Dietmar Haase

Angewandte Mathematik für Ingenieure

Ein Lehr- und Übungsbuch
ab dem ersten Semester

Band 1

Mengen

Dietmar Haase

Angewandte Mathematik für Ingenieure

Band 1: Mengen

Dipl. Phys. Dietmar Haase

Angewandte Mathematik für Ingenieure

Ein Lehr- und Übungsbuch
ab dem ersten Semester

Mit 73 Beispielen , 111 Abbildungen und über
400 Übungsaufgaben mit ausführlichen Lösungen

Band 1

Mengen

Vorwort

Die Reihe *angewandte Mathematik für Ingenieure* richtet sich in erster Linie an Studierende der ingenieurwissenschaftlichen Fakultäten an Universitäten, aber auch an diejenigen der Fachhochschulen, die sich im Grundstudium ihrer Ausbildung befinden. Der direkte Wechsel von der Schulmathematik in die Hochschulmathematik bereitet vielen Studierenden erhebliche Schwierigkeiten, weil sie zum einen mit dem Tempo des in der Vorlesung behandelten Stoffes und zum anderen mit der enorm gestiegenen Abstraktionsfähigkeit überfordert sind. Von den Studierenden wurde vielfach der Wunsch geäußert, ein Buch zu schreiben, das die für den Ingenieur wichtigen mathematischen Teilgebiete in möglichst anschaulicher Weise darstellt und eine große Anzahl an Übungsaufgaben mit ausführlichen Lösungen bereitstellt. Aus diesem Anliegen sind schließlich 13 Bände geworden, die den Inhalt der Lehrveranstaltungen Analysis, lineare Algebra und Differenzialgleichungen im Grundstudium zum größten Teil abdecken.

Für den Ingenieur werden die zum Teil sehr abstrakten Beweise der Sätze oft nur als lästiger Ballast empfunden und werden daher allzu gerne überflogen oder sogar vollständig ignoriert, obwohl sie für das Verständnis der mathematischen Zusammenhänge unverzichtbar sind. Daher wurde hier besonders Wert auf eine anschauliche Beweisführung gelegt, die auch für Nichtmathematiker verständlich und nachvollziehbar ist. Das Hauptanliegen dieser Reihe besteht aber vor allem darin, das mathematische „Handwerkszeug“, das zum Lösen einer Aufgabe unabdingbar ist, zu vermitteln. Dazu finden Sie im Text neben den zahlreich eingefügten Beispielen nach jedem Kapitel eine Vielzahl von Übungsaufgaben, an denen Sie den vermittelten Stoff festigen können. Im Unterschied zu den meisten anderen Lehrbüchern der Mathematik sind hier die ausführlichen Lösungen aller Übungsaufgaben im letzten Kapitel angegeben und nehmen auch den größten Umfang dieses Bandes ein. Damit sich die Lösung einer Übungsaufgabe schnell finden lässt, ist im Kapitel Lösungen der Übungsaufgaben zur Orientierung die Aufgabennummer links beziehungsweise rechts oben auf jeder Seite auf schwarzem Hintergrund dargestellt.

Bevor Sie eine Übungsaufgabe bearbeiten, sollten Sie sich zuerst mit den Grundlagen, die für die Lösung dieser Aufgabe nötig sind, genaustens vertraut machen. Dazu dienen neben diesem Buch in erster Linie die Vorlesungsskripte und die Ihnen angebotenen Tutorien, aber auch andere geeignete Mathematikbücher können dabei hilfreich sein. Machen Sie auf keinen Fall den Fehler, sich sofort die Lösung einer Übungsaufgabe anzuschauen, sondern versuchen Sie selbst erst einmal einen Lösungsansatz zu finden. Das kann unter Umständen schon einmal bis zu mehreren Stunden dauern. Oft gibt es auch mehrere Lösungswege, die zum Ziel führen, die vielleicht auch kürzer sind als die Lösung, die in diesem Buch angeboten wird. Eine gewisse Routine bei der Lösung eines mathematischen Problems stellt sich erfahrungsgemäß aber erst dann ein, wenn Sie eine größere Anzahl von Übungsaufgaben selbstständig bearbeitet haben.

Dieser erste Band angewandte Mathematik für Ingenieure ist als Einstieg in die sogenannte höhere Mathematik zu verstehen. Vermittelt werden hier zunächst einige Grundlagen aus der Mengenlehre und die drei wichtigsten Beweismethoden (direkter Beweis, indirekter Beweis, vollständige Induktion), ohne die die höhere Mathematik nicht zu betreiben wäre. Neben Gleichungen spielen in der Mathematik Ungleichungen eine außerordentlich wichtige Rolle, da sich viele Aussagen erst mithilfe von Ungleichungen beweisen lassen. Daher ist diesem Themenkomplex ein eigenes Kapitel gewidmet worden. Für manche Anwendungen, zum Beispiel aus der Elektrotechnik oder aus der Mechanik, ist es von Vorteil, die Menge der reellen Zahlen auf die Menge der komplexen Zahlen zu erweitern, da sich dadurch erhebliche Rechenvorteile ergeben. Aus diesem Grund nehmen die komplexen Zahlen einen relativ großen Raum in diesem Buch ein. Vorausgesetzt werden hier gewisse mathematische Grundkenntnisse, wie sie etwa in Grundkursen der gymnasialen Oberstufe oder der Fachoberschulen vermittelt werden. Das sind insbesondere die Potenz- und Wurzelrechnung, binomischen Formeln, binomische Ergänzung, Polynomdivision, das Lösen von linearen und quadratischen Gleichungen sowie die Grundlagen der Exponentialfunktion, Logarithmusfunktion und den trigonometrischen Funktionen. Falls Ihnen diese Grundlagen nicht oder nur lückenhaft vertraut sein sollten, empfehlen sich zur Aufarbeitung die ausgezeichneten und leicht verständlichen Lehrbücher von Lothar Kusch [1].

Berlin im Winter 2016 Dietmar Haase

Inhaltsverzeichnis

1 Grundzüge der Mengenlehre **1**
1.1 Mengenbegriff, Elemente einer Menge 1
1.2 Die Zahlenmengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 3
1.3 Mengenverknüpfungen 8
1.4 Übungsaufgaben 13

2 Mathematische Beweismethoden **15**
2.1 Direkter Beweis 15
2.2 Indirekter Beweis 16
2.3 Vollständige Induktion 17
2.4 Übungsaufgaben 28

3 Gleichungen und Ungleichungen **35**
3.1 Äquivalente Umformungen 35
3.2 Absolutbetrag reeller Zahlen 38
3.3 Kreis- und Ellipsengleichung 41
3.4 Übungsaufgaben 45

4 Komplexe Zahlen **51**
4.1 Gaußsche Zahlenebene 51
4.2 Algebra im Komplexen 53
4.3 Darstellungsformen komplexer Zahlen 57
4.4 Ganzzahlige Potenzen komplexer Zahlen 62
4.5 Allgemeine reelle Potenzen komplexer Zahlen 65
4.6 Komplexe Gleichungen und Ungleichungen 66
4.7 Polynome im Komplexen 69
4.8 Übungsaufgaben 75

5 Abbildungen **87**
5.1 Bild und Urbild 87
5.2 Inverse Abbildung 90
5.3 Komposition von Abbildungen 92
5.4 Betrags - und Signumfunktion 93
5.5 Übungsaufgaben 94

6 Anhang **101**
6.1 Etwas Aussagenlogik 101
6.2 Beweis der vollständigen Induktion 104
6.3 Lösungsformeln für Gleichungen vom Grad 3 oder 4 105
6.4 Computer - Algebra - Systeme 111

7 Lösungen der Übungsaufgaben **113**
7.1 Grundzüge der Mengenlehre 113
7.2 Mathematische Beweismethoden 120
7.3 Gleichungen und Ungleichungen 172
7.4 Komplexe Zahlen 231
7.5 Abbildungen 327

Literaturverzeichnis **349**

Namen- und Stichwortverzeichnis **351**

1 Grundzüge der Mengenlehre

1.1 Mengenbegriff, Elemente einer Menge

In der Mathematik ist es oft von Vorteil bestimmte Dinge oder Objekte zu einem Ganzen zusammenzufassen. Betrachten Sie dazu die folgenden Beispiele:

- Alle Augenzahlen eines Würfels. Dann sind die Objekte die Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6$.
- Alle weiblichen Teilnehmer der Mathematikvorlesung Analysis für Ingenieure. Die Objekte sind hier die teilnehmenden Studentinnen.
- Alle Lösungen der Gleichung $x^2 = 4$. Das sind die Zahlen $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$. Die Objekte sind hier die beiden Lösungen $-2, 2$.
- Alle Vokale in unserem Alphabet. Die Objekte sind hier die Buchstaben a, e, i, o, u.

Der Mengenbegriff wurde durch den Mathematiker ***Georg Cantor*** $(1845 - 1918)^*$ eingeführt, der zu den Mitbegründern der Mengenlehre zählt. Von ihm stammt die folgende

Definition 1.1 *Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung bestimmter unterscheidbarer Objekte unserer Anschauung und unseres Denkens zu einem Ganzen. Die Objekte heißen die **Elemente** der Menge.*

Aus dieser Definition lassen sich zwei wichtige Eigenschaften sofort ablesen.

1) Die Forderung nach unterscheidbaren Objekten besagt, dass jedes Element genau nur einmal in der Menge vorkommen darf.

2) Die Anordnung beziehungsweise Reihenfolge der Elemente ist dabei beliebig.

Eine Menge ist dann bekannt, wenn ihre Elemente bekannt sind, das heißt, es muss eine Vorschrift existieren, aus der eindeutig hervorgeht, ob ein Element zur Menge gehört oder nicht. Diese Zuordnung kann auf zwei verschiedene Arten erfolgen:

1) Durch die **aufzählende Form**, wobei alle Elemente der Menge in geschweifte Klammern durch Kommata getrennt aufgelistet werden (sofern das überhaupt möglich ist), wie zum Beispiel $A := \{a, b, c\}$.

   Gelesen als: Die Menge A ist definiert als die Zusammenfassung der drei Elemente a, b, c. Dabei steht das Zeichen „$:=$“ für „ **ist definiert als** “.

$*$) Georg Ferdinand Ludwig Phillipp Cantor, deutscher Mathematiker, geb. 3. März 1845 in Sankt Petersburg, gest. 6. Januar 1918 in Halle (Saale). Cantor war Professor in Halle und Begründer der Mengenlehre sowie der „Wissenschaft des Unendlichen“.

2) Durch die **beschreibende Form**, wobei die einzelnen Elemente nicht aufgezählt werden, sondern ihre Eigenschaft angegeben wird, wie zum Beispiel

$$A := \{ x \mid x \text{ ist einer der drei ersten Buchstaben unseres Alphabets.} \}$$

Gelesen als: Die Menge A ist definiert als die Zusammenfassung der Elemente x für die gilt, x ist einer der drei ersten Buchstaben unseres Alphabets. Dabei steht das Zeichen „ | “ in den geschweiften Klammern für „ **für die gilt** “.

Für das Beispiel alle Lösungen der Gleichung $x^2 = 4$ gibt es also zwei Möglichkeiten diese Menge zu definieren. In aufzählender Form $L := \{ -2, 2 \}$ oder in beschreibender Form $L := \{ x \mid x^2 = 4 \}$.

Definition 1.2 *Ist x **ein** Element einer beliebigen Menge A, so schreibt man dafür kurz $x \in A$. Ist x dagegen **kein** Element der Menge A, so schreibt man dafür kurz $x \notin A$.*

Es lässt sich jetzt eindeutig entscheiden, ob ein Element x zu einer Menge A gehört oder nicht. Betrachten Sie dazu das

Beispiel 1
Gegeben seien die drei Mengen A, B, C definiert durch:

$$A := \{ 1, 3, 5, 7 \}, \quad B := \{ x \mid 2x - 4 = 0 \}, \quad C := \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots \}.$$

Dann gilt zum Beispiel $2 \notin A$, $2 \in B$, $2 \in C$ und $7 \in A$, $7 \notin B$, $7 \in C$.

Eine Menge kann mehr oder weniger viele Elemente besitzen. Die Menge A aus dem Beispiel 1 hat genau vier Elemente, wogegen die Menge C unendlich viele Elemente besitzt. Dazu jetzt die

Definition 1.3 *Eine Menge mit endlich vielen Elementen heißt **endliche Menge**, eine Menge mit unendlich vielen Elementen heißt **unendliche Menge**. Die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge A bezeichnet man als **Kardinalzahl** oder auch **Mächtigkeit** und schreibt dafür $\# A$.*

Beispiel 2

- Die Menge der Wochentage

  $$W := \{ \text{Montag}, \text{Dienstag}, \text{Mittwoch}, \text{Donnerstag}, \text{Freitag}, \text{Sonnabend}, \text{Sonntag} \}$$

  ist eine endliche Menge mit $\# W = 7$ Elementen.

- Die Menge K aller möglichen Kreise mit dem Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems ist offensichtlich eine unendliche Menge, weil es unendlich viele Kreise mit verschiedenen Radien um den Punkt $P(0 \mid 0)$ gibt.

- Die Menge U aller ungeraden Zahlen, die durch die Zahl 2 ohne Rest teilbar sind, ist eine Menge mit der Mächtigkeit $\#U = 0$, weil sie kein Element enthält.

Die Menge U aus dem Beispiel 2 legt die folgende Definition nahe.

Definition 1.4 *Eine Menge die kein Element besitzt heißt* ***leere Menge*** *und wird mit* $\{\ \}$ *oder auch* $\varnothing$ *bezeichnet. Die leere Menge zählt verabredungsgemäß zu den endlichen Mengen.*

1.2 Die Zahlenmengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

Ein Schäfer möchte jeden Abend seine Schafe abzählen, die in mehr oder weniger großen Gruppen auf einer Wiese stehen. Dann reichen ihm die Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ völlig aus, um die Gesamtzahl der Schafe durch Abzählen zu ermitteln. Zum Beispiel zählt er in der ersten Gruppe 12 Schafe, in der zweiten Gruppe 34 Schafe und in der dritten Gruppe 51 Schafe. Dann besitzt der Schäfer genau $12 + 34 + 51 = 97$ Schafe. Das führt auf die

Definition 1.5 *Die Menge* $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ *heißt die Menge der* ***natürlichen Zahlen****. Wird der Menge der natürlichen Zahlen die Zahl* 0 *hinzugefügt, dann schreibt man* $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

In der Menge $\mathbb{N}$ lässt sich sogar rechnen. Seien a und b zwei beliebige natürliche Zahlen, dann ist die Summe und das Produkt dieser Zahlen jeweils wieder in der Menge der natürlichen Zahlen zu finden. Formal lässt sich das so ausdrücken:

$$\forall\, a, b \in \mathbb{N} \quad \text{folgt} \quad a + b \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad a \cdot b \in \mathbb{N}.$$

Das Zeichen „$\forall$ “ steht für die Abkürzung „**für alle**“. Man sagt auch, dass die Menge der natürlichen Zahlen bezüglich der Addition und der Multiplikation abgeschlossen ist. Trotzdem ist die Menge $\mathbb{N}$ noch unvollständig. Betrachten Sie dazu für beliebige $a, b \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$a + x = b.$$

Hat diese Gleichung immer eine Lösung x in der Menge der natürlichen Zahlen? Die Antwort ist manchmal ja, aber auch manchmal nein. Die Gleichung $3 + x = 9$ hat die Lösung $x = 6 \in \mathbb{N}$ und die Gleichung $10 + x = 2$ hat die Lösung $x = -8 \notin \mathbb{N}$. Dieser Tatbestand, dass nicht jede Gleichung der Form $a + x = b$ für beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ in der Menge $\mathbb{N}$ lösbar ist, erzwingt eine Erweiterung der natürlichen Zahlenmenge um die negativen Zahlen $\{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und insbesondere der Zahl Null.

Definition 1.6 *Die Menge* $\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ *heißt die Menge der* ***ganzen Zahlen***. *Mit* $\mathbb{Z}^- := \{\ldots, -3, -2, -1\}$ *werden gelegentlich alle negativen ganzen Zahlen bezeichnet.*

Die Menge der ganzen Zahlen ist bezüglich der Addition und der Multiplikation abgeschlossen. Das heißt es gilt:

$$\forall\, a, b \in \mathbb{Z} \quad \text{folgt} \quad a + b \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad a \cdot b \in \mathbb{Z}.$$

Auch jede Gleichung der Form $a + x = b$ für beliebige $a, b \in \mathbb{Z}$ ist in der Menge der ganzen Zahlen lösbar. Sie hat die Lösung $x = b - a \in \mathbb{Z}$. Trotzdem ist auch die Menge $\mathbb{Z}$ noch unvollständig. Betrachten Sie dazu für beliebige $a, b \in \mathbb{Z}$ die Gleichung

$$a \cdot x = b.$$

Hat diese Gleichung immer eine Lösung x in der Menge der ganzen Zahlen? Die Antwort ist auch hier manchmal ja, aber auch manchmal nein. Zum Beispiel hat die Gleichung $3 \cdot x = -30$ die Lösung $x = -10 \in \mathbb{Z}$ und die Gleichung $2 \cdot x = 3$ die Lösung $x = \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$.

Der unbefriedigende Tatbestand, dass nicht jede Gleichung der Form $a \cdot x = b$ mit beliebigen Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ und $a \neq 0$ in der Menge $\mathbb{Z}$ lösbar ist, erzwingt auch eine Erweiterung dieser Zahlenmenge um die noch fehlenden Brüche.

Definition 1.7 *Die Menge* $\mathbb{Q} := \left\{ x \,\middle|\, x = \frac{p}{q} \text{ mit } p, q \in \mathbb{Z} \text{ und } q \neq 0 \right\}$ *heißt die Menge der* ***rationalen Zahlen***.

Offensichtlich stehen in dieser Menge auch alle ganzen Zahlen, denn jede beliebige ganze Zahl $p \in \mathbb{Z}$ lässt sich ja durch den Bruch $x = \frac{p}{1}$ darstellen. Allerdings können verschiedene Brüche wie zum Beispiel $\frac{1}{2} = \frac{-3}{-6} = \frac{512}{1024}$ dieselbe rationale Zahl darstellen. Eine eindeutige Darstellung einer rationalen Zahl x ist erreichbar durch die zusätzliche Forderung $x = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ und p, q teilerfremd.

Auf die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ soll im Folgenden noch etwas ausführlicher eingegangen werden.

