sie danach zurück zum Lehrschritt 28.

——106/107

28 ◀——

33

Zwei oder drei Ihrer Antworten waren falsch. Es ist daher nötig, daß Sie sich erst noch über den richtigen Gebrauch der Wörter „*und*“ sowie „*oder*“ informieren.

(Die richtigen Antworten zu den Aufgaben in Lehrschritt 14 und 27 sind: 1. a, 2. wahr, 3. falsch, 4. c).

——▶ 24

34

Diese Antwort ist nicht richtig.

Zur Begründung wollen wir speziell als rationale Zahlen a bzw. b die Zahlen 4 bzw. 0 wählen. Dann ist $a \cdot b = 4 \cdot 0 = 0$
Aber in diesem Falle ist die Aussage

$$a = 0 \textit{ und } b = 0$$

nicht wahr, denn es liegt nicht der Sachverhalt vor, daß (bei unserer Wahl von a, b) $a = b = 0$ ist.

———► 31

35

Falsch!

! Informieren Sie sich im Lehrschritt 103 über die Logarithmusfunktion, und gehen Sie danach zurück zum Lehrschritt 28.

——— 103
28 ◄———

36

Leider genügen Ihre Vorkenntnisse nicht, um die Ausführungen über den Gebrauch von „*und*", „*oder*" zu überspringen.

! Arbeiten Sie deshalb auch diesen Programmteil gründlich durch!

(Die richtigen Antworten zu den Aufgaben in Lehrschritt 14 und 27 sind: 1. a, 2. wahr, 3. falsch, 4. c).

———► 24

37 Sie haben auf die in Lehrschritt 28 gestellte Frage falsch geantwortet. Zwar sind $a = 1$ bzw. $b = \pi$ Nullstellen von $\lg x$ bzw. $\cot \frac{x}{2}$, aber die Verwendung von „*entweder . . . oder*" ist nicht richtig.

Wählen Sie nämlich $a = 1$ und $b = \pi$, dann gilt

$$\lg 1 \cdot \cot \frac{\pi}{2} = 0 \cdot 0 = 0.$$

Aber die Aussage

entweder $a = 1$ *oder* $b = \pi$

ist falsch.

→ 40

38 Sie haben richtig geantwortet. Sicher haben Sie sich überlegt, daß

$$\lg a \cdot \cot \frac{b}{2} = 0$$

nur gelten kann, falls

$$\lg a = 0 \text{ oder } \cot \frac{b}{2} = 0$$

gilt. Innerhalb der für a bzw. b angegebenen Intervalle sind aber $a = 1$ die einzige Nullstelle von $\lg a$ und $b = \pi$ die einzige Nullstelle von $\cot \frac{b}{2}$.

→ 40

39 Ihre Antwort auf die in Lehrschritt 31 gestellte Frage ist nicht richtig. Um dies einzusehen, wollen wir speziell als rationale Zahlen a, b jeweils die Zahl 0 wählen. Dann ist $a \cdot b = 0 \cdot 0 = 0$. Aber in diesem Falle ist die Aussage

entweder $a = 0$ *oder* $b = 0$

nicht wahr. Denn damit diese Aussage wahr ist, muß als Sachverhalt vorliegen, daß $a = 0$ und $b \neq 0$ ist bzw. daß $a \neq 0$ und $b = 0$ ist.

! Versuchen Sie nochmals, die Frage in Lehrschritt 31 richtig zu beantworten.

→ 31

Das nächste **Beispiel** soll Sie an die wichtigen Begriffe der Vereinigungsmenge und der Durchschnittsmenge zweier Mengen erinnern. **40**

! Tragen Sie jeweils eine der angegebenen Möglichkeiten in die betreffende Lücke ein, so daß wahre Aussagen entstehen!

1. Die Vereinigungsmenge zweier Mengen A, B ist die Menge aller derjenigen Elemente, *die zu A* .... *zu B gehören.*
   (und/und nicht/oder/entweder ... oder)

2. Die Durchschnittsmenge zweier Mengen A, B ist die Menge aller derjenigen Elemente, *die zu A* .... *zu B gehören.*
   (und/und nicht/oder/entweder ... oder)

——► 48

Diese Antwort ist nicht richtig. Die Menge der Punkte, die der von Ihnen als zutreffend angesehenen Bedingung genügen, ist die **Vereinigungsmenge** dreier Mengen — nämlich der Mengen derjenigen Punkte, deren Koordinaten die erste bzw. zweite bzw. dritte Ungleichung erfüllen, die in der von Ihnen gewählten Bedingung genannt werden. **41**

Jede dieser drei Mengen enthält aber Punkte der Ebene, die nicht im Innern des Dreiecks liegen. Zum Beispiel gehört der Punkt (10, 5) zur Menge der Punkte, deren Koordinaten die Ungleichung $y < 2x + 6$ erfüllen. Er ist aber kein innerer Punkt des Dreiecks. Daher enthält die Vereinigungsmenge dieser drei Mengen erst recht solche Punkte.

! Gehen Sie zum Lehrschritt 42, und versuchen Sie, die Menge der von den drei Geraden eingeschlossenen Punkte als eine Durchschnittsmenge darzustellen.

——► 42

42 Betrachten Sie in einem rechtwinkligen (x, y)-Koordinatensystem die Geraden g_1, g_2, g_3 mit den sie darstellenden Gleichungen

g_1: $y = -x + 9$

g_2: $y = 2$

g_3: $y = 2x + 6$

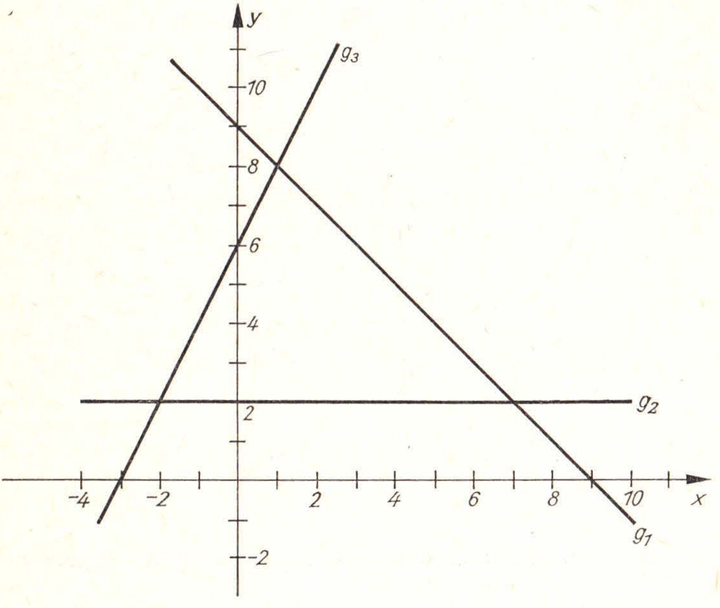


Abb. 2

Durch diese Geraden wird ein Dreieck bestimmt.

Frage: Wodurch sind die inneren Punkte dieses Dreiecks charakterisiert?

Antwort: Es sind alle Punkte, für deren Koordinaten (x, y) gilt

a: $y > -x + 9$ *oder* $y < 2$ *oder* $y > 2x + 6$ ——▶ 47

b: $y > -x + 9$ *und* $y < 2$ *und* $y > 2x + 6$ ——▶ 45

c: $y < -x + 9$ *und* $y > 2$ *und* $y < 2x + 6$ ——▶ 13

d: $y < -x + 9$ *oder* $y > 2$ *oder* $y < 2x + 6$ ——▶ 41

Wenn Sie nicht zurechtkommen, dann ——▶ 44

43

Die Aufgabe im Lehrschritt 49 haben Sie richtig gelöst, falls Sie in die auszufüllende Lücke „*oder*" eingetragen haben. Denn die Ungleichung $f(x) < \cos x$ ist für alle diejenigen x-Werte falsch, die zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegen, d. h., für die gilt $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

Für alle anderen x-Werte ist die zu betrachtende Ungleichung dagegen richtig. Für diese anderen x-Werte gibt es (vergleichen Sie mit Ihrer Skizze) zwei Möglichkeiten: Es kann $x \leqq -\frac{\pi}{2}$ sein *oder* $x \geqq \frac{\pi}{2}$.

Gilt also

$$x \leqq -\frac{\pi}{2} \text{ oder } \frac{\pi}{2} \leqq x,$$

so gilt die Ungleichung $f(x) < \cos x$. → 42

44

Wir geben Ihnen folgenden Hinweis:

Einer Ungleichung der Form $y < ax + b$ bzw. $y > ax + b$ genügen jeweils alle Punkte einer der Halbebenen, in die die Gerade $y = ax + b$ die gesamte Koordinatenebene zerlegt. (Die Punkte auf der Geraden $y = ax + b$ sind jeweils ausgenommen.)

Im Falle der Geraden g_1 mit der Gleichung $y = -x + 9$ entspricht z. B. der Ungleichung $y < -x + 9$ die in Abb. 3 schraffierte Halbebene.

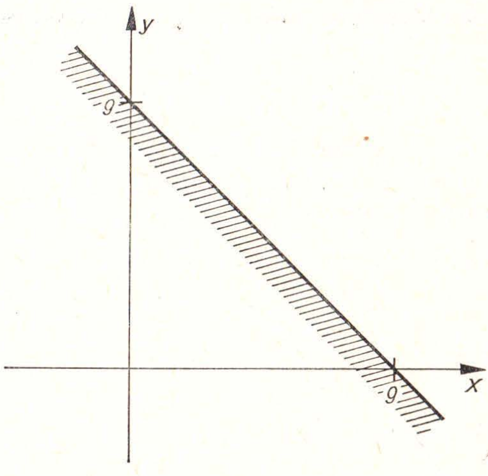


Abb. 3

Mit Hilfe dreier solcher Halbebenen, die durch die Geraden g_1, g_2 bzw. g_3 bestimmt werden, müssen Sie nun die Gesamtheit der inneren Punkte des Dreiecks charakterisieren. → 42

45 Ihre Antwort ist nicht richtig.

Einen Punkt P_0, dessen Koordinaten x_0, y_0 der Bedingung

$$y_0 > -x_0 + 9 \textit{ und } y_0 < 2 \textit{ und } y_0 > 2x_0 + 6$$

genügen, kann es nämlich gar nicht geben.

Denn für diesen Punkt müßte

	$y_0 < 2$
sein, das heißt	$2 > y_0$,
also wegen	$y_0 > -x_0 + 9$
auch	$2 > -x_0 + 9$,
das heißt, es müßte	$2 + x_0 > 9$
sein, also	$x_0 > 7$;
wegen	$y_0 > 2x_0 + 6$
wäre also auch	$y_0 > 14 + 6 = 20.$
Also müßte gelten	$20 < y_0$ *und* $y_0 < 2$,

was nicht sein kann.

! Überlegen Sie sich nochmals, welchen Ungleichungen die Koordinaten x, y der inneren Punkte des betrachteten Dreiecks genügen müssen.

→ 42

46

Sie kennen den Begriff der Funktion einer reellen Variablen und wissen, daß man sich den Verlauf einer Funktion $f(x)$ meist durch eine Kurve in einem (x, y)-Koordinatensystem veranschaulichen kann.

Betrachten Sie die Funktion $f(x)$, für die gilt

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}; \\ -2 & \text{für alle anderen reellen Zahlen } x. \end{cases}$$

! Skizzieren Sie den Verlauf dieser Funktion auf einem Übungsblatt!

Dann → 49

47

Diese Antwort ist nicht richtig.

Die Menge der Punkte, die der von Ihnen als zutreffend angesehenen Bedingung genügen, ist die **Vereinigungsmenge** dreier Mengen — nämlich der Mengen derjenigen Punkte, deren Koordinaten die erste bzw. zweite bzw. dritte Ungleichung erfüllen, die in der von Ihnen gewählten Bedingung genannt werden.

Jede dieser drei Mengen enthält aber Punkte der Ebene, die nicht im Innern des Dreiecks liegen. Zum Beispiel gehört der Punkt $(-4, 0)$ zur Menge der Punkte, deren Koordinaten die Ungleichung $y > 2x + 6$ erfüllen. Er ist aber kein innerer Punkt des Dreiecks. Daher enthält die Vereinigungsmenge dieser drei Mengen **erst recht** solche Punkte.

! Gehen Sie zum Lehrschritt 42 zurück und versuchen Sie, die Menge der von den drei Geraden eingeschlossenen Punkte als eine Durchschnittsmenge darzustellen.

————▶ 42

48

Ihre Antworten im Lehrschritt 40 mußten lauten:

1\. . . . *oder* . . .

2\. . . . *und* . . .

Haben Sie richtig geantwortet ————▶ 46

Haben Sie nicht richtig geantwortet ————▶ 102

49 Sie mußten als Skizze erhalten:

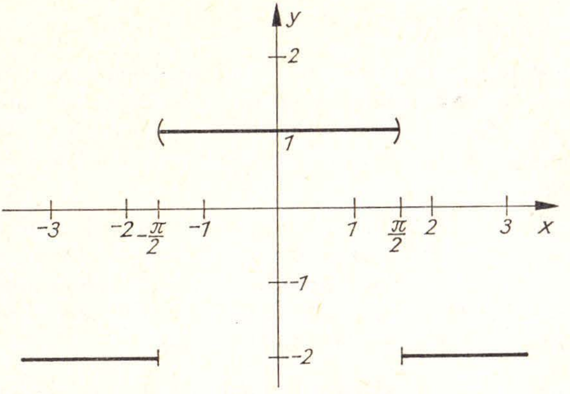


Abb. 4

! Überprüfen Sie Ihr Ergebnis und korrigieren Sie es nötigenfalls! Zeichnen Sie in dasselbe Koordinatensystem noch $\cos x$ ein!

Sollten Sie wider Erwarten den Verlauf dieser Funktion nicht mehr kennen, so informieren Sie sich in den Lehrschritten 106/107 und kehren Sie danach hierher zurück.

→ 106/107 ←

Aus Ihrer vervollständigten Skizze ersehen Sie nun, daß die Ungleichung

$$f(x) < \cos x$$

für alle reellen Zahlen x gilt, für die $x \leqq -\frac{\pi}{2}$ .... $\frac{\pi}{2} \leqq x$ ist.
(und/oder)

! Füllen Sie die Lücke aus!

Dann → 43

---

50 Ihre Tabelle muß so aussehen:

p	q	p *oder* q	p *und* q
W	*W*	**W**	**W**
W	*F*	*W*	**F**
F	*W*	**W**	**F**
F	*F*	**F**	*F*

Sie sehen, daß die Wahrheit bzw. Falschheit der betrachteten Aussagenverbindungen nur von der Wahrheit bzw. Falschheit der Aussagen abhängt, aus denen sie zusammengesetzt sind.

→ 52

51

Diejenigen Aussagen, die wir mit Hilfe der Wörter „*oder*“ bzw. „*und*“ verknüpfen wollen, unterliegen keinen Einschränkungen. Insbesondere wollen wir nicht fordern, daß etwa nur mathematische oder nur nichtmathematische Aussagen miteinander verknüpft werden sollen.
Eine zunächst vielleicht paradox erscheinende Konsequenz dieser Auffassung ist, daß wir z. B. die folgenden Zusammensetzungen als Aussagen zulassen:

Es ist $3 + 3 = 6$ und der 1. Januar ein Feiertag

2 ist eine irrationale Zahl, oder gestern war Freitag

Die Gleichung $x^2 = 1$ hat mindestens eine ganzzahlige Lösung, und es ist $2^4 = 16$

Berlin ist die Hauptstadt der VR Polen, oder es ist $2^2 + 3^2 = 4^2$

Es ist $3 < 1$ oder $\sin \pi + \cos \pi = 1$.

——► 53

52

Prägen Sie sich bitte folgende Bezeichnungen ein:

Eine durch Verbindung zweier Aussagen mittels „*oder*“ entstehende Aussage nennt man eine **Alternative.**

Eine durch Verbindung zweier Aussagen mittels „*und*“ entstehende Aussage nennt man eine **Konjunktion.**

Die Eigenschaft, daß die Wahrheit bzw. Falschheit einer Alternative (Konjunktion) nur von der Wahrheit bzw. Falschheit der Aussagen abhängt, aus denen sie sich zusammensetzt, und nicht von deren Inhalt, nennt man Extensionalität.

——► 54

53

Nun wollen wir uns überlegen, wann die durch Zusammensetzung zweier Aussagen p, q mittels „*oder*" bzw. „*und*" entstehende Aussage wahr ist.

Gemäß unserer Vereinbarung, das Wort „*oder*" stets im **nichtausschließenden** Sinne zu gebrauchen, ist die Aussage

p *oder* q

in folgenden Fällen wahr:

(1) falls der durch die Aussage p beschriebene Sachverhalt vorliegt;

(2) falls der durch die Aussage q beschriebene Sachverhalt vorliegt;

(3) falls sowohl der durch die Aussage p als auch der durch die Aussage q beschriebene Sachverhalt vorliegt.

Sonst ist die Aussage p *oder* q falsch.

——► 54

54

Entsprechend ergibt sich aus unserer Festlegung über den Gebrauch des Wortes „*und*", daß die Aussage

p *und* q

wahr ist, falls *sowohl* der durch die Aussage p beschriebene Sachverhalt *als auch* der durch die Aussage q beschriebene Sachverhalt vorliegen. Aber auch nur in diesem Falle ist diese Aussage p *und* q wahr.

——► 55

55

Die Überlegungen der beiden letzten Lehrschritte können wir in folgender leicht zu merkender Form zusammenfassen:

(1) **Die durch Verknüpfung zweier Aussagen mittels „*oder*" entstehende Aussage ist genau in den Fällen wahr, in denen *mindestens eine* der verknüpften Aussagen wahr ist.**

(2) **Die durch Verknüpfung zweier Aussagen mittels „*und*" entstehende Aussage ist genau in den Fällen wahr, in denen *beide* verknüpften Aussagen wahr sind.**

! Prägen Sie sich dieses ein!

Dann ——► 56

56

! Entscheiden Sie zur Übung für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist! Schreiben Sie „wahr" bzw. „falsch" hinter jede Aussage!

p_1: *Es ist* $3^3 = 9$ *oder* $\pi < 3{,}12$ ....

p_2: *Weihnachten ist im Dezember, oder Ostern ist im Frühling* ....

p_3: $|\sin \frac{3}{2}\pi| = 0$ *und* $(-4)^{17} > 0$ ....

p_4: $\sqrt{(-4)^2} = -4$ *oder* $2^3 = 3^2$ ....

p_5: -7 *ist eine rationale Zahl, und Sie sind jetzt beim Lehrschritt 56 dieses Programms* ....

p_6: $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ *oder* $1024 = 2^{10}$ ....

p_7: *Der 28. Februar 1971 war ein Dienstag, oder die Gleichung* $5x - 7 = 0$ *hat keine ganzzahlige Lösung* ....

——► 59

57 Da Sie nicht mehr als eine Aufgabe falsch haben, dürfen Sie bis hierher alle Lehrschritte überspringen.

Diejenigen Aussagen, die wir mittels der Wörter „*oder*" bzw. „*und*" verknüpfen wollen, unterliegen keinen Einschränkungen. Insbesondere wollen wir nicht fordern, daß etwa nur mathematische oder nur nichtmathematische Aussagen miteinander verknüpft werden sollen.

Eine Konsequenz dieser Auffassung ist es, daß wir z. B. die folgenden Zusammensetzungen als Aussagen zulassen:

Es ist $3 + 3 = 6$, und der 1. Januar ein Feiertag

2 ist eine irrationale Zahl, oder gestern war Freitag

Die Gleichung $x^2 = 1$ hat mindestens eine ganzzahlige Lösung, und es ist $2^4 = 16$

Berlin ist die Hauptstadt der VR Polen oder es ist $2^2 + 3^2 = 4^2$

Es ist $3 < 1$ oder $\sin \pi + \cos \pi = 1$.

→ 58

58

Es bereitet auch für derartige Aussagen keine Mühe zu entscheiden, ob sie wahr oder ob sie falsch sind, da — wie Sie wissen — gilt:

(1) **Die durch Verknüpfung zweier Aussagen mittels „*oder*" entstehende Aussage ist genau in den Fällen wahr, in denen *mindestens eine* der verknüpften Aussagen wahr ist.**

(2) **Die durch Verknüpfung zweier Aussagen mittels „*und*" entstehende Aussage ist genau in den Fällen wahr, in denen *beide* verknüpften Aussagen wahr sind.**

→ 60

! Vergleichen Sie Ihre Lösungen mit den richtigen Lösungen! Wenn Sie Fehler gemacht haben, so überlegen Sie sich an Hand der angegebenen Begründungen den Sachverhalt nochmals. **59**

Die richtigen **Lösungen** lauten:

p_1 **falsch** (denn es ist $3^3 = 27 \neq 9$ und auch nicht $\pi < 3{,}12$)

p_2 **wahr** (denn Weihnachten ist im Dezember)

p_3 **falsch** (denn es ist $(-4)^{17} = (-1)^{17} \cdot 4^{17} = -4^{17} < 0$; bzw. andere Begründung: denn es ist $|\sin \frac{3\pi}{2}| = |-1| = 1 \neq 0$)

p_4 **falsch** (denn es ist $\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4$ und es ist $2^3 = 8 \neq 9 = 3^2$)

p_5 **wahr** (denn -7 ist eine rationale Zahl, und Sie waren bei der Lösung dieser Aufgabe beim Lehrschritt 56 dieses Programms)

p_6 **wahr**

p_7 **wahr** (denn die Gleichung $5x - 7 = 0$ hat als einzige reelle Lösung $x = \frac{7}{5}$, also keine ganzzahlige Lösung).

→ 60

60

Wie schon im Falle der Negation einer Aussage wollen wir nun unsere Ergebnisse über die Wahrheit bzw. Falschheit der durch Verknüpfung zweier Aussagen p, q mittels *„oder"* bzw. *„und"* entstehenden Aussagen tabellarisch zusammenfassen. W bzw. F sollen die Eigenschaft des Wahrseins bzw. des Falschseins andeuten.