1) In der Zahlenmenge $\mathbb{Q}$ sind nur die Brüche $x = \frac{p}{q}$ zugelassen für die $q \neq 0$ gilt. Warum ist $q = 0$ **verboten**? Oder anders formuliert: Warum darf man nicht durch die Zahl Null dividieren? Betrachten Sie dazu die folgende Rechnung:

   Seien $a, b \in \mathbb{Q}$ zwei beliebige ganze Zahlen, die die Bedingung $a = b \neq 0$ erfüllen, also zwei gleiche ganze Zahlen. Mit der dritten binomischen Formel $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ folgt dann durch elementare Umformungen

$$
\begin{aligned}
a &= b && \mid \cdot a \\
a^2 &= a \cdot b && \mid -b^2 \\
a^2 - b^2 &= a \cdot b - b^2 && \\
a^2 - b^2 &= b\,(a - b) && \mid \text{dritte binomische Formel} \\
(a - b)\,(a + b) &= b\,(a - b) && \mid :(a - b) \\
a + b &= b && \mid a = b \text{ nach Voraussetzung} \\
b + b &= b && \\
2\,b &= b && \mid :b \\
2 &= 1 \quad \lightning\lightning\lightning &&
\end{aligned}
$$

Offensichtlich ist das Ergebnis falsch! Aber wo liegt hier der Fehler? In der fünften Zeile wurde wegen der Voraussetzung $a = b$ durch den Term $a - b = 0$ geteilt, was zu einem völlig unsinnigen Ergebnis führt. Deshalb ist die Division durch Null immer **verboten**!

2) In welche Menge passt die Dezimalzahl $1,25$? Diese Dezimalzahl lässt sich durch Erweiterung mit dem Bruch $\frac{100}{100}$ schreiben als $1,25 = \frac{1,25}{1} \cdot \frac{100}{100} = \frac{125}{100} = \frac{5}{4} \in \mathbb{Q}$. Also ist diese Dezimalzahl eine rationale Zahl.

Die Dezimalzahl $103,5643051$ lässt sich ebenfalls durch die Erweiterung mit dem Bruch $\frac{10\,000\,000}{10\,000\,000}$ schreiben als $103,5643051 = \frac{103,5643051}{1} \cdot \frac{10000000}{10000000} = \frac{1035643051}{10000000} \in \mathbb{Q}$. Also ist auch diese Dezimalzahl eine rationale Zahl.

3) Auch periodische Dezimalzahlen wie zum Beispiel
$x = 11,42232232232\cdots = 11,42\overline{232}$ sind rationale Zahlen. Denn es gilt

$$100000\,x = 1142232,\overline{232} = 1142232 + 0,\overline{232} \quad \text{und}$$
$$100\,x = 1142,\overline{232} = 1142 + 0,\overline{232}.$$

Subtraktion der beiden Gleichungen ergibt

$$100000\,x - 100\,x = 99900\,x = (\,1142232 + 0,\overline{232}\,) - (\,1142 + 0,\overline{232}\,) = 1141090$$
$$\text{und damit ist} \quad x = \frac{1141090}{99900} = \frac{114109}{9990} \in \mathbb{Q}.$$

Mit diesen Verfahren lässt sich im Prinzip jede Dezimalzahl mit endlich vielen Ziffern oder jede periodische Dezimalzahl mit unendlich vielen Ziffern nach dem Komma in eine rationale Zahl überführen. Dagegen lässt sich jede nichtperiodische Dezimalzahl mit unendlich vielen Ziffern nach dem Komma, wie zum Beispiel die Zahl $x = 5,1201001000100001\cdots$, **nicht** als rationale Zahl darstellen.

Die Menge der rationalen Zahlen ist bezüglich der Addition und der Multiplikation abgeschlossen. Das heißt es gilt:

$$\forall\, a, b \in \mathbb{Q} \quad \text{folgt} \quad a + b \in \mathbb{Q} \quad \text{und} \quad a \cdot b \in \mathbb{Q}.$$

Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ ist auch jede Gleichung der Form $a + x = b$ oder $a \cdot x = b$, $a \neq 0$ in der Menge der rationalen Zahlen immer lösbar. Sie haben die Lösungen $x = b - a \in \mathbb{Q}$ beziehungsweise $x = \frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$.

Auch die Zahlenmenge der rationalen Zahlen ist noch unvollständig, schon deshalb, weil es nichtperiodische Dezimalzahlen mit unendlich vielen Ziffern nach dem Komma gibt, wie zum Beispiel $2{,}01001000100001\ldots$, die sich nicht als Bruch schreiben lassen.

Aber auch Gleichungen wie zum Beispiel $x^2 = 2$, $x^2 = 3$, $x^3 = 2$ usw. haben in der Menge $\mathbb{Q}$ keine Lösung. Exemplarisch soll das für die Gleichung $x^2 = 2$ durch einen indirekten Beweis (näheres dazu im Abschnitt 2.2) gezeigt werden. Das Prinzip des indirekten Beweises besteht darin, dass man annimmt, die Aussage ist falsch und stattdessen das logische Gegenteil richtig.

Behauptung:
Die Gleichung $x^2 = 2$ hat keine rationale Zahl als Lösung (*Dilemma des Pythagoras*).

Beweis:
Angenommen die Gleichung $x^2 = 2\ (*)$ hat eine rationale Zahl als Lösung, dann lässt sich die Lösung x als teilerfremden Bruch in der Form $x = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{Q}$ und $q \neq 0$ darstellen. Auflösen nach p und anschließendes Quadrieren ergibt zunächst

$$p^2 = q^2 x^2 \overset{(*)}{=} 2q^2 \quad (**).$$

Weil die Zahl $2q^2$ durch zwei teilbar ist, muss auch die Zahl p^2 durch zwei teilbar sein. Also muss p^2 eine gerade Zahl sein, was nur möglich ist, wenn die Zahl p selbst eine gerade Zahl ist. Denn nur gerade Zahlen sind quadriert wieder gerade!

Die Zahl p muss daher von der Form $p = 2k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ sein. Eingesetzt in $(**)$ ergibt $4k^2 = 2q^2$ und nach Division folgt $2k^2 = q^2$.

Weil $2k^2$ gerade ist und damit auch q^2, muss q selbst wieder eine gerade Zahl sein. Damit wären beide Zahlen p, q gerade Zahlen, was im Widerspruch zur Annahme eines teilerfremden Bruches steht. Also lässt sich die Lösung x der Gleichung $x^2 = 2$ nicht als teilerfremden Bruch darstellen, womit die Zahl x also keine rationale Zahl sein kann.

■

Das Symbol ■ wird hier verwendet um das Ende eines Beweises zu kennzeichnen.

Die Lösungen der Gleichung $x^2 = 2$, also $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ lassen sich als Wurzel der rationalen Zahl 2 darstellen und sind zwei Vertreter der sogenannten **irrationale Zahlen**. Aber nicht jede irrationale Zahl lässt sich wiederum durch eine Wurzel darstellen, wie beispielsweise die Zahlen $\pi = 3{,}14159\cdots$ oder $e = 2{,}71828\cdots$ usw..

Bemerkung:
Die Bedeutung der irrationalen Zahlen ist für den in der Praxis stehenden Ingenieur eher gering, weil man durch Abbrechen des Dezimalbruchs an einer geeigneten Stelle immer eine rationale Annäherung mit beliebiger Genauigkeit erzielen kann.

Definition 1.8 *Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ erweitert um die Menge aller irrationalen Zahlen heißt die Menge der* ***reellen Zahlen*** *und wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.*

Wie man jetzt vielleicht denken mag, schließt sich hier der Kreis, denn in der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind alle die Ihnen aus der Schule her vertrauten Rechnungen wie Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenzieren und Wurzelziehen möglich. Es zeigt sich aber, dass auch die Menge der reellen Zahlen noch unvollständig ist.

Betrachten Sie dazu beispielsweise die Gleichung $x^2 = -1$. Offensichtlich gibt es keine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ die diese Gleichung zu lösen vermag. Im Kapitel 4 wird eine weitere Zahlenbereichserweiterung der reellen Zahlen vorgenommen und man gelangt dann zu der komplexen Zahlenmenge $\mathbb{C}$, in der auch diese Gleichung lösbar ist.

Beispiel 3

- Gesucht sind alle reellen Zahlen die die Ungleichung $x^2 < 4$ erfüllen.

  Lösung: Das sind sämtliche reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$, die **zwischen** den beiden Zahlen -2 und 2 liegen. Oder auch kurz $\{ x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2 \}$.

- Gesucht sind alle reellen Zahlen die gleichzeitig die beiden Ungleichungen $x \leq 1$ und $x^2 < 4$ erfüllen.

  Lösung: Das sind sämtliche reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$, die **größer** als -2 und **kleiner oder gleich** 1 sind. Oder auch kurz $\{ x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 1 \}$.

- Gesucht sind alle reellen Zahlen die gleichzeitig die beiden Ungleichungen $x \geq -1$ und $x^2 < 4$ erfüllen.

  Lösung: Das sind sämtliche reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$, die **größer oder gleich** -1 und **kleiner** als 2 sind. Oder auch kurz $\{ x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 2 \}$.

Wie an diesen Beispielen zu erkennen ist, braucht man zur Lösung einer Aufgabe häufig nicht immer alle reellen Zahlen, sondern häufig nur Teilbereiche der reellen Zahlen, sogenannte Intervalle. Man unterscheidet dabei in endliche und unendliche Intervalle. Für **endliche** Intervalle gilt:

Definition 1.9 *Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ heißt*

- $]a, b[= (a, b) := \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$ ***offenes*** *Intervall,*
- $]a, b] = (a, b] := \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \}$ ***halboffenes*** *Intervall,*
- $[a, b[= [a, b) := \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \}$ ***halboffenes*** *Intervall,*
- $[a, b] := \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$ ***abgeschlossenes*** *beziehungsweise auch* ***kompaktes*** *Intervall.*

Unendliche Intervalle sind Intervalle die $-\infty$ oder $+\infty$ als Intervallgrenzen haben. Bedenken Sie, dass $-\infty$ und $+\infty$ **keine** reellen Zahlen sind sondern nur Zeichen, die andeuten sollen, das beliebig große negative beziehungsweise positive reelle Zahlen zulässig sind. Wäre nämlich $+\infty$ die größte aller möglichen reellen Zahlen, dann ist $+\infty + 1$ noch größer als $+\infty$. Also kann $+\infty$ nicht die größte reelle Zahl sein. Daher ist die Schreibweise $[-\infty, +\infty]$ **verboten**, weil das ja bedeuten würde, dass die „Zahlen" $\pm\infty$ dem Intervall angehören obwohl sie gar nicht existieren!

Definition 1.10 *Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ heißt*

- $]a, \infty[= (a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ ***offenes** Intervall*,
- $[a, \infty[= [a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$ ***halboffenes** Intervall*,
- $]-\infty, b[= (-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ ***offenes** Intervall*,
- $]-\infty, b] = (-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$ ***halboffenes** Intervall*,
- $]-\infty, \infty[= (-\infty, \infty) := \mathbb{R}$ *Menge der reellen Zahlen.*

Als sehr vorteilhaft erweisen sich auch noch die beiden Abkürzungen $\mathbb{R}^+ := (0, \infty)$ und $\mathbb{R}_0^+ := [0, \infty)$.

1.3 Mengenverknüpfungen

Betrachten Sie die beiden Mengen $M := \{2, 4, 8, 16\}$ und $N := \{2, 2^2, 2^3, 2^4\}$. Man erkennt sofort, dass jedes Element der Menge M auch ein Element der Menge N ist und umgekehrt. Solche Mengen nennt man gleich.

Definition 1.11 *Zwei beliebige Mengen A, B heißen **gleich**, wenn sie dieselben Elemente haben. Man schreibt dann $A = B$.*

Beispiel 4
Gegeben seien die beiden Mengen $A := \{x \in \mathbb{R} \mid \sin(\pi x) = 0\}$ und $B := \mathbb{Z}$. Zeigen Sie das diese Mengen gleich sind.

Lösung:
Aus der Schule her sollte bekannt sein, dass die Nullstellen der Sinusfunktion ganzzahlige Vielfache der irrationalen Zahl π sind.
Setzt man $z := \pi x$ ergeben sich die Lösungen der Gleichung $\sin z = 0$ zu $z = k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Dann folgt aus $z = \pi x = k\pi$ sofort $x = k \in \mathbb{Z}$. Also ist jedes Element der Menge A auch in der Menge B enthalten.
Sei nun umgekehrt $x \in B = \mathbb{Z}$. Dann gilt für alle $x \in B$ offensichtlich $\sin(\pi x) = 0$. Damit ist jedes Element der Menge B auch Element der Menge A, womit $A = B$ gilt.

Beispiel 5
Gegeben seien die Mengen $A := \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 9 \}$ und $B := [-3, 3[$. Zeigen Sie das diese Mengen nicht gleich sind.

Lösung:
Die Menge A ist das abgeschlossene Intervall $A = [-3, 3]$. Es ist $3 \in A$ aber $3 \notin B$. Also folgt $A \neq B$.

Für die Zahlenmengen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ und $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ stellt man fest, dass jedes Element der Menge $\mathbb{N}$ auch in der Menge $\mathbb{Z}$ zu finden ist. Ebenso ist jedes Element der Menge $\mathbb{Z}$ auch ein Element der Menge $\mathbb{Q}$ und jedes Element der Menge $\mathbb{Q}$ wiederum ein Element der Menge $\mathbb{R}$. Das führt auf die folgende

Definition 1.12 *Seien A, B zwei beliebige Mengen. Die Menge A heißt eine **Teilmenge** der Menge B, wenn für jedes $x \in A$ auch $x \in B$ folgt. Man schreibt dann $A \subset B$ und sagt die Menge A ist in der Menge B enthalten. Ist A keine Teilmenge von B beziehungsweise nicht enthalten in B, dann schreibt man $A \not\subset B$.*

Beispiel 6

- Es gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- $[-4, 2] \not\subset \mathbb{Z}$ und $[-4, 2] \not\subset \mathbb{Q}$ aber $[-4, 2] \subset \mathbb{R}$.
- Es gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0$ aber $\mathbb{N}_0 \not\subset \mathbb{N}$.
- Für $A := \{ x \mid x^2 - x = 0 \} = \{0, 1\}$ gilt $A \subset \mathbb{N}_0$.
- Es ist $\{\ \} \subset \mathbb{R}$ aber $0 \notin \{\ \}$.

Der Mathematiker ***John Venn*** $(1834 - 1923)$ * abstrahierte Mengen als ein Flächenstück in der Ebene. Man legt fest, das alle Elemente die zu einer Menge gehören innerhalb dieser Fläche liegen. Dabei ist allerdings zu bedenken, dass eine solche Darstellung lediglich der Veranschaulichung dienen soll und **keinesfalls** die exakte Schreibweise für Mengen ersetzen kann. Die Teilmengenbeziehung lässt sich dann geometrisch durch sogenannte Venn - Diagramme darstellen wie etwa in der nachfolgenden Abbildung 1.1.

Nach der Definition 1.12 gilt für jede beliebige Menge A selbstverständlich auch $A \subset A$. Also ist jede Menge eine Teilmenge von sich selbst. Man unterscheidet nun zwischen **echten** und sogenannten **unechten** Teilmengen.

---

*) John Venn, englischer Mathematiker, geb. 4. August 1834 in Drypool (Hull, Humberside), gest. 4. April 1923 in Cambridge. Venn war in Cambridge mehr als 30 Jahre Professor für Logik und Naturphilosophie.



Abbildung 1.1 Venn - Diagramme.

Definition 1.13 *Jede Teilmenge einer Menge A, die weder leer noch gleich A ist, heißt* ***echte*** *Teilmenge von A.*

Mit dieser Definition sind also die leere Menge $\{\ \}$ und die Menge A selbst unechte Teilmengen von A. Hier stellt sich gleich die Frage, wie viele echte und unechte Teilmengen hat eine endliche Menge überhaupt?

Beispiel 7
Bestimmen Sie für die Menge $A := \{a, b, c\}$ alle möglichen Teilmengen.

Lösung:
Zunächst sind A und $\{\ \}$ die unechten Teilmengen von A.
Zu den echten Teilmengen zählen die einelementigen Teilmengen $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ und die zweielementigen Teilmengen $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$.

Alle möglichen Teilmengen einer Menge bilden selbst wieder eine Menge, die sogenannte Potenzmenge.

Definition 1.14 *Die Gesamtheit aller voneinander verschiedener Teilmengen einer Menge A heißt die* ***Potenzmenge*** *der Menge A und wird bezeichnet mit $\mathcal{P}(A) := \{X \mid X \subset A\}$.*

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ der Menge A aus dem Beispiel 7 lautet dann

$$\mathcal{P}(A) = \{\{\ \}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Beispiel 8
Gegeben seien die Mengen $A := \{1, 3, 5\}$ und $B := \{4, 5, 6\}$.

- Finden sie alle Elemente x die in der Menge A **und** in der Menge B enthalten sind.
  Lösung: Das ist nur das Element $x = 5$.
- Finden sie alle Elemente x die in der Menge A **oder** in der Menge B enthalten sind.
  Lösung: Das sind die Elemente $x = 1, 3, 4, 5, 6$.
- Finden sie alle Elemente x der Menge A die **nicht** zur Menge B gehören.
  Lösung: Das sind die Elemente $x = 1, 3$.

Das führt auf die

Definition 1.15 *Seien A, B beliebige Mengen.*

1) Der ***Durchschnitt*** *der Mengen A und B ist die Menge derjenigen Elemente, die sowohl zu A als auch zu B gehören. Man schreibt*

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\} := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

2) Die ***Vereinigung*** *der Mengen A und B ist die Menge, die entsteht, wenn die Elemente der Mengen A und B zu einer neuen Menge zusammengefasst werden. Man schreibt*

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\} := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

3) Die ***Differenz*** *der Mengen A und B ist die Menge derjenigen Elemente, die zu A aber nicht zu B gehören. Man schreibt*

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\} := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Dabei steht das Zeichen $\wedge$ für **und** beziehungsweise das Zeichen $\vee$ für **oder**.
Die Fragen und Ergebnisse aus dem Beispiel 8 lassen sich damit kurz formulieren als

$$A \cap B = \{5\}, \quad A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6\} \quad \text{und} \quad A \setminus B = \{1, 3\}.$$

Durchschnitt, Vereinigung und Differenz zweier Mengen A, B lassen sich wieder recht anschaulich durch Venn - Diagramme darstellen.

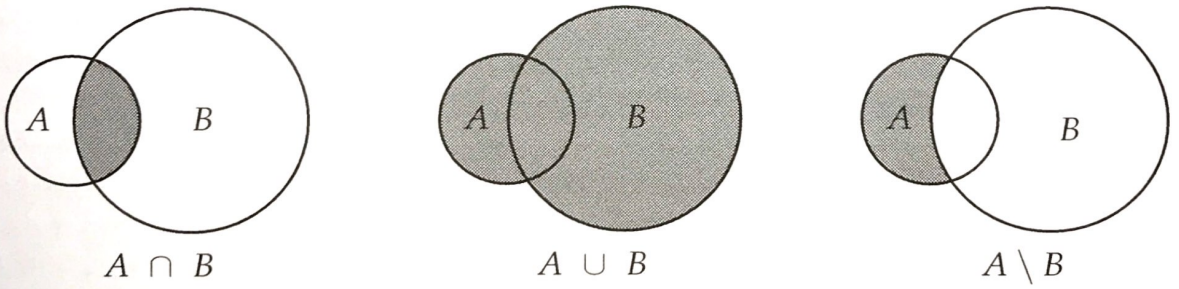


Abbildung 1.2 Darstellung von Durchschnitts-, Vereinigungs- und Differenzmenge.