! Ergänzen Sie die folgende Tabelle:

p	q	p *oder* q	p *und* q
W	W	.... W	.... W
W	F	W w	.... f
F	W	.... w	.... f
F	F	.... f	F

→ 50

61 Nun soll auf die Redeweisen „**für alle . . .**“, „**es gibt ein . . .**“ eingegangen werden, die zur Beschreibung mathematischer Sachverhalte immer wieder benötigt werden.
Der Gebrauch von „*für alle . . .*“ ist unmittelbar verständlich: Es wird ausgesagt, daß eine bestimmte Eigenschaft für **alle** Elemente eines gewissen Bereiches, auf dessen Elemente sich die Aussage bezieht, zutrifft.

Beispiele:

(1) *Für alle negativen reellen Zahlen x gilt:* $\sqrt{x^2} = -x$.

Diese Aussage ist wahr, denn tatsächlich hat jedes Element des vorgegebenen Bereiches der negativen reellen Zahlen die Eigenschaft, die Gleichung $\sqrt{x^2} = -x$ zu erfüllen.

(2) *Für alle Primzahlen gilt, daß sie ungerade sind.*

Eine dazu gleichwertige, sprachlich gefälligere Form lautet:

Alle Primzahlen sind ungerade.

Bei diesem Beispiel handelt es sich um eine falsche Aussage. Die Zahl 2 gehört zu den Primzahlen, ist jedoch nicht ungerade; also ist es nicht so, daß **alle** Primzahlen ungerade sind.

——► 62

62 Gleichbedeutend mit der Redeweise „*für alle x*“ sind die Redeweisen „*für jedes x*“, „*für ein beliebiges x*“.

! Lösen Sie nun folgende **Aufgabe**:
Entscheiden Sie, ob die nachstehende Aussage wahr ist!

Jede reelle Lösung der Gleichung $|x - \frac{3}{2}| - \frac{1}{4} = 0$ *ist positiv.*

Sie ist wahr ——► 70

Sie ist nicht wahr ——► 66

63 **Lösung** der Aufgabe in Lehrschritt 69:

Eine im Sinne der Aufgabenstellung zum Aussagesatz

Die Zahl $\sqrt{\frac{9}{4}}$ *ist nicht ganzzahlig und nicht irrational*

gleichwertige Formulierung ist beispielsweise

Es ist nicht so, daß die Zahl $\sqrt{\frac{9}{4}}$ *ganzzahlig oder irrational ist.*

——► 61

Wir wollen uns nun der **Negation** von Aussagen zuwenden, die die Form einer **Konjunktion bzw. Alternative zweier Aussagen** haben. **64**

Von einem bestimmten Dreieck werde behauptet, daß *es rechtwinklig* **und** *gleichseitig* sei. Diese Behauptung ist falsch; denn es gibt kein Dreieck, das sowohl rechtwinklig als auch gleichseitig ist. Also kann das speziell gewählte Dreieck auch nicht von dieser Art sein. Demzufolge ist die Negation der Behauptung, dargestellt etwa in der folgenden Form

> *Es ist* **nicht** *so, daß das betrachtete Dreieck rechtwinklig* **und** *gleichseitig ist*

eine wahre Aussage.

In ihr kommt zum Ausdruck, daß die beiden Eigenschaften (rechtwinklig sein, gleichseitig sein) *auf keinen Fall zugleich* zutreffen. Ist das Dreieck rechtwinklig, hat es nicht drei gleichlange Seiten; ist es dagegen gleichseitig, hat es keinen rechten Winkel. Schließlich ist auch möglich, daß das Dreieck weder rechtwinklig noch gleichseitig ist. Wir können somit gleichwertig zur oben angegebenen Verneinung formulieren

> *Das betrachtete Dreieck ist* **nicht** *rechtwinklig* **oder nicht** *gleichseitig*.

→ 65

Was wir uns an einem Beispiel überlegt haben, trifft allgemein zu, d. h., unabhängig vom speziellen Inhalt der Aussagen p und q gilt stets, daß die beiden Formulierungen **65**

> **nicht** (p **und** q)
>
> **nicht**-p **oder nicht**-q

jeweils denselben Sachverhalt ausdrücken.

> **Die Negation einer Konjunktion aus zwei Aussagen kann somit als Alternative der Negationen dieser beiden Aussagen dargestellt werden.**

Auf Grund dieser Erkenntnis wird es Ihnen nicht schwerfallen, beispielsweise zu folgender Aussage, die sich auf ein bestimmtes Viereck bezieht, eine gleichwertige Formulierung zu finden:

> *Das betreffende Viereck ist kein Parallelogramm, oder die Diagonalen des Vierecks halbieren sich.*

! Schreiben Sie eine solche Formulierung auf Ihr Übungsblatt!

Es trifft nicht zu,

Dann → 68

daß das □ ein ▱ ist und die Diagonalen sich nicht [illegible]

66

Ihre Entscheidung ist falsch.

Wenn Ihnen der absolute Betrag $|x - \frac{3}{2}|$ grundsätzliche Schwierigkeiten bereitet, dann gehen Sie zunächst nach Lehrschritt 67 und anschließend nach Lehrschritt 71!

——67——► 71

Ansonsten ————► 71

67

Ihre Entscheidung war falsch. Möglicherweise ist das mit darauf zurückzuführen, daß Sie nicht ausreichend über den Begriff „absoluter Betrag einer reellen Zahl" Bescheid wissen. Wir wollen ihn daher an dieser Stelle erläutern.

Unter dem **absoluten Betrag einer reellen Zahl** a (in Zeichen $|a|$) versteht man die Zahl a selbst, sofern a gleich Null oder größer als Null ist, dagegen die Zahl $-a$, sofern a kleiner als Null ist. Also

$$|a| = \begin{cases} a \text{ für } a \geqq 0, \\ -a \text{ für } a < 0. \end{cases}$$

Der Ausdruck $a \geqq 0$ bedeutet hierbei $a > 0$ oder $a = 0$.
Der absolute Betrag einer negativen Zahl ist somit stets positiv (beispielsweise gilt $|-5| = 5$). Der absolute Betrag einer positiven Zahl ist ebenfalls positiv (beispielsweise gilt $|5| = 5$). Der Betrag der Zahl Null ist gleich Null ($|0| = 0$). Der absolute Betrag einer beliebigen reellen Zahl ist somit stets größer oder gleich Null; also $|a| \geqq 0$.

! Beachten Sie:

Kamen Sie von Lehrschritt 66, so ————► 71

Kamen Sie von Lehrschritt 105, so ————► 105

Kamen Sie von Lehrschritt 131, so ————► 106

Eine zum Aussagesatz

Das betreffende Viereck ist kein Parallelogramm, oder die Diagonalen des Vierecks halbieren sich (Lehrschritt 65)

im Sinne der Aufgabenstellung in Frage kommende gleichwertige Formulierung ist:

Es ist nicht so, daß das betreffende Viereck ein Parallelogramm ist und sich die Diagonalen in diesem Viereck nicht halbieren.

! Vergleichen Sie diese mit der von Ihnen gefundenen Lösung!

Danach ———▶ 69

68

69

Nun wollen wir versuchen, für Sätze der Form „**nicht** *(p* **oder** *q)*" ähnlich wie im eben besprochenen Fall „**nicht** *(p* **und** *q)*" eine gleichwertige Formulierung zu finden.

Betrachten wir dazu beispielsweise eine bestimmte natürliche Zahl, die weder durch 2 noch durch 3 teilbar ist. Dann trifft die Aussage

Die betrachtete natürliche Zahl ist **nicht** *durch 2* **und nicht** *durch 3 teilbar*

zu. Demnach ist es keinesfalls so, daß diese Zahl durch 2 und durch 3 teilbar ist. Es ist aber auch ausgeschlossen, daß sie lediglich durch eine der beiden Zahlen teilbar ist. Somit können wir anstelle des angegebenen Satzes auch sagen:

Es ist **nicht** *so, daß die betrachtete natürliche Zahl durch 2* **oder** *durch 3 teilbar ist.*

Dieser Satz hat die Form „*nicht (p oder q)*", während der obige Satz die Form „*nicht p und nicht q*" hat. Beide Formulierungen sind gleichwertig, und auch hier ist es so, daß dies unabhängig vom speziellen Inhalt der Aussagen *p* bzw. *q* der Fall ist. Somit gilt stets, daß die beiden Formulierungen

nicht *(p* **oder** *q)*

nicht-*p* **und nicht-***q*

jeweils ein und denselben Sachverhalt ausdrücken.

Aufgabe: Wie läßt sich der durch den Aussagesatz

Die Zahl $\sqrt{\frac{9}{4}}$ *ist nicht ganzzahlig und nicht irrational*

gegebene Sachverhalt entsprechend umformulieren?

Ihre Lösung: . . . .

———▶ 63

70

Richtig!

Die Gleichung $|x - \frac{3}{2}| - \frac{1}{4} = 0$ hat im Bereich der reellen Zahlen die Lösungen $\frac{7}{4}$, $\frac{5}{4}$ und keine weiteren. Beide sind positiv; somit ist jede reelle Lösung von $|x - \frac{3}{2}| - \frac{1}{4} = 0$ positiv.

——► 72

71

Wir überzeugen uns von der Wahrheit der Aussage

Jede reelle Lösung der Gleichung $|x - \frac{3}{2}| - \frac{1}{4} = 0$ *ist positiv*,

indem wir sämtliche Lösungen dieser Gleichung ermitteln. Dazu überlegen wir uns, daß

$$|x - \tfrac{3}{2}| - \tfrac{1}{4} = 0$$

äquivalent ist zu

$$|x - \tfrac{3}{2}| = \tfrac{1}{4}$$

bzw. zu

$$x - \tfrac{3}{2} = \tfrac{1}{4} \quad \text{oder} \quad -(x - \tfrac{3}{2}) = \tfrac{1}{4}$$

bzw. zu

$$x = \tfrac{7}{4} \qquad \text{oder} \qquad x = \tfrac{5}{4}.$$

Somit erfüllen die beiden Werte $\frac{7}{4}$, $\frac{5}{4}$ und keine weiteren die gegebene Gleichung $|x - \frac{3}{2}| - \frac{1}{4} = 0$.
Beide Lösungen sind positiv; also ist jede reelle Lösung dieser Gleichung positiv.

——► 72

Gelegentlich wird die Redeweise „*für alle* ...“ oder eine dazu gleichwertige nicht explizit angegeben, obwohl sie zur Beschreibung des betreffenden Sachverhaltes erforderlich ist.

Man schreibt beispielsweise das kommutative Gesetz der Addition für reelle Zahlen häufig in der Form

(1) $a + b = b + a$

und meint

(2) *Für alle reellen Zahlen a und b gilt:* $a + b = b + a$.

Im Sinne einer korrekten Darstellung sollte man solche Kurzformulierungen wie (1) vermeiden. Daß (1) und (2) im Prinzip nicht dasselbe bedeuten können, wird bereits daran deutlich, daß (1) im Gegensatz zu (2) keine Aussage ist, sondern eine sogenannte **Aussageform**[1]. Im Unterschied zu (2) ist (1) weder wahr noch falsch. Ebenso wenig ist der Satz

x ist Teiler von 60

eine Aussage. Man erhält jedoch, indem man für x spezielle Werte, z. B. aus dem Bereich der natürlichen Zahlen, einsetzt, daraus Aussagen, etwa

3 ist Teiler von 60
87 ist Teiler von 60.