Bemerkung:
Ist der Durchschnitt zweier Mengen A, B die leere Menge, also $A \cap B = \{\}$, dann heißen die Mengen **unvereinbar** oder auch **disjunkt**.

Selbstverständlich lässt sich die Durchschnitts- und Vereinigungsmenge auch von endlich vielen Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ bilden.

Definition 1.16 *Seien $k, n \in \mathbb{N}$ und A_k beliebige Mengen, dann gilt:*

- *Die Durchschnittsmenge aller Mengen A_k ist definiert als*

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k := A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n.$$

- *Die Vereinigungsmenge aller Mengen A_k ist definiert als*

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k := A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n.$$

Seien A, B zwei beliebige Mengen und $a \in A, b \in B$.

Ein **geordnetes Paar** besteht aus zwei Elementen von denen eines, etwa a als erstes gekennzeichnet ist und das andere als zweites. Man schreibt dann (a, b) und ist nicht zu verwechseln mit der Menge $\{a, b\}$ beziehungsweise dem offenen Intervall (a, b). Zwei geordnete Paare (a, b) und (c, d) sind genau dann gleich, wenn $a = c$ und $b = d$ gilt.

Beispiel 9
Gegeben seien die beiden Mengen $A := \{1, 2, 3\}$ und $B := \{\alpha, \beta\}$.

- Bestimmen Sie alle möglichen geordneten Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$.
  Lösung: $(1, \alpha), (1, \beta), (2, \alpha), (2, \beta), (3, \alpha), (3, \beta)$.
- Bestimmen Sie alle möglichen geordneten Paare (a, b) mit $a \in B$ und $b \in A$.
  Lösung: $(\alpha, 1), (\alpha, 2), (\alpha, 3), (\beta, 1), (\beta, 2), (\beta, 3)$.

Beachten Sie, dass die geordneten Paare $(1, \alpha)$ und $(\alpha, 1)$ verschieden sind. Dagegen sind die Mengen $\{1, \alpha\}$ und $\{\alpha, 1\}$ gleich, weil sie die gleichen Elemente besitzen!

Definition 1.17 *Seien A und B zwei beliebige Mengen. Die **Produktmenge** beziehungsweise das **kartesische Produkt** der Mengen A und B, geschrieben als $A \times B$, ist die Menge <u>aller</u> möglichen geordneten Paare (a, b) mit der Eigenschaft $a \in A$ und $b \in B$.*

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

- *Das Produkt einer Menge A mit sich selbst, also $A \times A$ wird mit A^2 bezeichnet.*
- *Ein Element aus $A \times B$ bezeichnet man auch als **Dupel**.*

Der Begriff der Produktmenge lässt sich auf natürliche Weise auch für mehr als zwei Mengen erweitern.

Definition 1.18 *Seien $k, n \in \mathbb{N}$ und A_k beliebige Mengen. Dann gilt für die Menge der geordneten* **n** *-* ***Tupel****:*

$$A_1 \times \ldots \times A_n := \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_k \in A_k\}.$$

Beispiel 10

- Jeder Punkt P in der zweidimensionalen Ebene $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ repräsentiert ein geordentes Paar (x, y) reeller Zahlen.
- Jeder Punkt P im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ repräsentiert ein geordentes **Tripel** (x, y, z) reeller Zahlen.

1.4 Übungsaufgaben

Aufgabe 1

Bestimmen Sie jeweils die Schnittmenge $A \cap B$, die Vereinigungsmenge $A \cup B$ und die beiden Differenzmengen $A \setminus B$ beziehungsweise $B \setminus A$ für:

$$a)\ A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 8\} \quad \text{und} \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\},$$

$$b)\ A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\} \quad \text{und} \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}.$$

Aufgabe 2

Die Menge $M := (\,]0, 5[\cap ([1, 3] \cup [4, 7])) \cap]3, 4[$ ist soweit wie möglich zu vereinfachen. Benutzen Sie zur Veranschaulichung den Zahlenstrahl, auf dem Sie die einzelnen Intervalle kenntlich machen.

Aufgabe 3

Vereinfachen Sie die nachfolgenden Mengen soweit wie möglich und skizzieren Sie Ihre Lösungen auf dem Zahlenstrahl.

$a)$ $M_1 := X \setminus (C \cap (A \setminus B))$ mit
$X = \mathbb{R}, \quad A = [0, \infty[, \quad B = \{1, 3\}, \quad C =]-\infty, 3].$

$b)$ $M_2 := X \setminus (D \cup ((B \setminus C) \cap (A \cap E)))$ mit
$X = \mathbb{R}, \quad A = [3, \infty[, \quad B = \mathbb{N}, \quad C = \{4, 5\}, \quad D =]-\infty, 1], \quad E = [1, 8].$

$c)$ $M_3 := (A \setminus B) \cap (C \cup D)$ und $M_4 := ((D \setminus A) \cap (B \setminus A)) \cup D$ mit
$A = [-3, 1], \quad B = \{1, 3, 5\}, \quad C =]5, \infty[, \quad D =]-\infty, 1].$

Aufgabe 4

a) Geben Sie die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ für die Menge $M := \left\{\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right\}$ an.

b) Wie viele Elemente (Mächtigkeit) $\#\mathcal{P}(M)$ hat die Potenzmenge einer Menge M mit $n \in \mathbb{N}$ Elementen? Geben Sie dafür einen anschaulichen Beweis an.

Aufgabe 5

Geben Sie die Menge M konkret an und begründen Sie Ihre Argumentation sorgfältig!

$$M := \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \frac{n-1}{2^n} < \frac{1}{10} \right\}$$

Aufgabe 6

Bestimmen Sie die folgenden Mengen.

a) $M_1 := \{ x \in \mathbb{R} \mid x \text{ ist durch 2 teilbar} \} \cap \{ x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist durch 3 teilbar} \}$

b) $M_2 := \{ n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist Primzahl} \} \cap \{ n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade} \}$

Aufgabe 7

Welche Mengen werden beschrieben durch:

a) $M := \bigcup_{k=0}^{\infty} M_k$ mit $M_k := \left\{ x \in \left] k\pi, (k+2)\pi \right[\;\middle|\; \sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \right\}$.

b) $N := \bigcap_{k=1}^{\infty} N_k$ mit $N_k := \left\{ 0, \frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+2}, \dots \right\}$.

c) Bildet die Vereinigung $M \cup N$ der Mengen aus a) und b) ein Intervall?

Aufgabe 8

Bestimmen Sie die folgenden Mengen.

a) $M_1 := \bigcup_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \{ x \in \mathbb{R} \mid m \cdot x \in \mathbb{N} \}$ *b*) $M_2 := \bigcup_{k=1}^{\infty}]k-1, k+1]$

c) $M_3 := \bigcap_{a \in \mathbb{R}} \{ x \mid (x-a)(x-1) = 0 \}$

d) $M_4 := \bigcap_{k=0}^{\infty} \{ x \in \mathbb{R} \mid \sin(k \cdot x) = 0 \;\wedge\; k \in \mathbb{N}_0 \}$

e) $M_5 := \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ mit $B_k = \{ -k, -k+1, \dots, k-1, k \}$ und $k \in \mathbb{N}$.

f) $M_6 := \bigcap_{\nu=1}^{\infty} N_\nu$ mit $N_\nu = \{ 0, 1, 2, \dots, \nu \}$ und $\nu \in \mathbb{N}$.

2 Mathematische Beweismethoden

Jede mathematische Aussage bedarf eines Beweises. Dazu bedient man sich im wesentlichen dreier Methoden, die in diesem Kapitel vorgestellt werden sollen.

2.1 Direkter Beweis

Das Ziel ist es, aus einer Aussage A (Voraussetzung) eine Aussage B (Behauptung) zu beweisen. Hierzu kann man sich der **direkten Beweismethode** bedienen, deren Prinzip darin besteht, dass man mit der Aussage A beginnt und diese durch erlaubte mathematische Operationen in die Aussage B überführt ($A \Rightarrow B$).

Der direkte Beweis ist die am häufigsten verwendete Methode wohl aber auch die schwierigste. Betrachten Sie dazu die folgenden Beispiele.

Beispiel 11
Behauptung: Das Quadrat einer ungeraden natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist ungerade.

Beweis:
Sei n eine beliebige ungerade natürliche Zahl. Dann lässt sich diese Zahl darstellen als $n = 2k+1$ mit einem $k \in \mathbb{N}_0$. Mithilfe der ersten binomischen Formel erhält man

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1.$$

Weil die ersten beiden Summanden $4k^2$ und $4k$ jeweils eine gerade Zahl darstellen, ist die Summe $4k^2 + 4k$ ebenfalls eine gerade Zahl. Addiert man nun zu der geraden Zahl $4k^2 + 4k$ die Zahl 1, dann ergibt sich immer eine ungerade Zahl. Also ist n^2 ungerade und damit die Behauptung bewiesen.

■

Bemerkung:
Um das Ende eines Beweises zu kennzeichnen, gibt es drei verschiedene Möglichkeiten.

- w.z.b.w.: „**w**as **z**u **b**eweisen **w**ar“ (und nicht etwa „was zu bezweifeln wäre“).
- q.e.d: „**q**uod **e**rat **d**emonstrandum“.
- ■

Im Folgenden wird zur Kennzeichnung für das Ende eines Beweises ausschließlich die dritte Variante ■ gewählt.

Beispiel 12
Behauptung: Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen $S_n = 1+2+3+\ldots+n$ lässt sich durch die Formel $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ berechnen.

Beweis:
Der Trick (und das macht den direkten Beweis schwierig) auf den man hier erst einmal kommen muss, besteht darin, die Voraussetzung $S_n = 1+2+3+\ldots+n$ einmal so wie hier und einmal in umgekehrter Reihenfolge aufzuschreiben.

$$S_n = 1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)+n \qquad (i)$$
$$S_n = n+(n-1)+(n-2)+\ldots+3+2+1 \qquad (ii)$$

Die gliedweise Addition der Gleichungen (i) und (ii) liefert schließlich die Behauptung.

$$\begin{aligned} 2S_n &= (n+1)+(n-1+2)+(n-2+3)+\ldots+(3+n-2)+(2+n-1)+(1+n) \\ &= \underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)+(n+1)+(n+1)}_{n \text{ gleiche Summanden}} = n(n+1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

■

Ein Beweis muss immer allgemeingültig sein und alle möglichen Fälle abdecken. Für das Widerlegen einer Behauptung genügt daher nur ein einziges Gegenbeispiel!

Beispiel 13
Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ liefert die Formel $p(n) := n^2 - n + 41$ eine **Primzahl**. Das heißt eine Zahl, die nur durch 1 oder sich selbst teilbar ist.

Diese Aussage ist offensichtlich falsch, weil $p(41) = 41^2 - 41 + 41 = 41^2$ keine Primzahl ist. Denn die Zahl 41^2 lässt sich neben 1 und 41^2 auch durch die Zahl 41 teilen.

2.2 Indirekter Beweis

Der **indirekte Beweis** oder auch **Widerspruchsbeweis** ist einer der elegantesten und auch einfachsten Beweise. Wie bei dem direkten Beweis ist es auch hier das Ziel, aus einer Aussage A (Voraussetzung) eine Aussage B (Behauptung) zu beweisen.

Das Prinzip des indirekten Beweises besteht darin, das man annimmt, die Behauptung B sei falsch und stattdessen das logische Gegenteil $\neg B$ richtig. Durch erlaubte mathematische Operationen führt man unter Benutzung der zusätzlichen Voraussetzung $\neg B$ einen Widerspruch her. Die Folgerung ist, dass B richtig sein muss.

Beispiel 14
Behauptung: Ist die Wurzel aus einer geraden natürlichen Zahl n eine natürliche Zahl, so ist diese gerade.

Beweis:
Nimmt man an, dass $k = \sqrt{n}$ eine ungerade Zahl ist, dann ist wegen der in Beispiel 11 bewiesenen Behauptung auch $k^2 = n$ ungerade und das ist ein Widerspruch zu der Voraussetzung, dass n gerade ist. Also ist die getroffene Annahme falsch und das heißt $\sqrt{n}$ ist eine gerade Zahl.

■

Bei diesem Beweisverfahren schleicht sich oft ein häufig gemachter Fehler ein, indem die Behauptung falsch negiert wird. Dazu das folgende

Beispiel 15
Behauptung: Die Zahl 1 ist die größte reelle Zahl.

Beweis:
Angenommen die Behauptung ist falsch, dass heißt es gibt eine andere größte Zahl y, mit $1 < y$. Weil die Zahl y positiv ist, kann die Ungleichung $1 < y$ mit y multipliziert werden und man erhält $y < y^2$. Das ist offenbar ein Widerspruch zur Annahme, dass y die größte Zahl ist, weil y^2 ja noch größer als y ist. Also folgt die Behauptung und somit ist die Zahl 1 die größte reelle Zahl.

Wo liegt hier der Fehler?
Die Negation der Behauptung ist falsch! Die richtige Negation muss lauten: 1 ist nicht die größte reelle Zahl.

2.3 Vollständige Induktion

Zur Vorbereitung dieser wichtigen Beweismethode werden zunächst einige Begriffe definiert, die in den zu beweisenden Behauptungen immer wieder auftauchen.

Definition 2.1 *Wenn a_k ein beliebiger Ausdruck in Abhängigkeit von $k \in \mathbb{Z}$ und $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq n$ ist, dann ist das* ***Summenzeichen*** *definiert als*

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{n-1} + a_n .$$

Für den Fall $m > n$ setzt man $\sum_{k=m}^{n} a_k := 0$.

Das Summenzeichen dient also dazu, endliche Summen von Ausdrücken oder Termen effizient und platzsparend darzustellen.

Beispiel 16
$a)$ $1+2+3+\ldots+n-1+n = \sum_{k=1}^{n} k$

$$b)\ 2^3+2^2+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{50}}=\sum_{k=-3}^{50}\frac{1}{2^k}$$

$$c)\ \sqrt{(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+(x-x_3)^2+\ldots+(x-x_l)^2}=\sqrt{\sum_{k=1}^{l}(x-x_k)^2}$$

Für das Rechnen mit dem Summenzeichen gelten die im folgenden Satz zusammengestellten Gesetze.

Satz 2.1

$$\sum_{k=m}^{n}a_k+\sum_{k=m}^{n}b_k=\sum_{k=m}^{n}(a_k+b_k) \qquad (1)$$

$$\sum_{k=m}^{n}c\cdot a_k=c\sum_{k=m}^{n}a_k \qquad (2)$$

$$\sum_{k=m}^{n}a_k=\sum_{i=m}^{n}a_i=\sum_{j=m}^{n}a_j \qquad (3)$$

$$\sum_{k=m}^{n}a_k=\sum_{k=m}^{u}a_k+\sum_{k=u+1}^{n}a_k \quad \text{für } m\le u\le n \qquad (4)$$

$$\sum_{k=m}^{n}a_k\sum_{i=u}^{v}b_i=\sum_{k=m}^{n}\sum_{i=u}^{v}a_kb_i=\sum_{i=u}^{v}\sum_{k=m}^{n}a_kb_i \qquad (5)$$

Für eine beliebige Zahl $l\in\mathbb{Z}$ lässt sich eine ***Indexverschiebung*** *im Summenzeichen vornehmen. Es gilt:*

$$\sum_{k=m}^{n}a_k=\sum_{k=m+l}^{n+l}a_{k-l} \qquad (6)$$

Beweis:
Mit der Definition 2.1 gilt:

$$(1)\quad \sum_{k=m}^{n}a_k+\sum_{k=m}^{n}b_k=a_m+a_{m+1}+\ldots+a_n+b_m+b_{m+1}+\ldots+b_n$$

$$=a_m+b_m+a_{m+1}+b_{m+1}+\ldots+a_n+b_n=\sum_{k=m}^{n}(a_k+b_k)$$

$$(2)\quad \sum_{k=m}^{n}c\cdot a_k=c\cdot a_m+c\cdot a_{m+1}+\ldots+c\cdot a_n$$

$$=c\cdot(a_m+a_{m+1}+\ldots+a_n)=c\sum_{k=m}^{n}a_k$$

$$(3)\quad \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{j=m}^{n} a_j = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$$

$$(4)\quad \sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_u + a_{u+1} + \ldots + a_n = \sum_{k=m}^{u} a_k + \sum_{k=u+1}^{n} a_k$$

$$(5)\quad \sum_{k=m}^{n} a_k \sum_{i=u}^{v} b_i = \sum_{k=m}^{n} a_k \cdot (b_u + b_{u+1} + \ldots + b_v)$$

$$= \sum_{k=m}^{n} (a_k b_u + a_k b_{u+1} + \ldots + a_k b_v) = \sum_{k=m}^{n} \sum_{i=u}^{v} a_k b_i$$

$$\sum_{i=u}^{v} \sum_{k=m}^{n} a_k b_i = \sum_{i=u}^{v} (a_m b_i + a_{m+1} b_i + \ldots + a_n b_i)$$

$$\overset{(1)}{=} \sum_{i=u}^{v} a_m b_i + \sum_{i=u}^{v} a_{m+1} b_i + \ldots + \sum_{i=u}^{v} a_n b_i$$

$$\overset{(2)}{=} a_m \sum_{i=u}^{v} b_i + a_{m+1} \sum_{i=u}^{v} b_i + \ldots + a_n \sum_{i=u}^{v} b_i$$

$$= (a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n) \sum_{i=u}^{v} b_i = \sum_{k=m}^{n} a_k \sum_{i=u}^{v} b_i$$

$$(6)\quad \sum_{k=m+l}^{n+l} a_{k-l} = a_{m+l-l} + a_{m+l+1-l} + \ldots + a_{n+l-l}$$

$$= a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n = \sum_{k=m}^{n} a_k$$

■

Beispiel 17

Vereinfachen Sie die Summe $\sum_{k=0}^{n} k^2 + 4 \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 4$ soweit wie möglich.

Lösung:
Mit Satz 2.1 gilt

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 + 4 \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 4 \overset{(2)}{=} \sum_{k=0}^{n} k^2 + \sum_{k=0}^{n} 4k + \sum_{k=0}^{n} 4 \overset{(1)}{=} \sum_{k=0}^{n} (k^2 + 4k + 4) = \sum_{k=0}^{n} (k+2)^2.$$

Eine der wichtigsten Summen überhaupt in der Mathematik ist die Summe

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n,$$

die auch als **geometrische Summe** bezeichnet wird.

Satz 2.2 *Sei $q \in \mathbb{R}$. Dann gilt für die geometrische Summe die Summenformel*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{für } q = 1, \\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{für } q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}. \end{cases}$$

Beweis:
Der Beweis wird hier direkt geführt. Dazu schreibt man die beiden Summen S_n und $q \cdot S_n$ untereinander auf.

$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + q^n \qquad (i)$$
$$q \cdot S_n = q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots + q^n + q^{n+1} \qquad (ii)$$

Subtrahiert man jetzt von der Gleichung (i) die Gleichung (ii), dann heben sich die Summanden $q, q^2, \ldots, q^n$ heraus und dann folgt für alle $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$S_n - q \cdot S_n = 1 - q^{n+1} \quad \Rightarrow \quad (1-q)\, S_n = 1 - q^{n+1} \quad \Rightarrow \quad S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Für $q = 1$ erhält man $S_n = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 = (n+1) \cdot 1 = n+1$.

■

Auch im alltäglichen Leben spielt die geometrische Summe eine wichtige Rolle. Zum Beispiel bei der Verzinsung eines Kapitals über mehrere Jahre hinweg. Betrachten Sie dazu das folgende

Beispiel 18
Ein Anleger bringt zu Beginn eines jeden Jahres den festen Betrag B zur Bank, der mit dem festen Zinssatz p am Ende eines jeden Jahres verzinst wird und seinem Konto gutgeschrieben wird. Bestimmen Sie den ersparten Betrag K_n nach n Jahren.

Lösung:
Der Zinsfaktor ist $q = 1 + \frac{p}{100}$ mit dem das Kapital am Ende eines jeden Jahres multipliziert werden muss. Dann ergibt sich die folgende Kapitalentwicklung jeweils am Ende des

1. Jahr $K_1 = Bq$
2. Jahr $K_2 = (K_1 + B)\, q = (Bq + B)\, q = Bq^2 + Bq$
3. Jahr $K_3 = (K_2 + B)\, q = (Bq^2 + Bq + B)\, q = Bq^3 + Bq^2 + Bq$

$$\vdots$$

n. Jahr $K_n = Bq^n + Bq^{n-1} + \ldots + Bq = qB\,(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1})$

$$= qB \sum_{k=0}^{n-1} q^k = qB\,\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Neben dem Summenzeichen gibt es noch ein weiteres Zeichen, mit dem sich äußerst effizient Produkte schreiben lassen.

Definition 2.2 *Wenn a_k ein beliebiger Ausdruck in Abhängigkeit von $k \in \mathbb{N}_0$ und $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$ ist, dann ist das* ***Produktzeichen*** *definiert als*

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n .$$

Für den Fall $m > n$ setzt man $\prod_{k=m}^{n} a_k := 1 .$

Das Produktzeichen dient ebenfalls dazu, endliche Produkte von Ausdrücken effizient und platzsparend darzustellen.

Beispiel 19

$a)$ $\cos(\pi) \cdot \cos(2\pi) \cdot \cos(3\pi) \cdot \ldots \cdot \cos(n\pi) = \prod_{k=1}^{n} \cos(k\pi)$

$b)$ $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{\mu-1} \cdot x_\mu} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{\mu} x_k}$

Von besonderer Bedeutung ist das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen.

Definition 2.3 *Für alle $n \in \mathbb{N}$ heißt das Produkt*

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

n - *Fakultät*. *Man definiert weiter* $0! := 1 .$

Aus dieser Definition lässt sich sofort die fundamentale Eigenschaft der Fakultät

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = (n-1)! \cdot n$$

ablesen.

Beispiel 20

Angenommen Sie sollen die drei verschiedenen Bücher B_1, B_2 und B_3 nebeneinander in ein Bücherregal stellen. Wie viele Aufstellmöglichkeiten sind dann möglich?

Lösung:

An erster Stelle kann eines der drei Bücher B_1, B_2 oder B_3 platziert werden. Es gibt dafür also insgesamt drei Möglichkeiten.

An zweiter Stelle können jeweils nur noch zwei der verbleibenden Bücher platziert werden, sodass für die dritte Stelle nur noch ein Buch übrigbleibt. In der folgenden Abbildung sind die Platzierungsmöglichkeiten in einem Diagramm dargestellt.

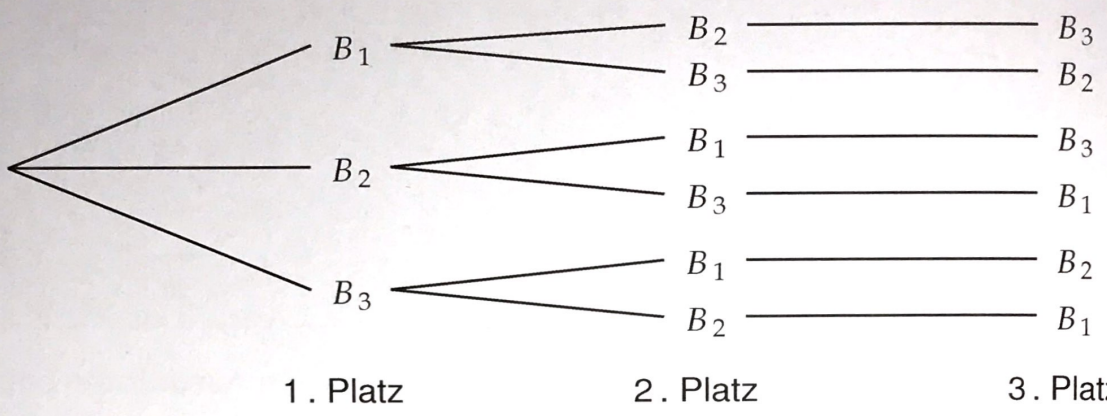


Abbildung 2.1 Platzierungsmöglichkeiten der drei Bücher B_1, B_2, B_3.

Man erkennt aus dieser Abbildung, dass es genau $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Platzierungsmöglichkeiten gibt. Anders formuliert kann man diese Aufgabe auch so interpretieren: Wie viele verschiedene Tripel lassen sich aus der Menge $\{B_1, B_2, B_3\}$ bilden, wenn jedes Element nur einmal vorkommen darf? Es sind genau $3!$ solcher Tripel, nämlich

$$(B_1, B_2, B_3), \quad (B_1, B_3, B_2), \quad (B_2, B_1, B_3),$$
$$(B_2, B_3, B_1), \quad (B_3, B_1, B_2), \quad (B_3, B_2, B_1).$$

Man spricht hier auch von **Permutation** ohne Wiederholung.

Definition 2.4 *Für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ heißt*

$$\binom{n}{k} := \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}$$

Binomialkoeffizient *und wird gelesen als „n über k“. Für $k = 0$ setzt man $\binom{n}{0} := 1$.*

Aus dieser Definition ergibt sich sofort

$$\binom{0}{0} = 1 \quad \text{und} \quad \binom{n}{n} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} = \frac{n!}{n!} = 1.$$

Beispiel 21
Mit der Definition 2.4 ergeben sich die Binomialkoeffizienten für alle $0 \leq k \leq n \leq 4$ zu

- $\binom{0}{0} = 1$.
- $\binom{1}{0} = 1$, $\binom{1}{1} = 1$.

- $\binom{2}{0} = 1$, $\binom{2}{1} = \frac{2}{1} = 2$, $\binom{2}{2} = 1$.
- $\binom{3}{0} = 1$, $\binom{3}{1} = \frac{3}{1} = 3$, $\binom{3}{2} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3$, $\binom{3}{3} = 1$.
- $\binom{4}{0} = 1$, $\binom{4}{1} = \frac{4}{1} = 4$, $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$, $\binom{4}{3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$, $\binom{4}{4} = 1$.

Eine der wichtigsten Anwendungen der Binomialkoeffizienten liegt in der Berechnung der Binompotenzen $(a+b)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= a+b \\
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
&\vdots
\end{aligned}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & & & \vdots & & &
\end{array}
$$

In dem rechts angeordneten Dreieck, dem sogenannten **Pascalschen Dreieck**, benannt nach dem Mathematiker und Physiker ***Blaise Pascal*** $(1623 - 1662)^*$, sind die Koeffizienten der entsprechenden Potenzen zu finden. Vergleichen Sie diese Zahlen mit den Zahlen aus dem Beispiel 21. Dann gilt für die Koeffizienten offenbar:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= a+b \\
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
&\vdots
\end{aligned}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
 & & & \vdots & & &
\end{array}
$$

Für zum Beispiel $(a+b)^3$ lässt sich jetzt offensichtlich

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^3 + \binom{3}{1} a^2 b + \binom{3}{2} a b^2 + \binom{3}{3} b^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} a^{3-k} b^k$$

schreiben, wodurch auch der Name Binomialkoeffizient seine Gerechtfertigkeit findet.

---

*) Blaise Pascal, französischer Mathematiker und Physiker, geb. 19. Juni 1623 in Clermont - Ferrand, gest. 19. August 1662 in Paris. Pascal beschäftigte sich vorwiegend mit Glücksspielen und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Zwei fundamentale Eigenschaften der Binomialkoeffizienten sind in dem folgenden Satz zusammengefasst.

Satz 2.3 *Seien* $n, k \in \mathbb{N}_0$. *Dann gilt*

$$(1)\quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = \binom{n}{n-k} \qquad \textit{für alle } k \leq n,$$

$$(2)\quad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \qquad \textit{für alle } 1 \leq k \leq n.$$

Beweis:

(1) Mit den Definitionen 2.3 und 2.4 ergibt sich für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{(n-k)!}{(n-k)!}\\ &= \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(n-k)!\cdot k!}\\ &= \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n!}{(n-(n-k))!\cdot(n-k)!} = \binom{n}{n-k}.\end{aligned}$$

(2) Mit (1) folgt für alle $n, k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq k \leq n$

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(n-k+1)!\cdot(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}\\ &= \frac{n!}{(n-k+1)!\cdot(k-1)!}\cdot\frac{k}{k} + \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}\cdot\frac{n-k+1}{n-k+1}\\ &= \frac{k\cdot n!}{(n-k+1)!\cdot k!} + \frac{(n-k+1)\cdot n!}{(n-k+1)!\cdot k!} = \frac{(k+n-k+1)\cdot n!}{(n-k+1)!\cdot k!}\\ &= \frac{(n+1)\cdot n!}{(n-k+1)!\cdot k!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!\cdot k!} = \binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

■

Die Formel (2) stellt eine Rekursionsformel für die Binomialkoeffizienten dar. Denn wenn man alle $\binom{n}{k}$ für ein beliebiges n schon kennt, so kann man mit ihr sehr einfach alle $\binom{n+1}{k}$ berechnen. Schauen Sie sich dazu noch einmal das Pascalsche Dreieck an. Dann ist $\binom{n}{k}$ gerade die Zahl, die sich in der n - ten Zeile und k - ten Spalte des Dreiecks befindet. Um die $\binom{n+1}{k}$ zu berechnen, brauchen Sie einfach nur die beiden Zahlen aus der Zeile davor die links und rechts über der Zahl $\binom{n+1}{k}$ angeordnet sind zu addieren.

Es sei $A(n)$ eine Aussage (sehen Sie dazu auch Abschnitt 6.1), welche von natürlichen Zahlen n abhängt. Zum Beweis einer Behauptung: „Für alle natürlichen Zahlen n gilt $A(n)$" benutzt man das Prinzip der **vollständigen Induktion** (den Beweis hierzu finden Sie im Abschnitt 6.2), das im wesentlichen in den folgenden drei Schritten abläuft.

1) **Induktionsanfang**
Man zeigt, dass die Aussage $A(n_0)$ für ein geeignetes $n_0 \in \mathbb{N}$ wahr ist.

2) **Induktionsannahme**
Es wird angenommen, dass die Aussage $A(n)$ für eine natürliche Zahl $n \geq n_0$ wahr ist.

3) **Induktionsschritt**
Mit der Induktionsannahme $A(n)$ zeigt man dann, dass daraus die Richtigkeit der Aussage $A(n+1)$ folgt.

Es ergibt sich, dass $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ eine wahre Aussage liefert. Denn es ist ja für

$n = n_0$: $A(n_0)$ wahr nach (1).
$n = n_0 + 1$: $A(n_0 + 1)$ wahr nach (3) wenn $n = n_0$ gesetzt wird.
$n = n_0 + 2$: $A(n_0 + 2)$ wahr nach (3) wenn $n = n_0 + 1$ gesetzt wird.
$n = n_0 + 3$: $A(n_0 + 3)$ wahr nach (3) wenn $n = n_0 + 2$ gesetzt wird.
$\vdots$

Beispiel 22
Beweisen Sie die Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $2^n > n$.

Beweis:
Die Aussage $A(n)$ ist hier $2^n > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- Induktionsanfang
Setzt man in $A(n)$ die Zahl $n = 1$ ein, dann folgt dass $A(1)$ wahr ist. Denn es gilt $2^1 = 2 > 1$.

- Induktionsannahme
Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt die Aussage $A(n)$, also $2^n > n$ $(*)$.

- Induktionsschritt
Zu zeigen ist, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also $2^{n+1} > n+1$. Mit der Induktionsannahme $(*)$ ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N}$

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{(*)}{>} 2n = n + n \geq n + 1,$$

sodass aus der Richtigkeit der Aussage $A(n)$ stets die Richtigkeit der Aussage $A(n+1)$ folgt.

■

Satz 2.4 *Für alle* $n \in \mathbb{N}_0$ *und* $a, b \in \mathbb{R}$ *gilt der* **binomische Satz**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k .$$

Beweis :
Der Beweis erfolgt mit vollständiger Induktion .

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = 0$, denn es gilt

$$(a+b)^0 = 1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k = \binom{0}{0} a^{0-0} b^0 = 1 .$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes , aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq 0$ gilt :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zu zeigen ist , dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist ; also

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k .$$

  Mit der Induktionsannahme $(\star)$ und den Identitäten

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \qquad 1 = \binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} \quad (\star\star)$$

  aus Satz 2.3 ergibt sich

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \overset{(\star)}{=} (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&= a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
&= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \binom{n}{1} a^n b^1 + \binom{n}{2} a^{n-1} b^2 + \ldots + \binom{n}{n} a^1 b^n \\
&\quad + \binom{n}{0} a^n b^1 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^2 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^3 + \ldots + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{0}\right] a^n b^1 + \left[\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\right] a^{n-1} b^2 + \dots \\
&\quad + \left[\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1}\right] a^1 b^n + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1} \\
&\overset{(\star\star)}{=} \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{1} a^n b^1 + \binom{n+1}{2} a^{n-1} b^2 + \dots \\
&\quad + \binom{n+1}{n} a^1 b^n + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{1} a^n b^1 + \binom{n+1}{2} a^{n-1} b^2 + \dots \\
&\quad + \binom{n+1}{n} a^1 b^n + \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k .
\end{aligned}
$$

■

Eine für manche Beweise wichtige Ungleichung ist die **Bernoullische Ungleichung**, die nach dem Mathematiker und Physiker ***Jakob I. Bernoulli*** $(1655-1705)^*$ benannt ist.

Satz 2.5 *Für jede natürliche Zahl* $n \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$(1+x)^n \geq 1+nx \qquad \text{für alle} \qquad x \geq -1.$$

Beweis:
Der Beweis erfolgt auch hier wieder mit vollständiger Induktion.

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = 1$, denn $(1+x)^1 = 1+x \geq 1+1\cdot x = 1+x$.
- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt:

  $$(1+x)^n \geq 1+nx \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zu zeigen ist, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

  $$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x.$$

---

*) Jakob I. Bernoulli, schweizer Mathematiker und Physiker, geb. 6. Januar 1655 in Basel, gest. 16. August 1705 in Basel. Bernoulli war Professor für Mathematik in Basel und arbeitete auf den Gebieten der Variationsrechnung und den Differenzialgleichungen.

Mit der Induktionsannahme $(\star)$ ergibt sich für $x \geq -1$

$$(1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)}_{\geq 0}(1+x)^n \overset{(\star)}{\geq} \underbrace{(1+x)}_{\geq 0}(1+nx) = 1+nx+x+\underbrace{nx^2}_{\geq 0}$$
$$\geq 1+nx+x = 1+(n+1)x.$$

■

2.4 Übungsaufgaben

Aufgabe 9

Schreiben Sie folgende Ausdrücke mithilfe eines Produktzeichens.

a) $1 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 49 \cdot 81 \cdot 121 \cdot 169$ *b*) $\frac{1}{4-2} \cdot \frac{1}{9-3} \cdot \frac{1}{16-4} \cdot \frac{1}{25-5} \cdot \frac{1}{36-6}$

Aufgabe 10

Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke mithilfe eines Summenzeichens.

a) $1+\frac{1}{6}+\frac{1}{15}+\frac{1}{28}+\frac{1}{45}+\frac{1}{66}$ *b*) $\frac{18}{27}+\frac{32}{64}+\frac{50}{125}+\frac{72}{216}+\frac{98}{343}+\frac{128}{512}$

c) $\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{10}}$ *d*) $1+2a+3a^2+4a^3+\ldots+na^{n-1}$

e) $-1+1+3+5+\ldots+15$ *f*) $1-4+7-10+13-16+19-22$

g) $\frac{4}{5}-\frac{5}{6}+\frac{6}{7}-\frac{7}{8}+\frac{8}{9}-\frac{9}{10}$ *h*) $-\frac{2}{3}+\frac{3}{6}-\frac{4}{9}+\frac{5}{12}-\frac{6}{15}+\frac{7}{18}-\frac{8}{21}+\frac{9}{24}$

Aufgabe 11

Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke mithilfe eines Summenzeichens.

a) $\frac{1}{3}-\frac{1}{8}+\frac{1}{15}-\frac{1}{24}+\frac{1}{35}\mp\ldots+\frac{1}{2703}$ *b*) $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{12}-\frac{1}{20}+\frac{1}{30}\mp\ldots+\frac{1}{6642}$

Aufgabe 12

Bestimmen Sie die Lösungen $x \in \mathbb{Z}$ der Gleichung $\sum_{k=0}^{2} k\,x^k = 0$.

Aufgabe 13

Berechnen Sie den Wert der folgenden Summen.

a) $\sum_{j=0}^{4} \frac{1}{2^j}$ *b*) $\sum_{k=0}^{4} \frac{k}{2^k}$ *c*) $\sum_{n=2}^{100} \frac{n+1}{n-1} - \sum_{k=2}^{100} \frac{k+2}{k}$

d) $\sum_{k=0}^{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$ *e*) $\sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^k}{k!}$ *f*) $\sum_{k=0}^{99} (k+1)^3 - \sum_{k=2}^{101} (k-1)^3$

g) $\sum_{m=-3}^{0} \frac{m+2}{m+4}$ *h*) $\sum_{n=-2}^{1} \frac{(-1)^n}{n+3}$ *i*) $\sum_{k=1}^{100} \left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)$

$j)\ \sum_{j=-4}^{0} \frac{|j|}{j+5}$ $k)\ \sum_{m=-2}^{4} \frac{m}{|m|+2}$ $l)\ \sum_{k=1}^{171} \left[k^2-(k-1)^2\right]$

Aufgabe 14

Berechnen Sie den Wert der folgenden Produkte.