Auch durch Voranstellen von „*für alle natürlichen Zahlen x gilt*“ geht die Aussageform „*x ist Teiler von 60*“ in eine Aussage über. Diese ist wie die durch Einsetzen von 87 für x entstandene Aussage falsch.

——► 73

[1] Auf den Begriff „Aussageform“ und auf die Unterschiede zwischen Aussage und Aussageform wird nicht näher eingegangen.

73

Der Gebrauch der Redeweise „*für alle* . . .“ in der Mathematik stimmt mit dem in der Umgangssprache überein.
Etwas anders ist dies im Falle der Redeweise „*es gibt ein* . . .“

Dazu betrachten wir die beiden Aussagen

p: *Es gibt eine gerade Primzahl*

q: *Es gibt eine reelle Zahl, die die Gleichung* $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ *erfüllt.*

Beide Aussagen sind im Sinne des mathematischen Sprachgebrauches wahr! Die Redeweise „*es gibt ein* . . .“ ist in der Mathematik nämlich stets in der Bedeutung von „*es gibt mindestens ein* . . .“, d. h. „*es gibt ein oder mehrere*“ zu verstehen.

Im Falle der Aussage p gibt es ein **einziges** Element (Primzahl) der betreffenden Eigenschaft (gerade sein), während im Falle q mehrere Elemente des betreffenden Bereiches, nämlich alle reellen Zahlen, die angegebene Gleichung erfüllen.

→ 74

74

In der Umgangssprache dagegen wird die Redeweise „*es gibt ein* . . .“ häufig nur in der Bedeutung von „*es gibt ein einziges* . . .“ gebraucht, also in einem engeren Sinne als in der Mathematik.

Sie können eine falsche Deutung von „*es gibt ein*“ innerhalb mathematischer Texte weitestgehend dadurch vermeiden, daß Sie sich zu dieser Redeweise stets das Wort „*mindestens*“ oder auch das Wort „*wenigstens*“ – das in gleichem Sinne wie „*mindestens*“ verwendet wird – hinzugesetzt denken.

Will man in der Mathematik zum Ausdruck bringen, daß nur ein **einziges** Element eines bestimmten Bereiches eine gewisse Eigenschaft besitzt, so sagt man „*es gibt* **genau** *ein* . . .“. Darauf werden wir in Lehrschritt 77 nochmals eingehen.

→ 75

Nun wollen wir Aussagen der Formen „*für alle . . .*" und „*es gibt ein . . .*" negieren. Dafür läßt sich die Negation jeweils in unterschiedlicher Weise formulieren. **75**

Verneinungen zur falschen Aussage

p: *Alle geraden Zahlen sind durch 3 teilbar*

sind beispielsweise:

q_1: *Es ist nicht so, daß alle geraden Zahlen durch 3 teilbar sind*

q_2: *Nicht alle geraden Zahlen sind durch 3 teilbar*

q_3: *Es gibt eine gerade Zahl, die nicht durch 3 teilbar ist.*

Die Aussagen q_1 und q_2 wurden aus p in der uns schon bekannten Weise durch Voranstellen von „*es ist nicht so*" bzw. von „*nicht*" gebildet. Zur Aussage q_3 gelangt man von q_2 auf Grund eines Zusammenhanges, der zwischen den Redeweisen „*es gibt ein . . .*" und „*für alle . . .*" besteht. Betrachtet man nämlich eine gewisse Eigenschaft, so handelt es sich dabei um die Gleichwertigkeit der folgenden zwei Aussagesätze

Nicht alle x haben diese Eigenschaft

Es gibt ein x, daß diese Eigenschaft nicht hat

(diese Eigenschaft ist in unserem Fall „teilbar sein durch 3").

Aufgabe:

Bilden Sie unter Verwendung der Redeweise „*es gibt ein . . .*" eine Verneinung zur nachstehenden Aussage!

Alle Werte der Funktion mit der Gleichung $y = \sin x$ sind dem absoluten Betrage nach nicht größer als 1.

! Schreiben Sie die Lösung auf Ihr Arbeitsblatt!

Dann ——► 80

Neben den Redeweisen „*es gibt ein . . .*" und „*für alle . . .*" gebraucht man in der Mathematik noch andere Formulierungen, die der Anzahlbestimmung dienen. **76**

Eine solche Formulierung ist, wie schon erwähnt wurde (Lehrschritt 74), **„es gibt genau ein . . ."**. Eine weitere Redeweise dieser Art ist **„es gibt höchstens ein . . ."**.

——► 77

77

Soll zum Ausdruck gebracht werden, daß es von Dingen einer bestimmten Art eines und nicht mehrere gibt, so sagt man, „*es gibt genau ein* . . .“ oder auch „*es gibt ein und nur ein* . . .“.

Beispiele hierzu sind:

(1) *Es gibt genau eine Nullstelle der Funktion mit der Gleichung* $y = \lg x$

(2) *Es gibt eine und nur eine reelle Zahl* a, *die bei vorgegebener positiver Zahl* b *die Gleichung* $|a| = b$ *erfüllt*

(3) *Es gibt genau eine reelle Zahl* x, *für die gilt:* $x^2 = -\sqrt{x^4}$.

Die erste und die letzte dieser drei Aussagen sind wahr; die an zweiter Stelle stehende dagegen ist falsch.

→ 78

78

Will man zum Ausdruck bringen, daß es auf keinen Fall mehr als ein Ding einer bestimmten Art gibt, so sagt man „*es gibt höchstens ein* . . .“. Diese Formulierung ist demzufolge äquivalent zu „*es gibt genau ein oder kein* . . .“

Betrachten wir dazu einige Beispiele!

p: *Ein ebenes Dreieck hat höchstens einen rechten Innenwinkel.*

Aus stilistischen Gründen haben wir diese Formulierung anstelle von „*Es gibt höchstens einen rechten Innenwinkel in einem ebenen Dreieck*“ gewählt. Bei den weiteren Beispielen wird in ähnlicher Weise verfahren.

q: *Zwei voneinander verschiedene Geraden* g *und* h *der euklidischen Ebene haben höchstens einen Punkt gemeinsam*

r: *Die Gleichung* $a \cdot x = b$ *(*a, b, x *reelle Zahlen) hat zu beliebig vorgegebenen Werten* a *und* b *höchstens eine Lösung* x.

Frage: Ist eine dieser Aussagen falsch?

Antwort: Ja/Nein

Falls ja, welche? . . . .

→ 83

79

Wir betrachten die Aussage

r: *Es gibt eine ungerade Zahl, die nicht durch 2 teilbar ist.*

Aufgabe: Welche der nachstehenden Aussagen p_1 bis p_4 sind Verneinungen zu r?

p_1: *Alle ungeraden Zahlen sind durch 2 teilbar*
p_2: *Alle ungeraden Zahlen sind nicht durch 2 teilbar*
p_3: *Nicht alle ungeraden Zahlen sind durch 2 teilbar*
p_4: *Es gibt keine ungerade Zahl, die nicht durch 2 teilbar ist.*

! Überlegen Sie sorgfältig!

Ihre **Lösung**: . . . .

Dann ——► 84

80

Eine Lösung im geforderten Sinne ist:

Es gibt einen Wert der Funktion mit der Gleichung $y = \sin x$, der dem absoluten Betrage nach größer als 1 ist.

Bevor wir noch eine Aufgabe lösen, sei auf einen weiteren Umstand hingewiesen. Dazu betrachten wir die beiden Aussagen

p: *Nicht alle geraden Zahlen sind durch 3 teilbar*
q: *Alle geraden Zahlen sind nicht durch 3 teilbar.*

Diese beiden Formulierungen unterscheiden sich lediglich bezüglich der Stellung des Wortes „*nicht*". Man ist möglicherweise geneigt anzunehmen, daß beide dennoch dasselbe ausdrücken.
Eine solche Annahme ist jedoch falsch. p stellt nämlich, wie wir vom Lehrschritt 75 her wissen, eine wahre Aussage dar (als Verneinung zur falschen Aussage *Alle geraden Zahlen sind durch 3 teilbar*). Aussage q dagegen ist falsch, denn es gibt gerade Zahlen (z. B. 6, 30), die durch 3 teilbar sind.
Wir haben somit klar zu unterscheiden zwischen „**nicht alle**" und „**alle . . . nicht**".

——► 79

81

Analog zu „*es gibt mindestens (höchstens) ein* . . .“ wird in der Mathematik die Redeweise „*es gibt mindestens (höchstens) n* . . .“ (mit $n = 2, 3, \ldots$) verwendet.

Aufgabe: Setzen Sie in die freien Stellen „*mindestens*“ bzw. „*höchstens*“ so ein, daß jeweils eine wahre Aussage entsteht!

p: *Eine natürliche Zahl k hat* höchstens . . . . *k Teiler*

q: *Ein ebenes Dreieck hat* mind . . . . *zwei spitze Innenwinkel*

r: *Die Funktion mit der Gleichung* $y = \cot x$ *hat zwischen* -2π *und* $+2\pi$ höchstens . . . . *vier Nullstellen.*

——► 85

82

Wir haben erkannt, daß die beiden Aussagen

p_4: *Es gibt keine ungerade Zahl, die nicht durch 2 teilbar ist*

p_1: *Alle ungeraden Zahlen sind durch 2 teilbar*

denselben Sachverhalt ausdrücken. Das läßt sich verallgemeinern. Unabhängig vom speziellen Inhalt gilt nämlich für eine vorgegebene Eigenschaft stets, daß die Aussagesätze

Es gibt kein x, das diese Eigenschaft hat

Alle x haben diese Eigenschaft nicht

bzw. die Aussagesätze

Es gibt kein x, das diese Eigenschaft nicht hat

Alle x haben diese Eigenschaft

jeweils einander äquivalent sind.

Unser obiges Beispiel ordnet sich dem einen oder dem anderen Fall unter, je nachdem, ob als Eigenschaft die Nichtteilbarkeit bzw. die Teilbarkeit durch 2 gewählt wird.

——► 76

83

Richtige Antwort:

Ja, r ist eine falsche Aussage.

Hinsichtlich der Lösbarkeit der Gleichung $a \cdot x = b$ (a, b, x reelle Zahlen) sind nämlich drei Fälle zu unterscheiden:

1. $a \neq 0$ (b beliebig) — Es gibt genau eine Lösung;
2. $a = 0$, $b \neq 0$ — Es gibt keine Lösung;
3. $a = 0$, $b = 0$ — Jede reelle Zahl x ist Lösung.

Es ist somit nicht so, daß es auf keinen Fall mehr als eine Lösung gibt.

r ist auch die einzige der drei angegebenen Aussagen, die falsch ist, denn sowohl p als auch q sind, wie man leicht einsieht, wahre Aussagen.

——▶ 81

84

Richtige Lösung: p_1 und p_4 sind Verneinungen zu r.

Folgender Lösungsweg wäre denkbar:

1. Wir überlegen uns zunächst, daß die vorgegebene Aussage

r: *Es gibt eine ungerade Zahl, die nicht durch 2 teilbar ist*

eine wahre Aussage ist (es liegt hier der Fall vor, daß sogar sämtliche Elemente des vorgegebenen Bereiches die betreffende Eigenschaft besitzen). Da demzufolge die Verneinungen von r falsche Aussagen sein müssen, scheiden die Aussagen p_2 und p_3 von der weiteren Betrachtung aus, sie sind nämlich wahr, kommen also als Verneinung nicht in Frage.

2. Wir erkennen weiter, daß die beiden falschen Aussagen p_1 und p_4 inhaltlich dasselbe ausdrücken.

3. Berücksichtigen wir schließlich, daß in p_4 der Ausdruck „*es gibt keine ungerade Zahl*" eine gleichwertige Formulierung zu „*es ist nicht so, daß es eine ungerade Zahl gibt*" ist, so wird deutlich, daß p_4 Verneinung zu r ist. Damit ist wegen 2. auch p_1 Verneinung zu r.

——▶ 82

85

Folgende Einsetzungen waren notwendig bzw. möglich:

p: . . . *höchstens* . . .

Eine natürliche Zahl k hat auf keinen Fall mehr als k Teiler.

q: . . . *mindestens* . . .

Weniger als zwei spitze Innenwinkel kann ein ebenes Dreieck nicht haben.

r: Hier waren mehrere Einsetzungen möglich, und zwar:

. . . *mindestens* . . ., . . . *höchstens* . . .,

. . . *mindestens und höchstens* . . . sowie . . . *genau* . . . .

Die Funktion mit der Gleichung $y = \cot x$ hat nämlich nicht mehr, aber auch nicht weniger als vier Nullstellen zwischen -2π und $+2\pi$, d. h. sie hat in diesem Intervall **genau** vier Nullstellen.

→ 86

86

Im Zusammenhang mit der Ausdrucksweise „*genau ein*“ verdient der **bestimmte Artikel** genannt zu werden. Es ist sinnvoll, von *der* geraden Primzahl und *der* Lösung von $\lg x = 0$ (für $x > 0$) zu reden. Sinnlos dagegen ist es, von *der* Nullstelle der Sinusfunktion zu sprechen (sofern nicht durch zusätzliche Angaben hervorgeht, welche gemeint ist, bzw. wenn nicht durch Einschränkung des Definitionsbereiches genau eine Nullstelle existiert).

Allgemein darf der bestimmte Artikel „*der (die, das)*“ bzw. „*derjenige (diejenige, dasjenige)*“ auf irgendein Ding nur dann angewendet werden, wenn es dieses Ding nur **genau einmal** gibt. In allen anderen Fällen muß der unbestimmte Artikel „*ein(e)*“ verwendet werden.

→ 88

87

Um uns zu überlegen, wann eine Implikation eine wahre Aussage ist, betrachten wir folgendes Beispiel:

Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt: Wenn $a < b$ und $b < c$ ist, so ist $a < c$.

Diese Aussage ist bekanntlich wahr. Mithin muß im Einklang mit unseren Überlegungen zum Gebrauch der Redeweise „*für alle* ...“ für jede Wahl von speziellen natürlichen Zahlen als a, b, c die Aussageform

Wenn $a < b$ und $b < c$ ist, so ist $a < c$

zu einer wahren Aussage werden. Speziell sind demnach folgende Aussagen wahr:

Wenn $3 < 7$ und $7 < 12$, so $3 < 12$

Wenn $13 < 7$ und $7 < 20$, so $13 < 20$

Wenn $13 < 7$ und $7 < 9$, so $13 < 9$.

Betrachten wir in diesen Beispielen die Prämissen und die Konklusionen, so sehen wir, daß im ersten Beispiel Prämisse und Konklusion wahre Aussagen sind, im zweiten die Prämisse (*$13 < 7$ und $7 < 20$*) falsch und die Konklusion wahr ist und daß im dritten Beispiel sowohl Prämisse als auch Konklusion falsch sind.

→ 92

88

Wir wenden uns nun einer weiteren Verknüpfung von Aussagen zu, nämlich derjenigen durch „**wenn ... so ...**“.

Sind p, q Aussagen, so heiße die Aussage

wenn p, **so** q

eine **Implikation**. Wir nennen dabei p die **Prämisse** und q die **Konklusion** dieser Implikation.

→ 87

Aussage.

(2) **Eine beliebige Implikation ist nur in dem Falle eine falsche Aussage, in dem die zugehörige Prämisse wahr, die Konklusion jedoch falsch ist.**

(3) **Jede Implikation mit wahrer Konklusion ist eine wahre Aussage.**

→ 96

90 Aufgabe:

! Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr sind!

Für alle reellen x gilt: Wenn $x < 0$ gilt, so ist

(a) $\sqrt{x^2} = |x|$ → 98
(b) $\sqrt{x^2} = x$ → 104
(c) $\sqrt{x^2} = -x$ → 99
(d) $\sqrt{x^2} = \pm x$ → 104

91 Die in den Fällen (a) und (c) des Lehrschritts 90 sich ergebenden Aussagen sind wahr; für die restlichen trifft dies nicht zu.

Wir kommen nun zur nächsten **Übung**.

! Entscheiden Sie, welche der vier folgenden Aussagen wahr sind!

Für alle reellen und positiven x gilt: Wenn $\lg x < 0$, so

(a) $x < 1$ → 100
(b) $x < 10$ → 97
(c) $x > 1$ → 103
(d) $x > 10$ → 103

Da wir wie bei den früher betrachteten Aussagenverknüpfungen auch für die Verknüpfung von Aussagen durch „*wenn ... so ...*“ Extensionalität wünschen (d. h. die Wahrheit bzw. Falschheit einer Implikation „*Wenn p, so q*“ soll nur von der Wahrheit bzw. Falschheit von p, q abhängen), sind mit diesen Beispielen die erste, dritte und vierte Zeile der folgenden Tabelle für das Wahrheitsverhalten der Implikation schon festgelegt: **92**

p	q	*wenn p, so q*
W	*W*	*W*
W	*F*	*F*
F	*W*	*W*
F	*F*	*W*

Zur Motivierung der zweiten Zeile dieser Tabelle überlegen wir uns, daß es nicht sinnvoll wäre, eine Implikation mit wahrer Prämisse und falscher Konklusion als wahr anzusehen. Sonst wäre z. B.

Wenn $3 \cdot 3 = 9$, *so* $2 = 4$

eine wahre Aussage, und man könnte wie folgt argumentieren: Wenn $3 \cdot 3 = 9$ ist, so ist $2 = 4$; es ist aber $3 \cdot 3 = 9$, also ist $2 = 4$.

→ 89

! Entscheiden Sie nun, ob die nachstehende Aussage wahr ist! **93**

Für jede reelle Zahl x gilt:

Wenn x Lösung der Gleichung $x^2 + 1 = 0$ *ist, so ist x positiv.*

Sie ist wahr → 108

Sie ist nicht wahr → 109

94 Sie haben recht!

Für beliebige reelle x gilt $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, insbesondere also auch für solche x, die im Intervall $0 \leqq x < \frac{\pi}{2}$ liegen.

In den Fällen (a), (c), (d) des Lehrschritts 105 dagegen ergeben sich falsche Aussagen.

Zum Beweise dieser Behauptung genügt es, mindestens eine reelle Zahl aus dem Intervall $0 \leqq x < \frac{\pi}{2}$ so anzugeben, daß bei Einsetzen dieser Zahl für x die jeweilige Konklusion falsch wird.

Eine solche Zahl ist $\frac{\pi}{4}$ im Falle (a). Es gilt nämlich:

$$0 \leqq \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}, \quad \text{aber} \quad \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2} \neq 1.$$

In den Fällen (c) bzw. (d) sind 0 bzw. $\frac{\pi}{4}$ solche Zahlen.

→ 93

---

95 Ihre Entscheidung war falsch!

! Informieren Sie sich zunächst über wichtige Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen!

→ 106

---

96 Zur Vertiefung des Lehrstoffs über die Implikation behandeln wir folgendes Beispiel ausführlich:

Es ist zu entscheiden, ob folgende Aussage wahr ist!

Für alle reellen x gilt:

Wenn $x < 2$ gilt, so ist $5x < 10$.

→ 101

Sie haben recht!

Die im Falle (b) sich ergebende Aussage ist wahr.
Für alle reellen, positiven x mit $\lg x < 0$ gilt nämlich $x < 1$ und s
erst recht $x < 10$.

! Überprüfen Sie in Lehrschritt 91, ob es unter den angegeb
noch weitere wahre Aussagen gibt!

——91——▸

Sie haben recht!

Die im Falle (a) sich ergebende Aussage ist wahr, denn die Quadratw
ist nach Definition nicht negativ, d. h., für alle reellen x ist die Konkl
der zu betrachtenden Implikation wahr.

! Überprüfen Sie in Lehrschritt 90, ob es unter den angegeb
noch weitere wahre Aussagen gibt!

——90——

Sie haben recht!

Die im Falle (c) sich ergebende Aussage ist wahr, denn für alle nega
x ist $-x$ positiv, und die Quadratwurzel ist nach Definition nicht ne
(und Null nur für $x = 0$).

! Überprüfen Sie in Lehrschritt 90, ob es unter den angegeb
noch weitere wahre Aussagen gibt!

——90——

Sie haben recht!

Die im Falle (a) sich ergebende Aussage ist wahr, denn für alle x
$0 < x < 1$ ist $\lg x < 0$, und für alle x mit $1 \leqq x < \infty$ ist $\lg x \geqq 0$.

! Überprüfen Sie in Lehrschritt 91, ob es unter den angegeb
noch weitere wahre Aussagen gibt!

——91——▸

101

Wir haben also zu prüfen, ob die Aussageform

Wenn $x < 2$ gilt, so ist $5x < 10$

nach Einsetzen einer reellen Zahl für x stets eine wahre Aussage wird.

Bei der Lösung dieser Aufgabe unterscheiden wir zwei Fälle. Im ersten Fall nehmen wir an, daß eine solche reelle Zahl für x eingesetzt werde, für welche die Prämisse falsch ist (das trifft offenbar für alle reellen x mit $x \geqq 2$ zu).
Dann ist aber die zugehörige Implikation trivialerweise eine wahre Aussage (siehe Lehrschritt 89).

Deshalb wollen wir uns hier und auch in Zukunft nur mit dem Fall beschäftigen, in dem die Prämisse eine wahre Aussage ist.

In diesem zweiten Fall muß für x gelten

$$x < 2.$$

Nach den bekannten Regeln über das Rechnen mit Ungleichungen darf man diese Ungleichung mit der positiven reellen Zahl 5 multiplizieren. Demnach gilt für alle diese x auch

$$5x < 5 \cdot 2 = 10;$$

d. h., die Konklusion ist wahr für alle reellen x mit $x < 2$.

Insgesamt folgt damit, daß die Aussage

Für alle reellen x gilt: Wenn $x < 2$ gilt, so ist $5x < 10$

eine wahre Aussage ist.

In ähnlicher Weise können die folgenden Aufgaben behandelt werden.

→ 90

Sie kennen die Begriffe **Vereinigungs-** bzw. **Durchschnittsmenge** nicht mehr genau. Wir wollen sie deshalb wiederholen.