$a)\ \prod_{k=-3}^{3} 2^k$ $b)\ \prod_{k=-4}^{4} (k-1)k$ $c)\ \prod_{k=2}^{247} \frac{2k^2}{2k^2-4k+2}$

$d)\ \prod_{k=0}^{7} \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)$ $e)\ \prod_{k=1}^{171} (-1)^k \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$ $f)\ \prod_{j=0}^{10} \frac{1}{2^{2j+1}} \prod_{j=2}^{11} 4^j$

$g)\ \prod_{k=2}^{15} \frac{k-1}{k+1}$ $h)\ \prod_{n=1}^{300} \left(1+\frac{1}{n}\right)$ $i)\ \prod_{j=0}^{11} \left(\frac{1}{4}\right)^j \prod_{j=0}^{11} 2^{2j}$

$j)\ \prod_{k=3}^{150} \frac{2k}{k-2}$ $k)\ \prod_{k=1}^{100} \frac{k}{k+1}$ $l)\ \prod_{k=1}^{4} \sin\frac{(2k+1)\pi}{4}$

Aufgabe 15

Berechnen Sie den Wert folgender Summen beziehungsweise Produkte.

$a)\ \sum_{k=0}^{4} \left(\prod_{j=0}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^j\right)$ $b)\ \prod_{k=0}^{171} (-1)^k \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)$ $c)\ \prod_{k=1}^{4} \left(\sum_{j=0}^{k} j\right)$

$d)\ \sum_{k=12}^{21} (k^2-22k+121)$ $e)\ \prod_{j=1}^{6} \frac{1}{j+1} \left(j+\sum_{k=1}^{j} (k-1)\right)$

Aufgabe 16

Zeigen Sie Gleichheit oder Ungleichheit der folgenden Summen bzw. Produkte.

$a)\ \sum_{j=0}^{9} (3j+1) = \sum_{j=1}^{10} (3j-2)$ $b)\ \prod_{k=1}^{10} k^2 = \prod_{k=1}^{9} (11-k)^2$

$c)\ \sum_{l=1}^{4} (6l-5) - \sum_{l=1}^{4} (5l-2) = \sum_{m=1}^{4} (m-3)$ $d)\ \sum_{l=1}^{5} l = \sum_{m=1}^{5} (6-m)$

$e)\ \sum_{u=1}^{4} (u^2-1) - \sum_{v=1}^{4} (2v-2) = \sum_{w=1}^{4} (w-1)^2$ $f)\ \prod_{l=1}^{5} \sum_{m=1}^{5} ml = \sum_{l=1}^{5} \prod_{m=1}^{5} ml$

$g)\ \sum_{j=1}^{4} \sum_{i=j}^{4} (i+j-1) = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{i} (i+j-1)$

Aufgabe 17

Vervollständigen Sie die folgenden Gleichungen:

$a)\ \sum_{l=0}^{n} 2^l = 1+\sum_{k=0}$ $= \left(\sum_{m=0}\right) + 2^n$ $b)\ \sum_{k=2}^{n} (-1)^k a_{k-1} = \sum_{m=} (-1)\, a_{n-m}$

Aufgabe 18

Zeigen Sie durch Indexverschiebung, dass beide Summen identisch sind.

$$a)\ \sum_{l=2}^{10} \frac{l}{l^2+1} = \sum_{k=-2}^{6} \frac{k+4}{k^2+8k+17} \qquad b)\ \sum_{l=3}^{10} \frac{l^2}{l-1} = \sum_{k=0}^{7} \frac{k^2+6k+9}{k+2}$$

$$c)\ \sum_{n=10}^{29} \frac{1}{n^2-18n} = \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k^2-81} \qquad d)\ \sum_{k=4}^{25} \frac{1}{k^2-9} = \sum_{n=7}^{28} \frac{1}{n^2-6n}$$

Aufgabe 19

Geben Sie die folgende Menge M konkret an. Benutzen Sie für Ihre Behauptung die vollständige Induktion.

$$M = \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \frac{2n+1}{2^n} < \frac{1}{3} \right\}$$

Aufgabe 20

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Hinweis: Wenden Sie den binomischen Satz an!

Aufgabe 21

Sei $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion die Gültigkeit der Gleichung

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{q^n - 1}{q-1} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 22

Beweisen Sie mithilfe der vollständigen Induktion.

$$(b+1)^n > 1 + \frac{n^2 b^2}{4} \qquad \text{für} \quad n \geq 2,\ b > 0.$$

Aufgabe 23

Beweisen Sie mithilfe der vollständigen Induktion, dass

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \ \wedge\ a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \qquad \text{gilt:} \qquad \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

Aufgabe 24

Zeigen Sie mittels des Beweisprinzips der vollständigen Induktion:

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt} \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right)^2 \leq 2n.$$

Aufgabe 25

Für welche natürlichen Zahlen n gilt die *Bernoullische* Ungleichung

$$(1+h)^n \geq 1+nh \qquad \text{mit} \qquad h \geq -1\,.$$

Beweisen Sie Ihre Vermutung mithilfe der vollständigen Induktion.

Aufgabe 26

Zeigen Sie mit der Methode der vollständigen Induktion: Die Anzahl $D(n)$ der Diagonalen in einem konvexen n - Eck kann für $n \geq 3$ nach der Formel

$$D(n) = \frac{n}{2}(n-3) \quad \text{berechnet werden.}$$

Aufgabe 27

Zeigen Sie mit der Methode der vollständigen Induktion: Wenn n Personen auf einer Party miteinander anstoßen, dann klingelt es $K(n) = \frac{n(n-1)}{2}$ mal.

Aufgabe 28

Zeigen Sie mit der Methode der vollständigen Induktion: Für alle $m \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$ und $n > m$ gilt

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^m \binom{n-1}{m}\,.$$

Aufgabe 29

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \qquad \textbf{Hinweis:} \quad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Aufgabe 30

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1} \qquad \text{für alle} \qquad n, m \in \mathbb{N}, \quad m \leq n\,.$$

Aufgabe 31

Zeigen Sie mithilfe der vollständigen Induktion, dass

$$\binom{n}{k} = \sum_{j=1}^{n} \binom{j-1}{k-1} \qquad \text{für alle} \quad n \geq 1 \quad \text{und alle } k \in \mathbb{N} \text{ mit } 1 \leq k \leq n \text{ gilt.}$$

Hinweis: Es ist $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

Aufgabe 32

Beweisen Sie folgende Ausdrücke per vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}_0$. Finden Sie jeweils die **kleinste** natürliche Zahl $n_0 \in \mathbb{N}_0$, für die der Ausdruck wahr ist.

a) $(1+x)^n \leq 1+nx+n(n-1)\frac{x^2}{2}$, falls $x \leq 0$. *b*) $2^n > n^2+6n-4$

c) $\prod_{k=0}^{n}(2^{2^k}+1) = 2^{2^{n+1}}-1$ *d*) $\frac{1}{n!}+\frac{5}{(n+2)!} \geq \frac{5}{(n+1)!}$

Aufgabe 33

Beweisen Sie mit der vollständigen Induktion für **welche** $n \in \mathbb{N}$ die folgenden Aussagen gelten.

a) $2^n < n!$ *b*) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$ *c*) $2^n < 3n(n+1)$

d) $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$ *e*) $2^n > n^3$ *f*) $e^n > n+1$

g) $\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{2^{k-1}} = 3-\frac{n+2}{2^{n-1}}$ *h*) $2^n > n^2$ *i*) $2n+1 < 2^n$

Aufgabe 34

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

a) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ *b*) $\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) \geq 1+\sum_{k=1}^{n}x_k$

c) $\sum_{k=1}^{n}k^3 = \binom{n+1}{2}^2$ *d*) $\sum_{k=0}^{n}\frac{4k}{3^{k+1}} = 1-\frac{2n+3}{3^{n+1}}$

e) $p^n > n$ für $p \geq 2$. *f*) $\sum_{k=0}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Aufgabe 35

Beweisen Sie mithilfe der vollständigen Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

a) $\sum_{k=1}^{n}k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ *b*) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = 1-\frac{1}{n+1}$

c) $\sum_{k=1}^{n}(3k^2-3k+1) = n^3$ *d*) $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = n+1$

e) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$ *f*) $\sum_{k=1}^{n}k = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

g) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k} = 2-\frac{n+2}{2^n}$ *h*) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k^2 = (-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}$

i) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq n$

j) $\sum_{k=1}^{n} \frac{3}{(3k-2)(3k+1)} = 1 - \frac{1}{3n+1}$

k) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$

l) $\sum_{k=0}^{n} \frac{9k}{4^{k+1}} = 1 - \frac{3n+4}{4^{n+1}}$

Aufgabe 36

Beweisen Sie mithilfe der vollständigen Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2^k} = 6 - \frac{n^2+4n+6}{2^n}$

b) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2$

c) $2n \leq 1 + \frac{n(n+1)}{2}$

d) $\sum_{k=1}^{n} (3k^2 - k) = n^2(n+1)$

e) $\sum_{j=1}^{n} j \cdot j! = (n+1)! - 1$

f) $\frac{n(n^2+5)}{3} \in \mathbb{N}$

g) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^{k-1}} = \frac{1}{4} \left(9 - \frac{2n+3}{3^{n-1}} \right)$

h) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 \leq 2n^4$

3 Gleichungen und Ungleichungen

3.1 Äquivalente Umformungen

Umformungen von Gleichungen und Ungleichungen gehören in der gesamten Mathematik zum wichtigsten „Werkzeug“, um ein mathematisches Problem zu lösen. Eine Umformung überführt dabei eine Gleichung G_1 beziehungsweise Ungleichung U_1 in eine neue Gleichung G_2 beziehungsweise Ungleichung U_2.

Beispiel 23

- Gegeben sei die Gleichung $G_1: \; x = 5$. Wird diese Gleichung quadriert, dann ergibt sich die neue Gleichung $G_2: \; x^2 = 25$. Dabei hat die Gleichung G_1 die Lösungsmenge $L_1 = \{5\}$ und die Gleichung G_2 die Lösungsmenge $L_2 = \{-5, 5\}$. Durch die Umformung wurde die zusätzliche Lösung $x = -5$ erzeugt, die die Gleichung G_1 nicht erfüllt. Es ist also $L_1 \neq L_2$.
- Gegeben sei die Gleichung $G_1: \; 2\sqrt{x} = 6$. Dividiert man diese Gleichung durch die Zahl 2 und quadriert anschließend, dann ergibt sich die neue Gleichung $G_2: \; x = 9$. Dabei hat die Gleichung G_1 die Lösungsmenge $L_1 = \{9\}$ und die Gleichung G_2 die Lösungsmenge $L_2 = \{9\}$. Es ist also $L_1 = L_2$.

Wie aus diesen Beispielen ersichtlich wird, gibt es Umformungen, die zu ungleichen beziehungsweise gleichen Lösungsmengen führen.

Definition 3.1 *Gegeben seien zwei Gleichungen G_1 mit der Lösungsmenge L_1 und G_2 mit der Lösungsmenge L_2 in $n \in \mathbb{N}$ Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$.*

- *Eine **äquivalente** Umformung der Gleichung G_1 in die Gleichung G_2 liegt genau dann vor, wenn sie die gleichen Lösungsmengen $L_1 = L_2$ haben. Man schreibt dann $G_1 \Leftrightarrow G_2$.*
- *Eine **nichtäquivalente** Umformung der Gleichung G_1 in die Gleichung G_2 liegt vor, wenn sie nicht die gleichen Lösungsmengen $L_1 \neq L_2$ haben. Man schreibt in diesem Fall $G_1 \Rightarrow G_2$.*

Beispiel 24

Gegeben sei die Gleichung $x^2 + y^2 = 2xy$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
& x^2 + y^2 = 2xy && \mid \; -2xy \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 + y^2 - 2xy = 0 && \mid \text{ binomische Formel} \\
\Leftrightarrow \quad & (x - y)^2 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x = y
\end{aligned}
$$

Beispiel 25
Gegeben sei die Gleichung $\sqrt{x} = x - 2$ für $x \in \mathbb{R}_0^+$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & x - 2 = \sqrt{x} && \mid (\,)^2 \\ \Rightarrow \quad & x^2 - 4x + 4 = x && \mid -x \\ \Rightarrow \quad & x^2 - 5x + 4 = 0 \\ \Rightarrow \quad & (x-4)(x-1) = 0 \end{aligned}$$

Das Produkt ist genau dann null, wenn $x = 4$ oder $x = 1$ ist. Beachten Sie dabei, dass nur $x = 4$ eine Lösung der Gleichung $\sqrt{x} = x - 2$ ist, während $x = 1$ keine Lösung dieser Gleichung darstellt. Das Potenzieren in der ersten Zeile ist in diesem Fall also eine nichtäquivalente Umformung!

In dem Beispiel 25 ist die Lösungsmenge der Ausgangsgleichung $L_1 = \{4\}$, während nach der nichtäquivalenten Umformung die Lösungsmenge $L_2 = \{1, 4\}$ entstanden ist. Es wurde also wegen $L_1 \subset L_2$ eine zusätzliche Lösung erzeugt, die aber keine Lösung der Ausgangsgleichung ist. Umgekehrt kann bei nichtäquivalenten Umformungen auch eine Lösung verloren gehen, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 26
Gegeben sei die Gleichung $G_1: \; x^2 = x$ mit der Lösungsmenge $L_1 = \{0, 1\}$. Nach Division durch x folgt die Gleichung $G_2: \; x = 1$ mit der Lösungsmenge $L_2 = \{1\} \subset L_1$. Also wurde wegen $L_1 \neq L_2$ auch hier eine nichtäquivalente Umformung vorgenommen.

Bemerkung:
Äquivalente Umformungen von Gleichungen sind:

- Addition beziehungsweise Subtraktion des gleichen Terms zu beiden Seiten.
- Multiplikation beziehungsweise Division beider Seiten mit einem Term, der niemals den Wert Null annimmt.
- Wurzelziehen aus beiden Seiten nur wenn beide Seiten positiv sind und auf beiden Seiten die positive Wurzel gezogen wird. Bei höheren Wurzeln ist die gleiche Einschränkung bei allen geraden Wurzelexponenten zu beachten.

Nichtäquivalente Umformungen von Gleichungen sind:

- Potenzieren beider Seiten einer Gleichung.
- Multiplikation beziehungsweise Division beider Seiten mit einem Term, der den Wert Null annehmen kann.

Beispiel 27
Ein häufig vorkommendes Beispiel für eine äquivalente Umformung ist die **quadratische Gleichung** $a x^2 + b x + c = 0$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Durch die Substitution $p := \frac{b}{a}$ und $q := \frac{c}{a}$ lässt sich diese Gleichung in die äquivalente Form $x^2 + p x + q = 0$ überführen. Dann folgt mithilfe der binomischen Ergänzung die bekannte Lösungformel:

$$x^2 + px + q = 0 \quad | \text{ binomische Ergänzung}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + px + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2 = 0 \quad | \text{ binomische Formel}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Die Zahl $\Delta := \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ heißt die **Diskriminante** der quadratischen Gleichung.

Mit Ungleichungen kann im Prinzip genauso gerechnet werden wie mit Gleichungen, wobei allerdings einiges zu beachten ist. Wird eine Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert oder dividiert, dann dreht sich das Ungleichheitszeichen um! Betrachten Sie beispielsweise die Ungleichung $4 < 12$. Dann gilt einerseits:

$$\begin{array}{lll} 4 < 12 \quad | +4 & 4 < 12 \quad | \cdot 4 & 4 < 12 \quad | : 4 \\ \Leftrightarrow \quad 8 < 16 & \Leftrightarrow \quad 16 < 48 & \Leftrightarrow \quad 1 < 3 \end{array}$$

und andererseits:

$$\begin{array}{lll} 4 < 12 \quad | -4 & 4 < 12 \quad | \cdot(-4) & 4 < 12 \quad | : (-4) \\ \Leftrightarrow \quad 0 < 8 & \Leftrightarrow \quad -16 > -48 & \Leftrightarrow \quad -1 > -3 \end{array}$$

Für Ungleichungen gibt es ebenfalls äquivalente und nichtäquivalente Umformungen.

Definition 3.2 *Gegeben seien zwei Ungleichungen U_1 mit der Lösungsmenge L_1 und U_2 mit der Lösungsmenge L_2 in $n \in \mathbb{N}$ Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$.*

- *Eine **äquivalente** Umformung der Ungleichung U_1 in die Gleichung U_2 liegt genau dann vor, wenn sie die gleichen Lösungsmengen $L_1 = L_2$ haben. Man schreibt dann $U_1 \Leftrightarrow U_2$.*
- *Eine **nichtäquivalente** Umformung der Ungleichung U_1 in die Ungleichung U_2 liegt vor, wenn sie nicht die gleichen Lösungsmengen $L_1 \neq L_2$ haben. Man schreibt in diesem Fall $U_1 \Rightarrow U_2$.*

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ zwei beliebige reelle Zahlen. Für $x < y$ oder $x = y$ schreibt man auch kurz $x \leq y \Leftrightarrow y \geq x$.

Bemerkung:
Äquivalente Umformungen von Ungleichungen sind:

- Addition beziehungsweise Subtraktion des gleichen Terms zu beiden Seiten.
- Multiplikation beziehungsweise Division beider Seiten mit einem echt positiven Term.
- Multiplikation beziehungsweise Division beider Seiten mit einem Term der echt negativ ist bei gleichzeitiger Umkehrung des Ungleichheitszeichens.

Nichtäquivalente Umformungen von Ungleichungen sind:

- Potenzieren beider Seiten einer Ungleichung.
- Multiplikation beziehungsweise Division beider Seiten mit einem Term, der den Wert Null annehmen kann.

Beispiel 28
Welche Lösungsmenge hat die Ungleichung $2(x+4)-3(x+2) \geq x$, wenn $x \in \mathbb{R}$ angenommen wird?

Lösung:

$$\begin{aligned} & 2(x+4)-3(x+2) \geq x \\ \Leftrightarrow \quad & -x+2 \geq x \quad | \; -x-2 \\ \Leftrightarrow \quad & -2x \geq -2 \quad | \; :(-2) \\ \Leftrightarrow \quad & x \leq 1 \end{aligned}$$

Also ist die Lösungsmenge der Ungleichung das halboffene Intervall $L = (-\infty, 1]$.

3.2 Absolutbetrag reeller Zahlen

Definition 3.3 *Der* ***Absolutbetrag*** *einer reellen Zahl* $x \in \mathbb{R}$ *wird definiert durch*

$$|x| := \begin{cases} x & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ -x & \text{für } x < 0. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad |x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0, \\ -x & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Unter dem Absolutbetrag oder kurz einfach nur **Betrag** einer reellen Zahl versteht man geometrisch gesehen die Entfernung dieser Zahl auf dem Zahlenstrahl zum Nullpunkt. Die beiden Zahlen -5 und 5 beispielsweise haben zum Nullpunkt (Abbildung 3.1) die selbe Entfernung nämlich $|-5| = |5| = 5$.