Eine Menge M entsteht durch Zusammenfassen gewisser Dinge zu einem Ganzen. Diese Dinge nennt man die Elemente der Menge M. Offensichtlich lassen sich auf sehr vielfältige Weisen Mengen bilden, etwa:

die Menge aller geraden Zahlen,
die Menge aller Primzahlen,
die Menge aller Lösungen der Gleichung $x - 7 = 0$.

Mitunter möchte man aus bekannten Mengen neue Mengen bilden, z. B. die Menge aller geraden Primzahlen (diese besteht aus dem einzigen Element 2). Kennt man schon die Menge G aller geraden Zahlen und die Menge P aller Primzahlen, so ist die Menge aller geraden Primzahlen genau die Menge aller **der** Elemente, die *sowohl* zur Menge G *als auch* zur Menge P gehören.

Die zu beliebigen vorgegebenen Mengen M, N entsprechend gebildete Menge aller der Elemente, die zu M *und* zu N gehören, nennt man die **Durchschnittsmenge** der Mengen M, N.

Betrachten wir die Menge aller Lösungen der Gleichung

$$x^2 - 6x - 7 = 0, \qquad (*)$$

so erkennen wir aus der Beziehung $x^2 - 6x - 7 = (x - 7)(x + 1)$, daß jede Lösung der Gleichung (*) Lösung der Gleichung $x - 7 = 0$ *oder* der Gleichung $x + 1 = 0$ ist. Da andererseits jede Lösung einer der Gleichungen $x - 7 = 0$ bzw. $x + 1 = 0$ auch Lösung der Gleichung (*) ist, haben wir erhalten, daß die Menge aller Lösungen der Gleichung (*) gerade aus allen den Elementen besteht, die zur Menge aller Lösungen der Gleichung $x - 7 = 0$ *oder* zur Menge aller Lösungen der Gleichung $x + 1 = 0$ gehören.

Die zu beliebigen vorgegebenen Mengen M, N entsprechend gebildete Menge aller der Elemente, die zu M *oder* zu N gehören, nennt man die **Vereinigungsmenge** der Mengen M, N.

Stellen wir uns die Mengen M, N durch schraffierte Flächenstücke dar (s. Abb. 5), so wird die Vereinigungsmenge von M, N durch das gesamte schraffierte Flächenstück dargestellt und die Durchschnittsmenge von M, N durch das doppelt schraffierte Flächenstück.

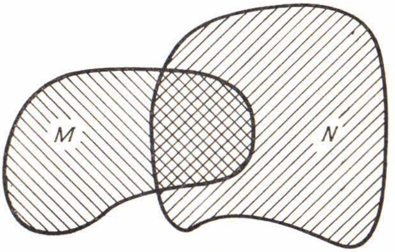


Abb. 5

→ 46

103 Ihre Entscheidung war falsch!

Wir wiederholen einige wichtige Eigenschaften der **Logarithmusfunktion** zur Basis 10.

Definition: Unter dem Logarithmus einer positiven Zahl c zur Basis 10 (in Zeichen $\lg c$) versteht man diejenige reelle Zahl x, für die gilt $10^x = c$.

Wegen der eindeutigen Zuordnung, die zwischen x und c besteht, ist damit eine Funktion (die Logarithmusfunktion) festgelegt, deren graphische Darstellung in der Abb. 6 gegeben ist.

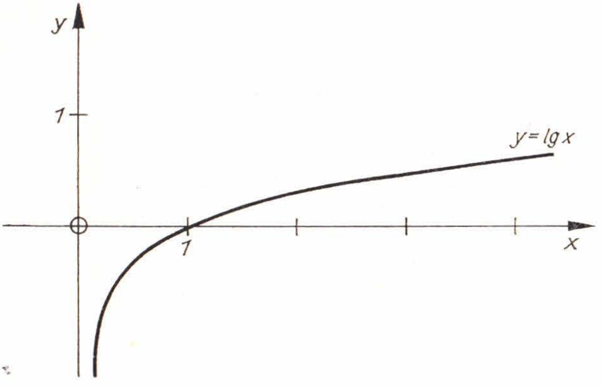


Abb. 6

Wir stellen fest:

1) Der Definitionsbereich dieser Funktion besteht aus allen positiven reellen Zahlen x. Der Wertevorrat (Bildbereich) dieser Funktion besteht aus allen reellen Zahlen y.
2) Die Vorzeichenverteilung gibt die folgende Tabelle an:

x	< 1	$= 1$	> 1
$\lg x$	< 0	$= 0$	> 0

Zur Lösung der gestellten Aufgabe beachten Sie evtl. noch folgende Gesetze:

3) Für alle positiven reellen Zahlen x, x_1 und x_2 und alle natürlichen Zahlen $n \neq 0$ gilt:

$$\lg(x_1 \cdot x_2) = \lg x_1 + \lg x_2 \qquad \lg x^n = n \lg x$$

$$\lg \frac{x_1}{x_2} = \lg x_1 - \lg x_2 \qquad \lg \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \lg x$$

! Kehren Sie zu dem Lehrschritt zurück, der von Ihnen eine Entscheidung verlangte und entscheiden Sie nochmals!

Kamen Sie von Lehrschritt 35, so ——▶ 28

Kamen Sie von Lehrschritt 91, so ——▶ 91

Ihre Entscheidung war falsch. Möglicherweise lag es mit daran, daß Sie den Begriff der Quadratwurzel nicht in vollem Umfang erfaßt haben. Wir wollen ihn daher an dieser Stelle erläutern. **104**

Definition:

> Unter der **Quadratwurzel** aus einer nichtnegativen reellen Zahl a (in Zeichen $\sqrt{a}$) versteht man diejenige nichtnegative reelle Zahl b, für die gilt $a^2 = b$.

Beachten Sie insbesondere:

(1) Eine Quadratwurzel ist nur für nichtnegative reelle Zahlen a, d. h. für die positiven reellen Zahlen und die Zahl Null erklärt ($a \geqq 0$); Ausdrücke wie $\sqrt{-9}$, allgemein $\sqrt{x}$ für $x < 0$, sind nicht erklärt.

(2) Zu jeder nichtnegativen reellen Zahl a gibt es **genau eine** Quadratwurzel.

(3) Jede Quadratwurzel ist nichtnegativ ($\sqrt{a} \geqq 0$).

Im Hinblick auf die zu lösende Aufgabe wollen wir vor allem Punkt (3) hervorheben. So stellt z. B. die Gleichung $\sqrt{16} = -4$ eine falsche Aussage dar; denn $\sqrt{16}$ hat auf Grund der Definition der Quadratwurzel den Wert 4 (und nicht -4).
Als weiteres Beispiel sei die Gleichung $\sqrt{9} = x$ angeführt. Diese Gleichung ist im Bereich der negativen reellen Zahlen ($x < 0$) nicht lösbar.

! Überdenken Sie die im Lehrschritt 90 gestellte Aufgabe nochmals!

——► 90

Im Lehrschritt 91 sind (a) und (b) die Fälle, in denen sich eine wahre Aussage ergibt. Für die restlichen Fälle trifft dies nicht zu. **105**

! Entscheiden Sie in einer weiteren Übungsaufgabe, welche der folgenden vier Aussagen wahr sind!

Für alle reellen x gilt:

Wenn $0 \leqq x < \frac{\pi}{2}$, *so* (a) $\sin x + \cos x = 1$ ——► 95

(b) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ——► 94

(c) $\sin x / \cos x = 1$ ——► 95

(d) $|\sin x| + |\cos x| = 1$ ——► 67

106 Wir wiederholen wichtige Eigenschaften der **trigonometrischen Funktionen** und geben zunächst graphische Darstellungen.

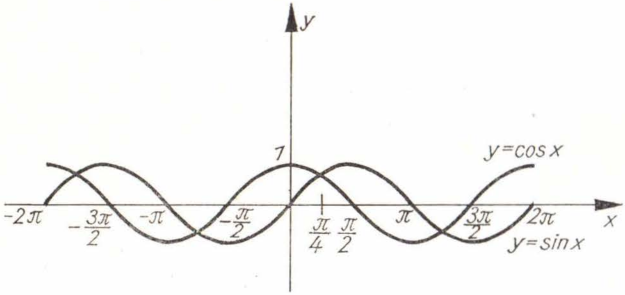


Abb. 7

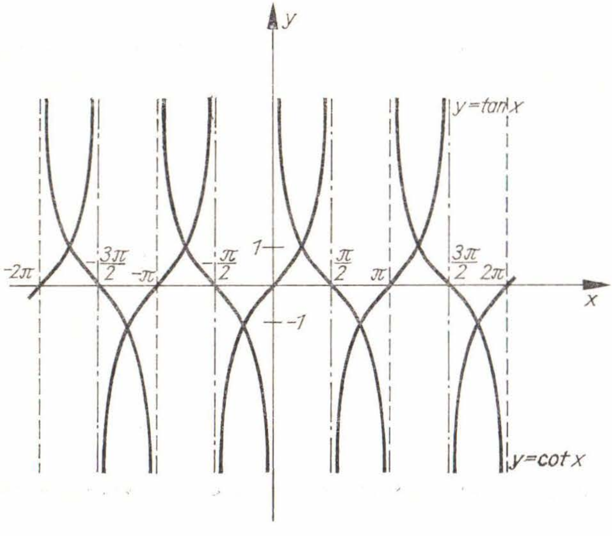


Abb. 8

Aus den graphischen Darstellungen wird deutlich:

1) Die Sinus- und die Kosinusfunktion sind periodische Funktionen mit der Periode 2π.

2) Für alle reellen x gilt: $|\sin x| \leqq 1$, $|\cos x| \leqq 1$.

3) Im Intervall $-2\pi < x < 2\pi$ ist die Tangensfunktion an den Stellen $x = -\frac{3}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$, die Kotangensfunktion an den Stellen $x = -\pi, 0, \pi$ nicht erklärt.

4) Im Intervall $-2\pi < x < 2\pi$ sind die Vorzeichen so verteilt, wie die Tabelle in Lehrschritt 107 oben angibt.

→ 107

107

	$(-2\pi, -\frac{3}{2}\pi)$ $(0, \frac{\pi}{2})$	$(-\frac{3}{2}\pi, -\pi)$ $(\frac{\pi}{2}, \pi)$	$(-\pi, -\frac{\pi}{2})$ $(\pi, \frac{3}{2}\pi)$	$(\frac{\pi}{2}, 0)$ $(\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$
$\sin x$	>0	>0	<0	<0
$\cos x$	>0	<0	<0	>0
$\tan x$	>0	<0	>0	<0
$\cot x$	>0	<0	>0	<0

Des weiteren gilt:

Für alle reellen x aus dem Intervall $-2\pi < x < 2\pi$ und $x \neq -\pi, 0, \pi$ ist $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Für alle reellen x gilt

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Spezielle Werte der trigonometrischen Funktionen sind:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht erklärt
$\cot x$	nicht erklärt	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

! Überdenken Sie die angegebenen Eigenschaften und Sachverhalte! Beachten Sie dann

Kamen Sie von Lehrschritt 32, so ⟶ 28

Kamen Sie von Lehrschritt 49, so ⟶ 49

Kamen Sie von Lehrschritt 67, so entscheiden Sie erneut in ⟶ 118

Kamen Sie von Lehrschritt 95, so entscheiden Sie erneut in ⟶ 105

108

Richtig!

Die Redeweise „*für jede reelle Zahl x gilt*“ bezieht sich auf eine Implikation.

Da deren Prämisse „*x ist Lösung der Gleichung $x^2 + 1 = 0$*“ für reelles x stets falsch ist, trifft die Implikation insgesamt für jede reelle Zahl x zu.

——▶ 110

109

Ihre Entscheidung ist falsch! Vermutlich haben Sie sich davon leiten lassen, daß es keine reelle Zahl x gibt, für die die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ erfüllt ist. Die Aussage

Für jede reelle Zahl x gilt: Wenn x Lösung der Gleichung $x^2 + 1 = 0$ ist, so ist x positiv

ist dennoch wahr.

Das ist darauf zurückzuführen, daß in der Implikation die Prämisse *x ist Lösung der Gleichung $x^2 + 1 = 0$* für alle reellen x falsch ist und jede Implikation mit falscher Prämisse wahr ist.

Somit ist die Aussage

Für jede reelle Zahl x gilt: Wenn $x^2 + 1 = 0$, so $x > 0$

gerade deshalb wahr, weil es keine reelle Zahl gibt, die die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ erfüllt.

! Durchdenken Sie den Sachverhalt nochmals!

Danach ——▶ 110

Achten Sie in der nun folgenden Aufgabe besonders auf den richtigen Umgang mit dem absoluten Betrag! **110**

Aufgabe: Welche der folgenden fünf Aussagen sind (ist) wahr?

Für alle reellen Zahlen a und b gilt:

Wenn $a < 1$ und $b < 15$, so ist	(a)	$\lvert ab\rvert < 15$
	(b)	$\lvert a\rvert \cdot b < 15$
	(c)	$ab < 15$
	(d)	$\lvert a\rvert + \lvert b\rvert < 16$
	(e)	$a + b < 16$

Überlegen Sie gut, bevor Sie Ihre Lösung festhalten!

Angabe der (des) Buchstaben(s) genügt!

Ihre **Lösung**: . . . .

Dann → 111

Lösung: Nur die im Falle (e) entstehende Aussage ist wahr. **111**

Aus den Ungleichungen $a < 1$ und $b < 15$ erhält man durch Addition $a + b < 16$. Daher ist die im Falle (e) entstehende Aussage wahr. Wir müssen noch zeigen, daß in allen anderen Fällen falsche Aussagen vorliegen. Dazu genügt es zum Beispiel im Falle (a), eine reelle Zahl a mit $a < 1$ und eine reelle Zahl b mit $b < 15$ so anzugeben, daß die Ungleichung $\lvert ab\rvert < 15$ nicht erfüllt ist.

Setzt man zum Beispiel für a und b die reelle Zahl -10 ein, dann gilt offenbar: $-10 < 1$ und $-10 < 15$, aber $\lvert(-10)\cdot(-10)\rvert = 100 > 15$; d. h. die Aussage

Für alle reellen a und b gilt:

Wenn $a < 1$ und $b < 15$, so ist $\lvert ab\rvert < 15$

ist falsch.

Entsprechend verfährt man in den restlichen Fällen; zu wählen sind dann zum Beispiel im Falle

(b) $a = -10$, $b = 10$ (d. h. $\lvert a\rvert \cdot b = 100 > 15$),
(c) $a = -10$, $b = -10$ (d. h. $ab = 100 > 15$),
(d) $a = -10$, $b = -10$ (d. h. $\lvert a\rvert + \lvert b\rvert = 20 > 16$).

→ 112

112

Mitunter ist es schwierig, von einer gegebenen Implikation (I) festzustellen, ob sie wahr ist. Man kann sich dann u. U. dadurch helfen, daß man von dieser Implikation

(I) *Wenn p, so q*

übergeht zur Implikation

(K) *Wenn nicht-q, so nicht-p,*

deren Wahrheit evtl. leichter festzustellen ist. Man nennt (K) die **Kontraposition** der Implikation (I).

→ 113

113

Weiß man, daß (K) wahr ist, so weiß man auch, daß (I) wahr ist. Denn die Implikationen (I), (K) sind entweder beide wahr oder beide falsch.

Begründung: Ist nämlich (I) falsch, so ist p wahr und q falsch, also *nicht-q* wahr und *nicht-p* falsch und daher auch (K) falsch. Ist andererseits (K) falsch, so ist *nicht-q* wahr und *nicht-p* falsch, also p wahr und q falsch, d. h. (I) ist falsch. Daher können weder zugleich (I) wahr und (K) falsch sein (denn mit (K) müßte auch (I) falsch sein) noch können zugleich (I) falsch und (K) wahr sein.

→ 115

114

Im Lehrschritt 101 wurde gezeigt, daß die Aussage

Für alle reellen x gilt: Wenn $x < 2$, so $5x < 10$

eine wahre Aussage ist. Völlig analog kann man zeigen, daß auch die Aussage

Für alle reellen x gilt: Wenn $5x < 10$, so $x < 2$

eine wahre Aussage ist. Man benutzt wieder die bekannten Regeln für das Rechnen mit Ungleichungen.
So folgt für alle reellen x aus der Ungleichung $5x < 10$ durch Multiplikation mit der positiven Zahl $\frac{1}{5}$ die Ungleichung $x < 2$, also die Wahrheit der Konklusion aus der Wahrheit der Prämisse und damit die Wahrheit der Aussage.

→ 116

115

Wir wollen die Nützlichkeit des Übergangs zur Kontraposition an einem Beispiel einsehen und betrachten die Aussage

> *Für jedes Dreieck Δ gilt: Wenn Umkreismittelpunkt und Schwerpunkt von Δ voneinander verschieden sind, so ist Δ nicht gleichseitig.*

Statt für jede spezielle Wahl eines Dreiecks als Δ die Wahrheit der Aussageform

> *Wenn Umkreismittelpunkt und Schwerpunkt von Δ voneinander verschieden sind, so ist Δ nicht gleichseitig*

zu überprüfen, können wir auch die Wahrheit der jeweiligen Kontrapositionen

> *Ist Δ gleichseitig, so sind Umkreismittelpunkt und Schwerpunkt von Δ gleich*

überprüfen. Zur ursprünglich angegebenen Formulierung ist also gleichwertig die Formulierung

> *Für jedes Dreieck Δ gilt: Ist Δ gleichseitig, so sind Umkreismittelpunkt und Schwerpunkt von Δ gleich.*

In dieser Form ist die Aussage jedoch aus dem Geometrieunterricht als wahr bekannt.

——► 114

116

Diese besondere Situation, daß sowohl die Implikation „*wenn p, so q*" als auch die Implikation „*wenn q, so p*" wahre Aussagen sind, wird durch besondere Ausdrucksweisen gekennzeichnet. Man sagt in diesem Falle:

> *p (gilt)* **genau dann, wenn** *q (gilt)* bzw.
>
> *p (gilt)* **dann und nur dann,** *wenn q (gilt).*

Es ist also speziell

> *Für alle reellen x gilt:* $x < 2$ *genau dann, wenn* $5x < 10$

eine wahre Aussage.

——► 119

117

Nun sollen Sie sich an Hand einiger Übungsaufgaben selbst in der Anwendung der Ausdrucksweisen „*genau dann, wenn*“ bzw. „*dann und nur dann*“ üben.

! Entscheiden Sie, welche der folgenden drei Aussagen wahr sind!

Für alle reellen x gilt:

$-2\lg x = \lg \frac{1}{x^2}$ *genau dann, wenn*

(a) $x > 0$ ——▶ 129

(b) $x < 0$ ——▶ 124

(c) $|x| > 10$ ——▶ 128

$= \lg 1 - \lg x^2$

$= 0 - (\lg x + \lg x)$

$= -2\lg x$

118

Eine weitere Aufgabe:

! Entscheiden Sie, welche der folgenden vier Aussagen wahr sind!

Lesen Sie nicht flüchtig darüber hinweg!

Prüfen Sie die angebotenen Fälle genau, und entscheiden Sie dann!

Für alle reellen x aus dem Intervall $-2\pi < x < 2\pi$ gilt:

$-\frac{x \cos x}{|x \sin x|} = \cot x$ *genau dann, wenn*

(a) $x > 0$ ——▶ 125

(b) $x < 0$ ——▶ 127

(c) $-\pi > x > -2\pi$ ——▶ 126

(d) $-\pi > x > -2\pi$ *oder*

$\pi < x < 2\pi$ ——▶ 130

Ein weiteres Beispiel für eine wahre Aussage ist:

Für alle reellen x gilt:

$x^2 + 2x + 1 = 0$ *genau dann, wenn* $x + 1 = 0$.

Der Beweis der Behauptung über die Wahrheit dieser Aussage, die die neue Ausdrucksweise „*genau dann, wenn*" enthält, muß in zwei Schritten erfolgen. Setzt man für x eine beliebige reelle Zahl a ein, dann muß für a gezeigt werden, daß dann die Aussage

$a^2 + 2a + 1 = 0$ *genau dann, wenn* $a + 1 = 0$

wahr ist. Im ersten Schritt zeigt man jetzt die Wahrheit der Aussage

Wenn $a^2 + 2a + 1 = 0$, *so* $a + 1 = 0$,

im zweiten die Wahrheit der Aussage

Wenn $a + 1 = 0$, *so* $a^2 + 2a + 1 = 0$.

Beide Beweise sind leicht zu führen, denn es gilt:

$$a^2 + 2a + 1 = (a + 1)(a + 1).$$

Außerdem benutzt man noch die folgende, bekannte Eigenschaft reeller Zahlen:

Ein Produkt aus zwei beliebigen reellen Zahlen ist Null genau dann, wenn mindestens einer der Faktoren gleich Null ist.

————► 117

120

Die Lösungen der Aufgabe lauten:

$a < 1$ *und* $b < 15$ *ist* **hinreichend** *für* $a + b < 16$

$x < 0$ *ist* **hinreichend** *für* $\sqrt{x^2} = |x|$

$x^2 > 0$ *ist* **notwendig** *für* $x > 0$.

——————▶ 132

121

Im Zusammenhang mit der Redeweise „*wenn . . . so . . . .*" steht die Redeweise „**aus . . . folgt . . .**". Betrachten wir dazu die wahre Aussage (c) aus Lehrschritt 90!

Für alle reellen x *gilt: Wenn* $x < 0$, *so* $\sqrt{x^2} = -x$.

In diesem Fall kann man auch sagen:

Aus $x < 0$ *folgt* $\sqrt{x^2} = -x$,

wobei x eine beliebige reelle Zahl bedeutet. Anders gesprochen, jede reelle Zahl x, die $x < 0$ erfüllt, erfüllt auch $\sqrt{x^2} = -x$. In ähnlicher Weise läßt sich auch bei den anderen Übungsbeispielen zur Implikation der Zusammenhang zwischen „*wenn . . . so . . . .*" und „*aus . . . . folgt . . . . .*" herstellen. Beispielsweise ist es im Falle der wahren Aussage (e) aus Lehrschritt 110

Für alle reellen Zahlen a *und* b *gilt:*

Wenn $a < 1$ *und* $b < 15$, *so ist* $a + b < 16$

so, daß $a + b < 16$ aus $a < 1$ und $b < 15$ folgt, und zwar für beliebige reellen Zahlen a und b. Alle reellen Zahlen a und b, die $a < 1$ und $b < 15$ erfüllen, erfüllen auch $a + b < 16$.