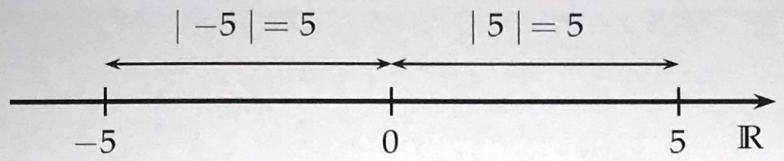


Abbildung 3.1 Betrag einer reellen Zahl.

Für den Betrag gelten Rechengesetze, die in dem folgenden Satz zusammengefasst sind.

Satz 3.1 *Für alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *und* $a \in \mathbb{R}^+$ *gelten folgende Aussagen:*

(1) $|x| \geq 0$
(2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(3) $|x| = |-x|$
(4) $-|x| \leq x \leq |x|$
(5) $|x| = \sqrt{x^2}$
(6) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
(7) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$
(8) $|x| = x \cdot \operatorname{sign}(x)$

Beweis

(1) Für alle $x \geq 0$ gilt $|x| = x \geq 0$ und für alle $x < 0$ gilt $|x| = -x > 0$. Also ist insgesamt $|x| \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(2) Aus $|x| = 0$ folgt mit Definition 3.3 $x = 0$. Umgekehrt folgt aus $x = 0$ ebenfalls mit Definition 3.3 $|0| = 0$. Also gilt $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(3) Für alle $x \geq 0$ gilt $|x| = x$ und $|-x| = -(-x) = x$. Also ist $|x| = |-x|$. Für alle $x < 0$ gilt $|x| = -x$ und $|-x| = -x$. Also ist $|x| = |-x|$. Daraus folgt insgesamt $|x| = |-x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(4) Für alle $x \geq 0$ gilt $-|x| \leq x \leq |x| \Leftrightarrow -x \leq x \leq x$. Für alle $x < 0$ gilt $-|x| \leq x \leq |x| \Leftrightarrow -(-x) \leq x \leq -x \Leftrightarrow x \leq x \leq -x$. Daraus folgt insgesamt für alle $x \in \mathbb{R}$ die Behauptung $-|x| \leq x \leq |x|$.

(5) Für $x = 0$ ist die Gleichung $|0| = \sqrt{0}$ offensichtlich erfüllt. Für alle $x > 0$ gilt einerseits $|x| = x$ und $\sqrt{x^2} = x$ und andererseits wegen (3) auch $|-x| = x$ und $\sqrt{(-x)^2} = \sqrt{x^2} = x$. Daraus folgt insgesamt $|x| = \sqrt{x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(6) Seien $x, y \geq 0$ oder $x, y < 0$. Dann gilt $x \cdot y \geq 0$ und damit ist $|x \cdot y| = x \cdot y$. In diesem Fall gilt $|x| = \pm x$ und $|y| = \pm y$, womit $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ folgt. Sei eine der beiden Variablen negativ. Angenommen es ist $x < 0$, sonst vertausche man einfach x mit y, dann gilt $x \cdot y \leq 0$ und damit ist $|x \cdot y| = -x \cdot y$. In diesem Fall gilt $|x| = -x$ und $|y| = y$, womit $|x| \cdot |y| = -x \cdot y$ gilt. Daraus erhält man schließlich $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(7) Für $x \geq 0$ gilt $|x| < a \Leftrightarrow x < a$. Für $x < 0$ gilt $|x| < a \Leftrightarrow -x < a \Leftrightarrow x > -a$. Daraus folgt $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(8) Mit der erst im Abschnitt 5.4 eingeführten Signumfunktion (Definition 5.9) gilt für

$$x = 0: \quad 0 \cdot \operatorname{sign}(0) = 0 \cdot 0 = 0 = |0|,$$
$$x > 0: \quad x \cdot \operatorname{sign}(x) = x \cdot 1 = x = |x|,$$
$$x < 0: \quad x \cdot \operatorname{sign}(x) = x \cdot (-1) = -x = |x|.$$

Daraus folgt $|x| = x \cdot \operatorname{sign}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

■

Beispiel 29
Gesucht ist die Lösungsmenge der Ungleichung $||x| - 1| > 2$ für $x \in \mathbb{R}$.

Lösung:

1. Fall Für $x < 0$ ist $|x| = -x$ und damit gilt $||x| - 1| = |-x - 1| > 2 \quad (*)$.

(i) Für $x \leq -1$ ist $|-x - 1| = -x - 1$ und die Ungleichung $(*)$ wird zu $-x - 1 > 2 \Leftrightarrow x < -3$. Dann lautet die erste Lösungsmenge

$$L_1 := \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \wedge x \leq -1 \wedge x < -3\} = (-\infty, -3).$$

(ii) Für $x > -1$ ist $|-x - 1| = -(-x - 1) = x + 1$ und die Ungleichung $(*)$ wird zu $x + 1 > 2 \Leftrightarrow x > 1$. Dann lautet die zweite Lösungsmenge

$$L_2 := \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \wedge x > -1 \wedge x > 1\} = \{\}.$$

2. Fall Für $x \geq 0$ ist $|x| = x$ und damit gilt $||x| - 1| = |x - 1| > 2 \quad (**)$.

(i) Für $x < 1$ ist $|x - 1| = -(x - 1) = -x + 1$ und die Ungleichung $(**)$ wird zu $-x + 1 > 2 \Leftrightarrow x < -1$. Dann lautet die dritte Lösungsmenge

$$L_3 := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \wedge x < 1 \wedge x < -1\} = \{\}.$$

(ii) Für $x \geq 1$ ist $|x - 1| = x - 1$ und die Ungleichung $(**)$ wird zu $x - 1 > 2 \Leftrightarrow x > 3$ Dann lautet schließlich die vierte Lösungsmenge

$$L_4 := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \wedge x \geq 1 \wedge x > 3\} = (3, \infty).$$

Insgesamt erhält man die Lösungsmenge L der Ungleichung aus der Vereinigung der vier Lösungsmengen $L_1, \ldots, L_4$. Es ist

$$L = \bigcup_{i=1}^{4} L_i = (-\infty, -3) \cup \{\} \cup \{\} \cup (3, \infty) = \mathbb{R} \setminus [-3, 3].$$

Eine nicht nur in der Analysis sehr wichtige Ungleichung ist die sogenannte Dreiecksungleichung, die in vielen Beweisen Verwendung findet um Terme abschätzen zu können.

Satz 3.2 *Für alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt die* ***Dreiecksungleichung***

$$|x+y| \leq |x| + |y| .$$

Beweis
Für den Fall $x+y \geq 0$ folgt mit Satz 3.1 wegen $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$

$$|x+y| = x+y \leq |x| + |y| .$$

Für den Fall $x+y < 0$, folgt mit Satz 3.1 wegen $-x \leq |-x| = |x|$ und $-y \leq |-y| = |y|$

$$|x+y| = -(x+y) = (-x)+(-y) \leq |x| + |y| .$$

■

Der Name Dreiecksungleichung leitet sich von der geometrischen Addition zweier Vektoren ab. Addiert man zwei beliebige Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$, dann bildet der Summenvektor $\vec{x}+\vec{y}$ zusammen mit den Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ ein Dreieck.

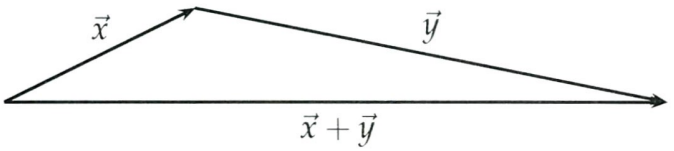


Abbildung 3.2 Vektoraddition

Aus der Abbildung 3.2 lässt sich entnehmen, dass die Summe der Längen der Vektorpfeile $\vec{x}$ und $\vec{y}$ größer oder höchstens gleich der Länge des Summenvektors $\vec{x}+\vec{y}$ ist. Das heißt es gilt stets $|\vec{x}+\vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$.

Beispiel 30
Beweisen Sie, dass für alle reellen Zahlen die Ungleichung $||x| - |y|| \leq |x-y|$ gilt.

Beweis:
Mithilfe der Dreiecksungleichung aus Satz 3.2 folgt

$$|x| = |x-y+y| \leq |x-y| + |y| \quad \Leftrightarrow \quad |x| - |y| \leq |x-y| \quad \text{und}$$
$$|y| = |y-x+x| \leq |y-x| + |x| = |x-y| + |x| \quad \Leftrightarrow \quad -|x| + |y| \leq |x-y| .$$

Insgesamt erhält man also $||x| - |y|| \leq |x-y|$.

■

3.3 Kreis- und Ellipsengleichung

Definition 3.4 *Ein* ***Kreis*** *ist die Menge aller Punkte einer Ebene, die von einem festen Punkt* M *(****Mittelpunkt****) gleichen Abstand* $r > 0$ *(****Radius*** *des Kreises) haben.*

Die Abbildung 3.3 zeigt einen verschobenen Kreis mit Mittelpunkt $M(x_m, y_m)$ und Radius r. Nach dem Satz von ***Pythagoras*** (etwa $570 - 510$ v. Chr.)* gilt im rechtwinkligen Dreieck die Gleichung $a^2 + b^2 = r^2$. Mit $a = x - x_m$ und $b = y - y_m$ lässt sich der Kreis beschreiben durch die Menge aller geordneten Paare

$$K := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2 \right\} .$$

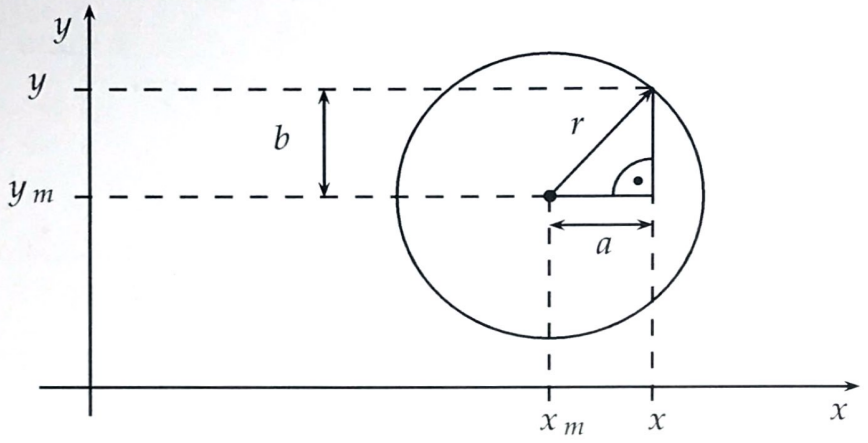


Abbildung 3.3 Kreis mit Mittelpunkt $M(x_m, y_m)$ und Radius r.

Beispiel 31
Bestimmen Sie für den Kreis $2x^2 + 2y^2 + 8x - 12y = 6$ den Mittelpunkt und den Radius.

Lösung :

$$\begin{aligned} & 2x^2 + 2y^2 + 8x - 12y = 6 && \mid : 2 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + 4x + y^2 - 6y = 3 && \mid \text{ binomische Ergänzung} \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + 4x + 4 - 4 + y^2 - 6y + 9 - 9 = 3 && \mid +13 \\ \Leftrightarrow \quad & (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16 \end{aligned}$$

Durch Vergleich mit K ergibt sich $-x_m = 2 \Leftrightarrow x_m = -2$ und $-y_m = -3 \Leftrightarrow y_m = 3$ sowie $r^2 = 16 \Rightarrow r = 4$. Also ist der Mittelpunkt $M(-2, 3)$ und der Radius $r = 4$.

Bemerkung :
Sei K ein Kreis mit Mittelpunkt $M(x_m, y_m)$ und Radius $r > 0$. Ein beliebiger Punkt $P(x, y)$ der Ebene kann entweder innerhalb , auf oder auch außerhalb des Kreises liegen. Wie aus der Abbildung 3.3 sofort ersichtlich wird , gelten die folgenden Regeln :

---

*) Pythagoras von Samos war ein griechischer Philosoph und Gründer einer einflussreichen religiös - philosophischen Bewegung . Trotz intensiver Bemühungen der Forschung gehört er noch heute zu den rätselhaftesten Persönlichkeiten der Antike . Manche Historiker zählen ihn zu den Pionieren der beginnenden griechischen Philosophie , Mathematik und Naturwissenschaften , andere meinen , er sei vorwiegend oder ausschließlich ein Vorkünder religiöser Lehren gewesen .

- $(x-x_m)^2+(y-y_m)^2<r^2 \Leftrightarrow P$ liegt innerhalb von K,
- $(x-x_m)^2+(y-y_m)^2=r^2 \Leftrightarrow P$ liegt auf K,
- $(x-x_m)^2+(y-y_m)^2>r^2 \Leftrightarrow P$ liegt außerhalb von K.

Beispiel 32

Beschreiben Sie die Menge $A := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2+2(x-y)\geq -1\right\}$.

Lösung:

$$\begin{aligned} & x^2+y^2+2(x-y)\geq -1 \\ \Leftrightarrow\quad & x^2+2x+y^2-2y\geq -1 \quad | \text{ binomische Ergänzung} \\ \Leftrightarrow\quad & x^2+2x+1-1+y^2-2y+1-1\geq -1 \quad | +2 \\ \Leftrightarrow\quad & (x+1)^2+(y-1)^2\geq 1 \end{aligned}$$

Also beschreibt die Menge A alle Punkte $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, die entweder außerhalb oder auf dem Kreis mit Mittelpunkt $M(-1,1)$ und Radius $r=1$ liegen.

Definition 3.5 *Eine **Ellipse** ist die Menge aller Punkte einer Ebene, deren Entfernungen von zwei festen Punkten F_1, F_2 (**Brennpunkte**) eine konstante Summe haben, die größer als der Abstand dieser Punkte ist.*

Zur Herleitung der Ellipsengleichung sei aus rechnerisch praktischen Gründen der Abstand der Brennpunkte $d(F_1,F_2)=2e$ und die Summe der Entfernungen von einem beliebigen Punkt P auf der Ellipse zu den Brennpunkten $d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$. Betrachten Sie jetzt die folgenden zwei Abbildungen.

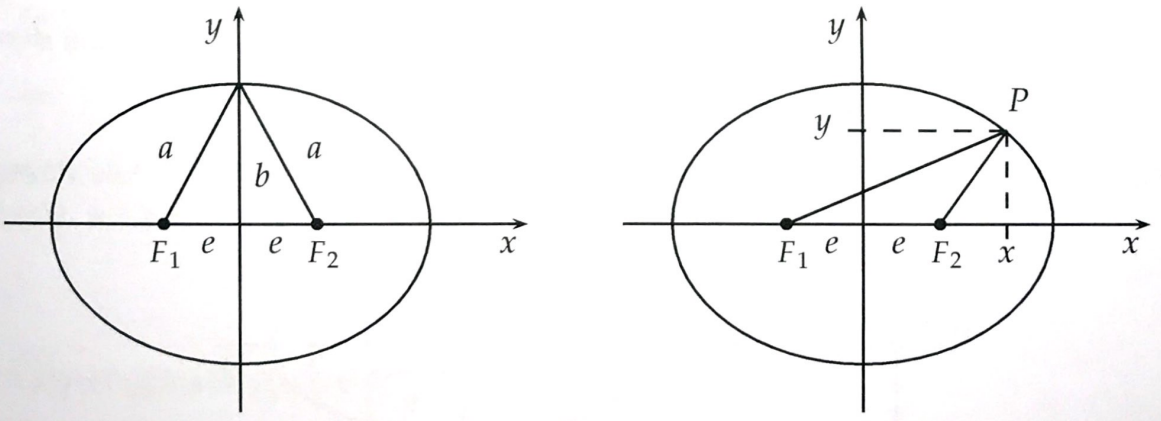


Abbildung 3.4 Ellipse mit Mittelpunkt $M(0,0)$.

Aus dem linken Bild ergibt sich mit dem Satz von Pythagoras $e^2=a^2-b^2$ $(*)$. Aus dem rechten Bild ergibt sich ebenfalls mit dem Satz von Pythagoras

$$\sqrt{(x+e)^2+y^2}+\sqrt{(x-e)^2+y^2}=2a$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x+e)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-e)^2+y^2}.$$

Quadrieren dieser Gleichung liefert:

$$(x+e)^2+y^2=4a^2+(x-e)^2+y^2-4a\sqrt{(x-e)^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2+2ex+e^2+y^2=4a^2+x^2-2ex+e^2+y^2-4a\sqrt{(x-e)^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4a\sqrt{(x-e)^2+y^2}=4a^2-4ex$$

$$\Leftrightarrow \quad a\sqrt{(x-e)^2+y^2}=a^2-ex$$

Nochmaliges Quadrieren ergibt unter der Voraussetzung $ab>0$ mit der Gleichung $(*)$ schließlich die Gleichung der Ellipse mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung.

$$a^2\left[(x-e)^2+y^2\right]=(a^2-ex)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2x^2-2exa^2+a^2e^2+a^2y^2=a^4-2exa^2+e^2x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2x^2+a^2e^2+a^2y^2=a^4+e^2x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2x^2+a^2(a^2-b^2)+a^2y^2=a^4+(a^2-b^2)x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Die Parameter a und b werden als **Halbachsen** der Ellipse bezeichnet. Sie geben die Schnittstellen der Ellipse mit der x - beziehungsweise y - Achse an. Für den Spezialfall $a=b$ folgt aus Gleichung $(*)$ sofort $e=0$. In diesem Fall liegen die beiden Brennpunkte nämlich im Ursprung des Koordinatensystems und die Ellipse entartet zum Kreis mit dem Radius $r=a$.

Um die Gleichung der verschobenen Ellipse mit Mittelpunkt $M(x_m, y_m)$ und den Halbachsen a, b zu finden, betrachten Sie die Abbildung 3.5

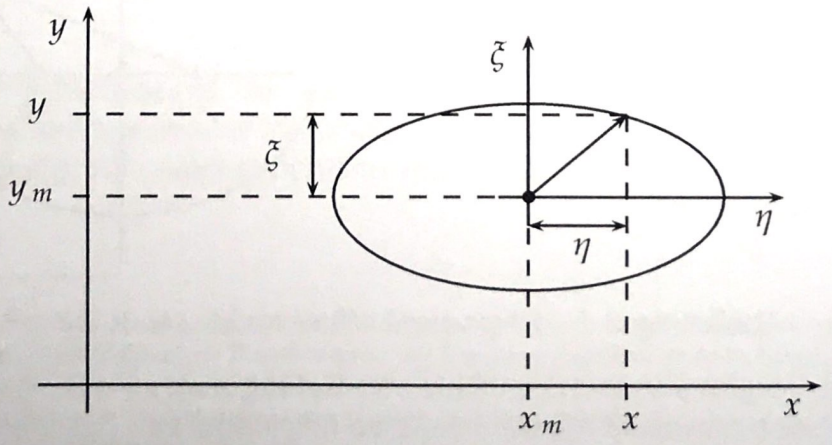


Abbildung 3.5 Ellipse mit Mittelpunkt $M(x_m, y_m)$.