——————▶ 123

122

Aufgabe: Setzen Sie in die freien Stellen der nachstehenden Ausdrücke „*notwendig*" bzw. „*hinreichend*" so ein, daß der betreffende Sachverhalt richtig wiedergegeben wird! a, b und x bedeuten hierbei beliebige reelle Zahlen. Denken Sie sich vorher den jeweiligen Sachverhalt in der Form „*aus . . . folgt . . .*" dargestellt!

$a < 1$ *und* $b < 15$ *ist* hinreichend . . . *für* $a + b < 16$

$x < 0$ *ist* hinreichend . . . *für* $\sqrt{x^2} = |x|$

$x^2 > 0$ *ist* notwendig . . . *für* $x > 0$.

▶ 120

123

Häufig gebraucht man im Zusammenhang mit der Redeweise „*aus . . . folgt . . .*" die Begriffe „*hinreichend*" sowie „*notwendig*" bzw. „*hinreichende Bedingung*", „*notwendige Bedingung*".

So sagt man etwa im Fall von „*Aus* $x < 0$ *folgt* $\sqrt{x^2} = -x$":

Das Erfülltsein von $x < 0$ ist **hinreichend** (im Sinne von: *es reicht aus*) für das Erfülltsein von $\sqrt{x^2} = -x$; kürzer:

$x < 0$ *ist* **hinreichend** *für* $\sqrt{x^2} = -x$ bzw.

$x < 0$ *ist eine* **hinreichende Bedingung** *für* $\sqrt{x^2} = -x$.

Hierbei bedeutet x eine beliebige reelle Zahl.

Andererseits sagt man in gleichem Zusammenhang:

Das Erfülltsein von $\sqrt{x^2} = -x$ ist **notwendig** für das Erfülltsein von $x < 0$; bzw.

$\sqrt{x^2} = -x$ *ist* **notwendig** *für* $x < 0$

$\sqrt{x^2} = -x$ *ist eine* **notwendige Bedingung** *für* $x < 0$.

Notwendig ist hier in dem Sinn gemeint, daß, wenn $\sqrt{x^2} = -x$ **nicht** erfüllt ist, auch $x < 0$ **nicht** erfüllt ist. (Vergleiche dazu die Ausführungen zur Kontraposition einer Implikation im Lehrschritt 113.)

▶ 122

124 Das ist nicht richtig, denn für alle reellen x mit $x < 0$ ist $\lg x$ nicht erklärt!

! Entscheiden Sie nochmals!

→ 117

---

125 Ihre Entscheidung in Lehrschritt 118 ist falsch!

Für alle x mit $0 < x < \frac{\pi}{2}$ zum Beispiel ist

$$-\frac{x \cos x}{|x \sin x|} = -\frac{x \cos x}{x \sin x} = -\cot x\,.$$

→ 131

---

126 Ihre Entscheidung in Lehrschritt 118 für die Wahrheit der Aussage

Für alle reellen x aus dem Intervall $-2\pi < x < 2\pi$ gilt:

$$-\frac{x \cos x}{|x \sin x|} = \cot x \textit{ genau dann, wenn } -\pi > x > -2\pi$$

ist nicht richtig, denn für alle x mit $\pi < x < 2\pi$ (und dieses Intervall gehört zu $-2\pi < x < 2\pi$) ist $|\sin x| = -\sin x$, also auch

$$-\frac{x \cos x}{|x \sin x|} = \frac{x \cos x}{x \sin x} = \cot x,$$

d. h., für jedes solche x ist die Implikation

$$\textit{Wenn } -\frac{x \cos x}{|x \sin x|} = \cot x, \textit{ so } -\pi > x > -2\pi$$

falsch.
Vielleicht wird Ihnen Ihr Fehler deutlich, wenn Sie „*genau dann, wenn*“ durch „*dann und nur dann*“ ersetzen.

→ 131

---

127 Ihre Entscheidung in Lehrschritt 118 ist falsch!

Für alle x mit $-\frac{3}{2}\pi < x < -\pi$ zum Beispiel ist

$$-\frac{x \cos x}{|x \sin x|} = -\frac{x \cos x}{x \sin x} = -\cot x\,.$$

→ 131

Das ist nicht richtig, denn die Forderung $|x| > 10$ läßt auch Werte von x mit $x < -10$ zu, für die $\lg x$ gar nicht erklärt ist. **128**

! Entscheiden Sie nochmals!

→ 117

Richtig! Fall (a) (Lehrschritt 117) ergibt eine wahre Aussage, die beiden anderen Fälle nicht. **129**

Die Funktion mit der Gleichung $y = \lg x$ ist nur für positive x erklärt, deshalb hat die linke Seite der Gleichung

$$-2 \lg x = \lg \frac{1}{x^2}$$

nur für positive x einen Sinn.

→ 118

Sie haben recht! Nur der Fall (d) des Lehrschritts 118 liefert eine wahre Aussage. **130**

Für alle $-\pi > x > -2\pi$ (bzw. $\pi < x < 2\pi$) gilt nämlich

$$-\frac{x \cos x}{|x \sin x|} = -\frac{x \cos x}{|x| \sin x} = \frac{x \cos x}{x \sin x} = \cot x,$$

$$\text{da } |x| = -x \quad \text{und} \quad \sin x > 0$$

(bzw.

$$-\frac{x \cos x}{|x \sin x|} = -\frac{x \cos x}{x\,|\sin x|} = \frac{x \cos x}{x \sin x} = \cot x,$$

$$\text{da } x > 0 \quad \text{und} \quad |\sin x| = -\sin x).$$

Andererseits folgt aus der Gültigkeit der Gleichung $-\frac{x \cos x}{|x \sin x|} = \cot x$, daß sich x im Intervall $-\pi > x > -2\pi$ *oder* im Intervall $\pi < x < 2\pi$ befinden muß.

→ 121

! Frischen Sie Ihre Kenntnisse über den absoluten Betrag (Lehrschritt 67) und die trigonometrischen Funktionen (Lehrschritt 106/107) auf, und entscheiden Sie dann — nach gründlicher Prüfung der angebotenen Fälle — in 118 nochmals! **131**

—67—106/107

118 ←

132 Im Lehrschritt 116 hatten wir die Redeweise „*genau dann, wenn*" eingeführt. Als erstes Beispiel diente die wahre Aussage

Für alle reellen x gilt: $x < 2$ genau dann, wenn $5x < 10$.

Unter Verwendung der Redeweise „*aus . . . folgt . . .*" kann man dafür auch sagen

Aus $x < 2$ folgt $5x < 10$ und aus $5x < 10$ folgt $x < 2$.

In diesem Zusammenhang gebraucht man auch die Redeweise „. . . **äquivalent zu** . . .". Also

$x < 2$ ist äquivalent zu $5x < 10$,

d. h., alle reellen Zahlen, die $x < 2$ erfüllen, erfüllen auch $5x < 10$ und umgekehrt.
Dementsprechend kann man auch formulieren

$x < 2$ ist notwendig und hinreichend für $5x < 10$.

→ 133

133

Damit sind Sie am Ende des Lehrmaterials angelangt. Wir hoffen, daß Ihnen die Bearbeitung Freude bereitet hat und daß Sie eine Grundlage erhalten haben, die Ihnen hilft, mathematischen Text zu verstehen und sich klar und unmißverständlich auszudrücken.

! Lesen Sie bitte noch aufmerksam die folgende Zusammenfassung!

Zusammenfassung

1. Als **Aussagen** bezeichnen wir die durch Aussagesätze ausdrückbaren Inhalte. Aussagen sind Beschreibungen von Sachverhalten. Wahre Aussagen sind zutreffende Beschreibungen von Sachverhalten; falsche Aussagen sind unzutreffende Beschreibungen von Sachverhalten.

2. Die Aussage, die das logische Gegenteil einer vorgegebenen Aussage ausdrückt, nennt man die **Negation** der vorgegebenen Aussage.
Die Negation einer wahren Aussage ist eine falsche Aussage; die Negation einer falschen Aussage ist eine wahre Aussage.

3. Die Verknüpfung irgend zweier Aussagen durch „*oder*" heißt eine **Alternative**.
Eine Alternative ist wahr in genau den Fällen, in denen mindestens eine der verknüpften Aussagen wahr ist.
Die Verknüpfung irgend zweier Aussagen durch „*und*" heißt eine **Konjunktion**.
Eine Konjunktion ist wahr genau in den Fällen, in denen beide verknüpften Aussagen wahr sind.

4. Die Negation einer Alternative zweier Aussagen kann man formulieren als Konjunktion der Negationen dieser Aussagen.
Die Negation einer Konjunktion zweier Aussagen kann man formulieren als Alternative der Negationen dieser Aussagen.

5. Durch die Redeweise „**für alle . . .**" wird ausgedrückt, daß eine bestimmte Eigenschaft für alle Elemente eines gewissen Bereiches zutrifft.
Die Redeweise „**es gibt ein . . .**" wird stets im Sinne von „**es gibt mindestens ein . . .**" gebraucht.

6. Für eine vorgegebene Eigenschaft gilt, daß die beiden Aussagesätze

Nicht alle x haben diese Eigenschaft

Es gibt ein x, das diese Eigenschaft nicht hat

bzw.

Es gibt kein x, das die Eigenschaft hat

Alle x haben diese Eigenschaft nicht

jeweils ein und denselben Sachverhalt wiedergeben.

7. Die Redeweise „**es gibt genau ein . . .**" besagt, daß es von Dingen einer bestimmten Art *eines und nicht mehr* gibt.
Durch die Redeweise „**es gibt höchstens ein . . .**" wird ausgedrückt, daß es auf keinen Fall mehr als ein Ding einer bestimmten Art gibt.

8. Der bestimmte Artikel „**der (die, das)**" darf auf ein Ding nur angewendet werden, wenn es dieses Ding genau einmal gibt.

9. Die Verknüpfung irgend zweier Aussagen durch „*wenn . . . so*" heißt eine **Implikation**; die erste der verknüpften Aussagen heißt Prämisse, die

zweite Konklusion der jeweiligen Implikation. Eine Implikation ist wahr genau in den Fällen, in denen die Konklusion wahr oder die Prämisse falsch ist.

10. „*p* **genau dann, wenn** *q*" (bzw. gleichbedeutend „*p* **dann und nur dann, wenn** *q*") besagt, daß sowohl „*wenn p, so q*" als auch „*wenn q, so p*" wahre Aussagen sind.

11. Alle genannten Aussagenverknüpfungen sind **extensional**, d. h. ihre Wahrheit bzw. Falschheit hängt nur von der Wahrheit bzw. Falschheit der verknüpften Aussagen ab.

12. Mit der Implikation bzw. der Formulierung „. . . *genau dann, wenn* . . ." zusammenhängende Formulierungen sind „*aus . . . folgt . . .*", „. . . *ist notwendig für . . .*", „. . . *ist hinreichend für . . .*" bzw. „. . . *ist äquivalent zu . . .*", „. . . *ist notwendig und hinreichend für . . .*".

ENDE DES PROGRAMMS

Für Ihr aufmerksames Mitgehen sei Ihnen gedankt!