Im η, ξ - Koordinatensystem gilt die Gleichung der unverschobenen Ellipse

$$\frac{\eta^2}{a^2} + \frac{\xi^2}{b^2} = 1 .$$

Mit $\eta = x - x_m$ und $\xi = y - y_m$ wird die verschobene Ellipse beschrieben durch die Menge der geordneten Paare

$$E := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{(x - x_m)^2}{a^2} + \frac{(y - y_m)^2}{b^2} = 1 \right\} .$$

Bemerkung :
Sei E eine Ellipse mit Mittelpunkt $M(x_m, y_m)$ und den Halbachsen $a, b > 0$. Ein beliebiger Punkt $P(x, y)$ kann entweder innerhalb, auf oder auch außerhalb der Ellipse liegen. Wie aus der Abbildung 3.5 sofort ersichtlich wird, gelten die folgenden Regeln.

- $\frac{(x-x_m)^2}{a^2} + \frac{(y-y_m)^2}{b^2} < 1 \;\Leftrightarrow\; P$ liegt innerhalb von E,
- $\frac{(x-x_m)^2}{a^2} + \frac{(y-y_m)^2}{b^2} = 1 \;\Leftrightarrow\; P$ liegt auf E,
- $\frac{(x-x_m)^2}{a^2} + \frac{(y-y_m)^2}{b^2} > 1 \;\Leftrightarrow\; P$ liegt außerhalb von E.

Beispiel 33
Beschreiben Sie die Menge $B := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 4y^2 < -3x^2 + 12x \right\}$.

Lösung :

$$\begin{aligned}
& 4y^2 < -3x^2 + 12x && \mid +3x^2 - 12x \\
\Leftrightarrow \quad & 3(x^2 - 4x) + 4y^2 < 0 && \mid \text{binomische Ergänzung} \\
\Leftrightarrow \quad & 3(x^2 - 4x + 4 - 4) + 4y^2 < 0 && \mid +12 \\
\Leftrightarrow \quad & 3(x-2)^2 + 4y^2 < 12 && \mid : 12 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{y^2}{3} < 1
\end{aligned}$$

Also beschreibt die Menge B alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die innerhalb der Ellipse mit Mittelpunkt $M(2, 0)$ und den Halbachsen $a = 2, b = \sqrt{3}$ liegen.

3.4 Übungsaufgaben

Aufgabe 37

Sie sind im Wohnzimmer von Prof. Ungleich. Der Kronleuchter ist mehr wert als der Ohrensessel und der Couchtisch zusammen. Zudem sind die Couch und der Couchtisch gemeinsam mehr wert als der Ohrensessel und der Kronleuchter. Der Ohrensessel und die Couch jedoch haben zusammen denselben Wert wie der Kronleuchter und der Couchtisch.

a) Ordnen Sie jedem Gegenstand das richtige Symbol zu, so dass folgende Ungleichungen erfüllt sind. Machen Sie sich selbst klar, dass der Text diese Ungleichungen beschreibt.

$$Z > X + W \qquad Y + X > W + Z \qquad Z + X = W + Y$$

b) Wie lassen sich diese vier Gegenstände gemäß ihrer Wertverhältnisse ordnen?

Aufgabe 38

Beurteilen Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Die Aussage ist jeweils wahr, wenn sie für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt. Geben Sie für eine falsche Aussage ein Gegenbeispiel an!

$a)\ a < b \wedge c \geq 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$

$b)\ a < b \Rightarrow |a| < |b|$

$c)\ a < b < 0 \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$

$d)\ a^2 < b^2 \wedge b > 0 \Rightarrow a < b$

$e)\ |a+1| \geq |a-1|$

$f)\ |a| \geq a - 1$

Aufgabe 39

Für welche **ganzen** Zahlen $n \in \mathbb{Z}$ gelten folgende Ungleichungen?

$a)\ \frac{2}{n} + n \leq 2$

$b)\ \left|\frac{n-1}{n+3}\right| < 1$

$c)\ |n| + n \geq 3$

$d)\ |n-3| \leq -2n + 5$

$e)\ |n-7| < n + 7$

$f)\ |n-3| < n + 1$

Aufgabe 40

Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq a \leq b$ gilt:

$$a \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq b$$

und dass genau dann Gleichheit gilt, wenn $a = b$ ist.

Aufgabe 41

Seien a und b zwei beliebige positive reelle Zahlen. Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Ungleichung.

$$\sqrt{|a| + |b|} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Aufgabe 42

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $0 < a < b$. Zeigen Sie, dass

$$\left|1 - \frac{a}{b}\right| < \left|1 - \frac{b}{a}\right| \qquad \text{d.h.,} \quad \frac{a}{b} \text{ liegt näher an } 1 \text{ als } \frac{b}{a}.$$

Aufgabe 43

Für zwei beliebige positive reelle Zahlen a und b wird definiert:

Das **harmonische Mittel** als: $\dfrac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ und das **arithmetische Mittel** als: $\dfrac{1}{2}(a+b)$.

Ist das harmonische Mittel größer, kleiner oder gleich dem arithmetischen Mittel?

Aufgabe 44

Sei $a \in \mathbb{R}$. Ermitteln Sie alle $x \in \mathbb{R}$, die die folgende Ungleichung erfüllen.

$a)\ 1+x > a\,|\,1-x\,|,\ a>1 \qquad b)\ \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{x+a} \qquad c)\ \dfrac{1}{|\,x\,|} < \dfrac{1}{|\,x+a\,|},\ a>0$

Aufgabe 45

Welche Zahl $c \in \mathbb{R}$ ergibt für die Ungleichung $x^2 - 6x + c \leq 0$

a) genau eine Zahl als Lösung,

b) eine leere Lösungsmenge.

Aufgabe 46

Bestimmen Sie $N \cap M$ sowie $N \cup M$ für

$$N = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \left| x - \frac{1}{3} \right| < \frac{3}{2} \right\} \quad \text{und} \quad M = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; |\,x+1\,| < \frac{1}{2} \right\}.$$

Aufgabe 47

Für welche reellen Zahlen ist sowohl die Ungleichung

$$x^2 + 5 > \frac{5-3x^2}{2x+1}, \quad \text{als auch} \quad x^2 \geq 6x - 5 \quad \text{erfüllt?}$$

Geben Sie die Lösungsmenge auch zeichnerisch wieder.

Aufgabe 48

Bestimmen Sie die reelle Lösungsmenge der Ungleichung in Intervallschreibweise.

a) $2 - x > |\,2x+1\,|$

b) $\frac{2x-1}{|2x^2+1|} < 1$

c) Bilden Sie $M \cup N$ und $M \cap N$, wobei M für die Lösungsmenge von a) und N für die Lösungsmenge von b) steht.

Aufgabe 49

Ermitteln Sie sämtliche reellen Lösungen x der nachfolgenden Gleichungen beziehungsweise Ungleichungen.

$a)\ \sqrt{2x-4} - \sqrt{x-1} = 1 \qquad b)\ 3 - x < 4 - 2x \qquad c)\ x^3 - x^2 < 2x - 2$

$d)\ ||\,x\,| - |\,-5\,|| < 1 \qquad e)\ 1 \leq |\,x\,| < 3 \qquad f)\ \{x \,||\, x-3\,| = |\,x+1\,|\} \cap [0,3]$

$g)\ |\,x+1\,| - |\,x-1\,| = 1 \qquad h)\ \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{x+1} \qquad i)\ 6x^2 - 13x + 6 < 0$

j) $2=\sqrt{\sqrt{\sqrt{x\sqrt{2x}}}}$ *k*) $(2^x-5)^2=100$ *l*) $\sqrt{x+5}=x-1$

m) $-(x+3)^2\geq -6x$ *n*) $|x+2|>5$ *o*) $x^2+4x+2<2$

Aufgabe 50

Bestimmen Sie den Definitionsbereich folgender Ungleichungen für reelle Zahlen x. Beschreiben Sie ihre Lösungsmenge in Intervallschreibweise und skizzieren Sie sie auf dem Zahlenstrahl.

a) $\frac{x}{|x+3|}<\frac{1}{|x-1|}$ *b*) $\frac{|x-2|}{x+2}\leq 4$ *c*) $\frac{1}{|2x-3|}>4$

d) $|x+4|<|x-1|+|x-2|$ *e*) $\left|\frac{1}{x-6}\right|<2$ *f*) $\frac{|x-4|}{3-x}>x$

g) $(x-3)(x-1)>(x-1)(x+5)$ *h*) $\frac{1}{x-\frac{2}{3}}\geq 3x$ *i*) $\frac{|x-2|}{x+6}\leq 1$

j) $|x-1|(x+4)\leq 0$ *k*) $\frac{|x|}{|x-3|}>10$ *l*) $\frac{x-5}{2x}\leq 11$

m) $|x-4|\geq 2|x+1|$ *n*) $\frac{1}{|x-1|}<2$ *o*) $\frac{|x|}{|x|-1}<x$

p) $\frac{4}{|2-x|}<\frac{2}{|x+4|}$ *q*) $||x|-3|>1$ *r*) $|3x-1|\geq|x+1|$

s) $|3x-2|-2\leq|1-2x|$ *t*) $\left|x+\frac{1}{x}\right|\geq 4$ *u*) $x(x+1)<6$

v) $|-2|\cdot|x+1|\geq|x-1|+1$ *w*) $|x-1|>3$ *x*) $\frac{|x-2|}{x-2}\geq x|x|$

y) $(x^2+x-2)(x-4)(-x-3)\geq 0$ *z*) $\frac{5-|x-5|}{x+2}<3$

Aufgabe 51

Bestimmen Sie jeweils die Menge der Paare $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, die die folgenden Ungleichungen erfüllen und skizzieren Sie sie in einem kartesischen Koordinatensystem.

a) $|x|<|y|$

b) $y\geq(x-1)^2\quad\wedge\quad y^2+(x-1)^2\leq 1$

c) $|x|+|y|\leq 4$

d) $|x-y|^2-|x+y|^2\leq 1$

e) $x^2-2|y|>1$

f) $|x-1|+|y+1|\leq 1$

g) $|x|\leq 5\quad\wedge\quad|y|\leq 5$

h) $|x|\leq 5\quad\vee\quad|y|\leq 5$

i) $|xy|\geq 1$

j) $\frac{x}{y}\leq\frac{y}{x}$

k) $|x-1|y\geq 1$

l) $(x+1)^2+(y-1)^2\leq 4$

Aufgabe 52

Beschreiben Sie die folgenden durch Ungleichungen definierten Mengen und skizzieren Sie sie in einem kartesischen Koordinatensystem.

a) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2(y+5) > 1\}$

b) $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \leq \sqrt{1-x^2} \wedge xy > 0\right\}$

c) $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{|x|}{|y-2|} \leq 3 \vee y = 2\right\}$

d) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 1-x \wedge 2y < 5x+1\}$

e) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 2-x^2 \wedge x^2+(y-2)^2 \geq 4\}$

f) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y-2x+1 < 0 \wedge y+x^2 < 0\}$

g) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-3)^2 \leq 2-y \wedge 3 \geq x-y \wedge 2y \geq 4-x\}$

h) $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y > (x-1)^2-2 \wedge x > 0 \wedge y < \frac{3x}{2}\right\}$

4 Komplexe Zahlen

4.1 Gaußsche Zahlenebene

In Abschnitt 1.2 wurden die Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ eingeführt. In der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ lassen sich alle die Ihnen aus der Schule her vertrauten Rechnungen wie Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Potenzieren durchführen. Man erkennt aber, dass auch die reellen Zahlen kein abgeschlossenes algebraisches Zahlensystem bilden, denn schon die einfache quadratische Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat bereits keine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ zur Lösung.

Definition 4.1 *Die beiden nichtreellen Lösungen der Gleichung $x^2 + 1 = 0$, die sich nur im Vorzeichen unterscheiden, bezeichnet man mit i und $-i$ und nennt i die* ***imaginäre Einheit****. Alle Vielfachen iy mit $y \in \mathbb{R}$ bilden die Mengen der* ***imaginären Zahlen****.*

Aus dieser Definition folgt sofort $i^2 = -1$ oder auch $i = \sqrt{-1}$.

Beispiel 34
Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $4x^2 + 16 = 0$.
Lösung:

$$4x^2 + 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -4 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{-4} = \pm 2 \cdot \sqrt{-1} = \pm 2i.$$

Definition 4.2 *Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $z := x + iy$.*
Dann heißt die Summe z aus einer beliebigen reellen und einer beliebigen imaginären Zahl ***komplexe Zahl*** *und $\mathbb{C} := \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ die Menge aller komplexen Zahlen. $\mathrm{Re}(z) := x$ heißt* ***Realteil*** *und $\mathrm{Im}(z) := y$* ***Imaginärteil*** *der komplexen Zahl z.*

Aus dieser Definition folgt unmittelbar, dass die Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ offenbar Teilmengen von $\mathbb{C}$ sind. Beispielsweise lässt sich jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ schreiben als $x = x + 0 \cdot i$. Durch die Einführung der komplexen Zahlen lassen sich jetzt auch alle quadratischen Gleichungen mit reellen Koeffizienten lösen, die eine negative Diskriminante haben.

Beispiel 35
Finden Sie die Lösungen der Gleichung $z^2 - 6z + 13 = 0$.

Lösung:
Mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen erhält man die Lösungen

$$z_{1,2} = 3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 13} = 3 \pm \sqrt{-4} = 3 \pm 2 \cdot \sqrt{-1} = 3 \pm 2i.$$

Es bleibt jetzt noch die Frage zu beantworten, wie komplexe Zahlen $z = x + iy$ geometrisch interpretiert werden können und wofür sie nützlich sind?

Die reellen Zahlen lassen sich darstellen als Punkte auf der reellen Zahlengeraden. Sie liegen überall auf der Zahlengeraden dicht. Das heißt, in jeder noch so kleinen Umgebung einer reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ liegen unendlich viele weitere reelle Zahlen. Da die reellen Zahlen auf die Zahlengerade abgebildet werden können, spricht man auch von sogenannten „eindimensionalen Zahlen".

Komplexe Zahlen $z = x + iy$ hingegen erweisen sich als „zweidimensionale Zahlen", die in der sogenannten **Gaußschen Zahlenebene**, benannt nach dem Mathematiker ***Johann Gauß*** $(1777 - 1855)^*$, als Punkte oder auch Pfeile (zweidimensionale Vektoren) gekennzeichnet werden können. Auf der waagerechten Achse der Zahlenebene, auch **reelle Achse** genannt, wird der Realteil x abgetragen, während die senkrechte Achse als **imaginäre Achse** bezeichnet wird und auf ihr der Imaginärteil y abgetragen wird.

Die beiden Lösungen $z_1 = 3 + 2i$ und $z_2 = 3 - 2i$ der quadratischen Gleichung aus dem Beispiel 35 können dann in der Gaußschen Zahlenebene geometrisch wie in den folgenden zwei Abbildungen dargestellt werden.

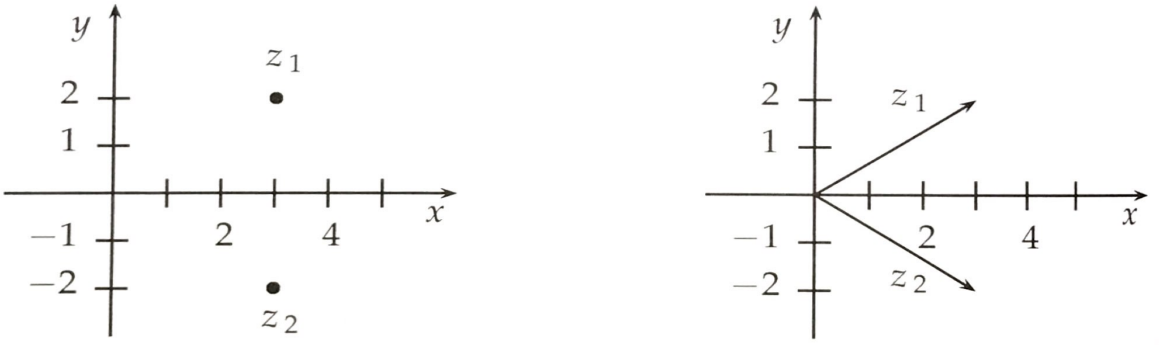


Abbildung 4.1 Darstellung komplexer Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene.

Definition 4.3 *Zwei komplexe Zahlen* $z_1 = x_1 + iy_1$ *und* $z_2 = x_2 + iy_2$ *sind genau dann gleich, wenn ihre Real- und Imaginärteile gleich sind.*

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 \ \wedge \ y_1 = y_2$$

*) Johann Carl Friedrich Gauß, deutscher Mathematiker, geb. 30. April 1777 in Braunschweig, gest. 23. Februar 1855 in Göttingen. Zu seinen besonderen Leistungen zählen Arbeiten zur euklidischen und nicht euklidischen Geometrie, sowie der Fundamentalsatz der Algebra.

Die Pfeile in der rechten Darstellung der Abbildung 4.1 erinnern stark an Vektoren aus der analytischen Geometrie. Die Zahl z_2 geht offenbar aus der Zahl z_1 durch eine Spiegelung an der reellen Achse hervor.

Definition 4.4 *Sei* $z = x + iy \in \mathbb{C}$. *Dann heißt* $\overline{z} := x - iy$ *die zu* z ***konjugiert komplexe Zahl*** *und* $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ ***Betrag*** *der komplexen Zahl.*

Bemerkung:
Geometrisch bedeutet der Betrag $|z|$ die Länge des Pfeils (Vektors), der vom Ursprung des Koordinatensystems zur komplexen Zahl z zeigt.

Beispiel 36
Bestimmen Sie für die komplexe Zahl $z = -6 - 8i$ den Real- und Imaginärteil, sowie den Betrag und die zugehörige konjugiert komplexe Zahl.

Lösung:
Es ist $\mathrm{Re}(z) = -6, \mathrm{Im}(z) = -8$ und $|z| = \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = 10, \overline{z} = -6 + 8i$.

Die Zahlenbereichserweiterung durch Einführung der komplexen Zahlen scheint momentan keinen praktischen Nutzen zu haben. Jedoch wird sich an späterer Stelle zeigen, dass sie ein äußerst bequemes Hilfsmittel zum Beispiel bei der Berechnung von Additionstheoremen und der Lösung von gewöhnlichen Differenzialgleichungen (Band 9) darstellen. In der Elektrotechnik lassen sich mithilfe der komplexen Zahlen komplizierte Wechselstromnetzwerke besonders effizient lösen.

4.2 Algebra im Komplexen

In diesem Abschnitt wird es vor allem darum gehen, wie man mit komplexen Zahlen rechnet. Im Prinzip sind die Grundrechenarten für komplexe Zahlen die gleichen wie für reelle Zahlen, nur dass $i^2 = -1$ gelten soll.

Definition 4.5 *Seien* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *mit* $z_1 = x_1 + iy_1$ *und* $z_2 = x_2 + iy_2$. *Dann gilt für die Addition / Subtraktion und Multiplikation:*

- $z_1 \pm z_2 = x_1 + iy_1 \pm (x_2 + iy_2) = x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2)$
- $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

Beispiel 37
Berechnen Sie für $z = 2 + 2i$ und $w = -1 + 3i$ die folgenden Ausdrücke:

$$z + w, \qquad z - w, \qquad z \cdot w, \qquad z^3.$$

Lösung:

$$z+w = 2+2i+(-1+3i) = 2+2i-1+3i = 1+5i,$$
$$z-w = 2+2i-(-1+3i) = 2+2i+1-3i = 3-i,$$
$$z\cdot w = (2+2i)(-1+3i) = 2\cdot(-1)+2\cdot 3i+2i\cdot(-1)+2i\cdot 3i$$
$$= -2+6i^2+4i = -2-6+4i = -8+4i,$$
$$z^3 = z^2\cdot z = (2+2i)^2\cdot(2+2i) = (4+8i+4i^2)(2+2i)$$
$$= (4+8i-4)(2+2i) = 8i\cdot(2+2i) = 16i+16i^2 = -16+16i.$$

Wie dividiert man nun aber zwei komplexe Zahlen? Die Division zweier komplexer Zahlen gelingt mit dem „Trick" der Erweiterung des Bruchs mit dem konjugiert komplexen Nenner. Betrachten Sie dazu die folgende Rechnung:

$$\frac{2+3i}{5-2i} = \frac{2+3i}{5-2i}\cdot\frac{5+2i}{5+2i} = \frac{10+19i+6i^2}{25-4i^2} = \frac{10+19i-6}{25+4} = \frac{4+19i}{29} = \frac{4}{29}+\frac{19}{29}i$$

Für komplexe Zahlen gelten einige nützliche Rechengesetze, die in dem nachfolgenden Satz zusammengefasst sind.

Satz 4.1 *Für alle $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $z = x+iy$ gelten die folgenden Aussagen:*

(1) $\overline{\overline{z}} = z$

(2) $z\cdot\overline{z} = x^2+y^2$

(3) $\overline{z_1+z_1} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$

(4) $\overline{z_1\cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

(5) $\overline{1/z} = 1/\overline{z}$

(6) $|z| = \sqrt{z\cdot\overline{z}}$

(7) $|z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$

(8) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

(9) $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\overline{z})$

(10) $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z-\overline{z})$

Beweis
Mit Definition 4.4 und Definition 4.5 gilt:

(1) $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{x+iy}} = \overline{x-iy} = x+iy = z.$

(2) $z\cdot\overline{z} = (x+iy)\cdot(\overline{x+iy}) = (x+iy)\cdot(x-iy) = x^2-i^2y^2 = x^2+y^2.$

(3) Für $z_1 := x_1+iy_1$ und $z_2 := x_2+iy_2$ folgt

$$\overline{z_1+z_1} = \overline{x_1+iy_1+x_2+iy_2} = \overline{x_1+x_2+i(y_1+y_2)}$$
$$= x_1+x_2-i(y_1+y_2) = x_1-iy_1+x_2-iy_2 = \overline{z_1}+\overline{z_2}.$$

(4) Seien $z_1 := x_1 + iy_1$ und $z_2 := x_2 + iy_2$. Dann ist einerseits

$$\begin{aligned}\overline{z_1 \cdot z_1} &= \overline{(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)} = \overline{x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2+x_2y_1)} \\ &= x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2+x_2y_1) \quad \text{und andererseits} \\ \overline{z_1}\cdot\overline{z_2} &= \overline{x_1+iy_1}\cdot\overline{x_2+iy_2} = (x_1-iy_1)\cdot(x_2-iy_2) \\ &= x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2+x_2y_1) \\ &\Rightarrow \quad \overline{z_1\cdot z_1} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}.\end{aligned}$$

(5) Einerseits ist

$$\begin{aligned}\overline{1/z} &= \overline{\frac{1}{x+iy}} = \overline{\frac{1}{x+iy}\cdot\frac{x-iy}{x-iy}} = \overline{\frac{x-iy}{x^2-i^2y^2}} = \overline{\frac{x-iy}{x^2+y^2}} = \overline{\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}} \\ &= \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{x+iy}{x^2+y^2} \quad \text{und andererseits} \\ \frac{1}{\overline{z}} &= \frac{1}{\overline{x+iy}} = \frac{1}{x-iy} = \frac{1}{x-iy}\cdot\frac{x+iy}{x+iy} = \frac{x+iy}{x^2-i^2y^2} = \frac{x+iy}{x^2+y^2} \\ &\Rightarrow \quad \overline{1/z} = \frac{1}{\overline{z}}.\end{aligned}$$

(6) $|z| = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2-i^2y^2} = \sqrt{(x+iy)(x-iy)} = \sqrt{z\cdot\overline{z}}$.

(7) Seien $z_1 := x_1 + iy_1$ und $z_2 := x_2 + iy_2$. Dann ist

$$\begin{aligned}|z_1\cdot z_2| &= |(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)| = |x_1x_2 + i^2y_1y_2 + i(x_1y_2+x_2y_1)| \\ &= |x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2+x_2y_1)| = \sqrt{(x_1x_2-y_1y_2)^2 + (x_1y_2+x_2y_1)^2} \\ &= \sqrt{(x_1x_2)^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + (y_1y_2)^2 + (x_1y_2)^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + (x_2y_1)^2} \\ &= \sqrt{x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2} = \sqrt{x_1^2(x_2^2+y_2^2) + y_1^2(x_2^2+y_2^2)} \\ &= \sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)} = \sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2} = |z_1|\cdot|z_2|.\end{aligned}$$

(8) Seien $z_1 := x_1 + iy_1$ und $z_2 := x_2 + iy_2$. Dann ist mit (7)

$$\begin{aligned}\left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \left|z_1\cdot\frac{1}{z_2}\right| = |z_1|\cdot\left|\frac{1}{z_2}\right| = |z_1|\cdot\left|\frac{1}{x_2+iy_2}\right| = |z_1|\cdot\left|\frac{1}{x_2+iy_2}\cdot\frac{x_2-iy_2}{x_2-iy_2}\right| \\ &= |z_1|\cdot\left|\frac{x_2-iy_2}{x_2^2-i^2y_2^2}\right| = |z_1|\cdot\left|\frac{x_2-iy_2}{x_2^2+y_2^2}\right| = |z_1|\cdot\left|\frac{x_2}{x_2^2+y_2^2} - i\frac{y_2}{x_2^2+y_2^2}\right| \\ &= |z_1|\cdot\sqrt{\frac{x_2^2}{(x_2^2+y_2^2)^2} + \frac{y_2^2}{(x_2^2+y_2^2)^2}} = |z_1|\cdot\sqrt{\frac{1}{x_2^2+y_2^2}} \\ &= |z_1|\cdot\frac{1}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}} = |z_1|\cdot\frac{1}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}.\end{aligned}$$

(9) $\frac{1}{2}(z+\overline{z}) = \frac{1}{2}(x+iy+\overline{x+iy}) = \frac{1}{2}(x+iy+x-iy) = x = \mathrm{Re}(z)$.

(10) $\frac{1}{2i}(z-\overline{z}) = \frac{1}{2i}(x+iy-(\overline{x+iy})) = \frac{1}{2i}(x+iy-x+iy) = y = \mathrm{Im}(z)$.

■

Nach Satz 3.2 gilt die Dreiecksungleichung $|x+y| \leq |x| + |y|$ für alle reellen Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$. Ein entsprechendes Analogon existiert auch für komplexe Zahlen.

Satz 4.2 *Für zwei beliebige $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt die* ***Dreiecksungleichung***

$$|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2| .$$

Beweis
Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ und $z := z_1 \cdot \overline{z_2} = x+iy$. Dann folgt mit Satz 4.1

$$\begin{aligned}
& x \leq \sqrt{x^2+y^2} && \text{wegen } y^2 \geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 2x \leq 2\sqrt{x^2+y^2} \\
\Leftrightarrow \quad & x+iy+x-iy \leq 2\sqrt{x^2+y^2} \\
\Leftrightarrow \quad & z+\overline{z} \leq 2|z| \\
\Leftrightarrow \quad & z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} \leq 2|z_1 \cdot \overline{z_2}| \\
\Leftrightarrow \quad & z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 \leq 2|z_1| \cdot |\overline{z_2}| \\
\Leftrightarrow \quad & z_1 \cdot \overline{z_1} + z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 + z_2 \cdot \overline{z_2} \leq z_1 \cdot \overline{z_1} + 2|z_1| \cdot |z_2| + z_2 \cdot \overline{z_2} \\
\Leftrightarrow \quad & (z_1+z_2) \cdot (\overline{z_1}+\overline{z_2}) \leq |z_1|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| + |z_2|^2 \\
\Leftrightarrow \quad & (z_1+z_2) \cdot (\overline{z_1+z_2}) \leq (|z_1| + |z_2|)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & |z_1+z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & |z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2| .
\end{aligned}$$

■

Beispiel 38
Zeigen Sie mithilfe der Dreiecksungleichung aus Satz 4.2 für komplexe Zahlen

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \qquad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Lösung:

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2| \quad \Leftrightarrow \quad |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| \quad \text{und}$$
$$|z_2| = |z_2 - z_1 + z_1| \leq |z_2 - z_1| + |z_1| = |z_1 - z_2| + |z_1|$$
$$\Leftrightarrow \quad -|z_1| + |z_2| \leq |z_1 - z_2| .$$

Insgesamt ergibt sich daraus für die linke Ungleichung $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$. Die rechte Ungleichung folgt aus

$$|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \leq |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2| .$$

■

4.3 Darstellungsformen komplexer Zahlen

Die komplexe Zahl $z = 3 + 2i$ kann als Punkt oder auch als Pfeil (Abbildung 4.1) in der Gaußschen Zahlenebene gedeutet werden. Diese Darstellungsform wird auch als **kartesische Form** bezeichnet, in der der Real- und Imaginärteil sofort ablesbar sind.

Es besteht aber auch die Möglichkeit, eine komplexe Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$ dadurch zu kennzeichnen, indem man den Abstand dieser Zahl vom Koordinatenursprung und den Winkel, den der Pfeil mit der positiven reellen Achse einschließt, angibt. Betrachten Sie dazu die folgende Abbildung.

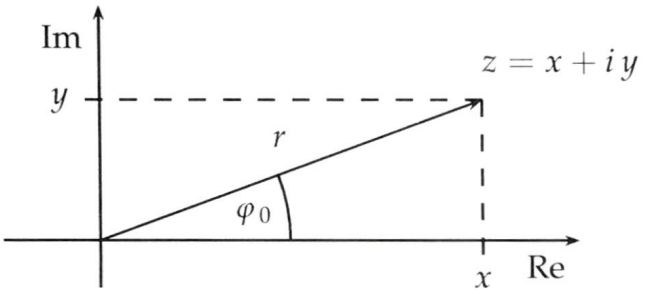


Abbildung 4.2 Polarkoordinaten.

Aus der Abbildung ergeben sich $\mathrm{Re}(z) = x = r \cos\varphi_0$ und $\mathrm{Im}(z) = y = r \sin\varphi_0$ mit $r := |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Dann gilt für alle $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$z = x + iy = r\cos\varphi_0 + ir\sin\varphi_0 = r(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0) .$$

Diese Darstellung der komplexen Zahl heißt **Polarkoordinatendarstellung** oder manchmal auch **trigonometrische Form**, die besonders nützlich ist bei der Multiplikation und Division von komplexen Zahlen. Gibt man den Winkel φ_0 im Bogenmaß an, dann nennt man den Winkel das **Argument** der komplexen Zahl und schreibt $\varphi_0 = \arg(z)$. Beachten Sie, dass dieser Winkel nicht eindeutig ist! Denn die Winkel $\varphi_k = \varphi_0 + 2k\pi$ führen für alle $k \in \mathbb{Z}$ wegen der Periodizität der Sinus- und Cosinusfunktion zur selben komplexen Zahl. Daher wird der Winkel $-\pi < \varphi_0 \leq \pi$ als **Hauptwert** des Arguments bezeichnet. Aus der Abbildung 4.2 lässt sich für den Hauptwert ablesen:

$$\varphi_0 = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für} \quad x > 0, \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für} \quad x < 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{für} \quad x = 0 \ \wedge \ y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für} \quad x = 0 \ \wedge \ y < 0. \end{cases}$$

Bemerkung:
Für $z = 0$ ist φ_0 nicht definiert. Man kann in diesem Fall aber $z = 0 \cdot (\cos\varphi_0 + i \sin\varphi_0)$ schreiben mit beliebigen $\varphi_0 \in (-\pi, \pi]$.

Es werden jetzt einige spezielle Werte für die Sinus- beziehungsweise Cosinusfunktion hergeleitet, die für die praktische Berechnung besonders nützlich sind. Dazu werden ein gleichseitiges und ein rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck betrachtet.

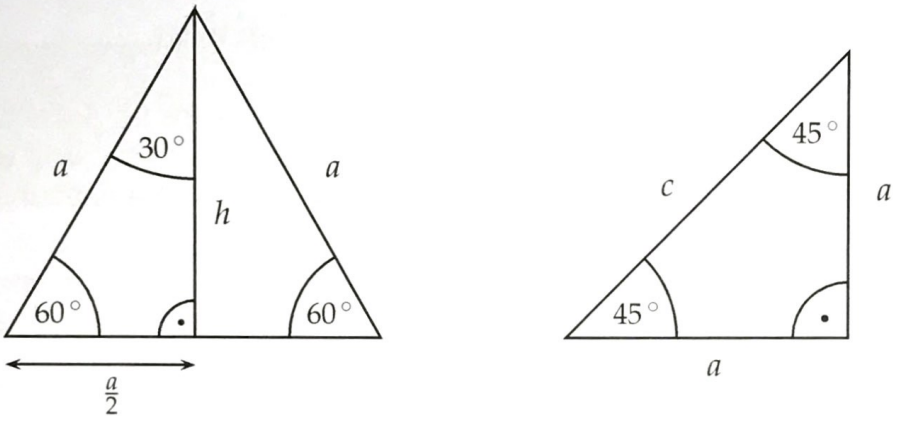


Abbildung 4.3 Gleichseitiges und gleichschenkliges Dreieck.

In diesen Dreiecken ergeben sich die Längen für die Höhe h und für die Hypotenuse c mit dem Satz von Pythagoras zu

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\sqrt{3}}{2}a \quad \text{und} \quad c^2 = a^2 + a^2 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{2}\,a\,.$$

Mit den aus der Schule her bekannten Formeln $\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ und $\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$ folgen die nützlichen Beziehungen

$$\sin(30°) = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}, \qquad \sin(45°) = \frac{a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \qquad \sin(60°) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$\cos(30°) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \qquad \cos(45°) = \frac{a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \qquad \cos(60°) = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}.$$

Mit der Formel $\varphi = \frac{\pi}{180°}\alpha$ lassen sich Winkel, die im Gradmaß α gegeben sind, in die entsprechenden Winkel φ im Bogenmaß umrechnen. Man erhält schließlich die leicht zu merkende Zusammenstellung in Form der folgenden Tabelle.

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Beispiel 39
Stellen Sie die komplexen Zahlen $z_1 = 1$, $z_2 = -1$, $z_3 = -i$ und $z_4 = 1 + i$ in Polarkoordinaten dar.

Lösung:

- Für $z_1 = 1$ ist $r = 1$ und $\varphi_0 = 0$. Also gilt $z_1 = 1 = 1 \cdot [\cos(0) + i \sin(0)]$.
- Für $z_2 = -1$ ist $r = 1$ und $\varphi_0 = \pi$. Also gilt $z_2 = -1 = 1 \cdot [\cos(\pi) + i \sin(\pi)]$.
- Für $z_3 = -i$ ist $r = 1$ und $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$. Also gilt unter Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften für die trigonometrischen Funktionen

$$z_3 = -i = 1 \cdot \left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

- Für $z_4 = 1 + i$ ist $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ und $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$. Also gilt

$$z_4 = 1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Bei der Multiplikation und Division von komplexen Zahlen in Polarkoordinaten treten Produkte von trigonometrischen Funktionen auf, die mit den sogenannten **Additionstheoremen** vereinfacht werden können. Betrachten Sie dazu die folgende Abbildung im Einheitskreis ($r = 1$).

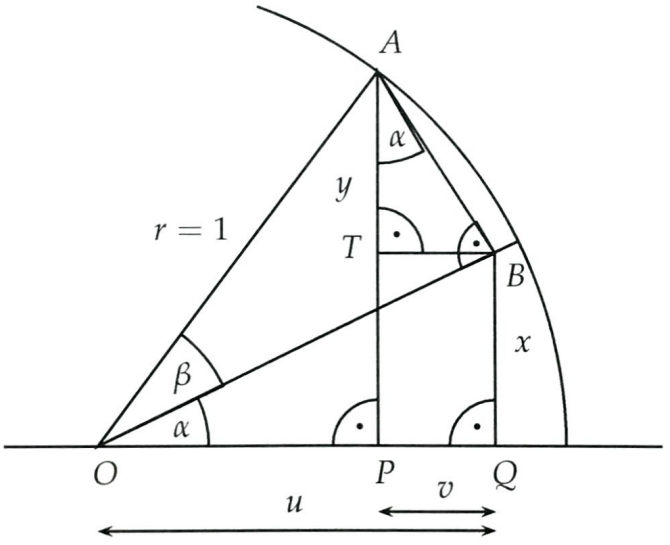


Abbildung 4.4 Einheitskreis.

Zunächst lassen sich im rechtwinkligen Dreieck OBA sofort die Strecken $\overline{OB} = \cos\beta$ und $\overline{AB} = \sin\beta$ ablesen.

- Im Dreieck OQB gilt einerseits $\cos\alpha = \frac{u}{\overline{OB}} = \frac{u}{\cos\beta} \Rightarrow u = \cos\alpha\cos\beta$ und andererseits $\sin\alpha = \frac{x}{\overline{OB}} = \frac{x}{\cos\beta} \Rightarrow x = \sin\alpha\cos\beta$.
- Im Dreieck TBA gilt einerseits $\cos\alpha = \frac{y}{\overline{AB}} = \frac{y}{\sin\beta} \Rightarrow y = \cos\alpha\sin\beta$ und andererseits $\sin\alpha = \frac{v}{\overline{AB}} = \frac{v}{\sin\beta} \Rightarrow v = \sin\alpha\sin\beta$.

Damit ergeben sich aus dem Dreieck OPA die zwei wichtigen Additionstheoreme

$$\sin(\alpha+\beta) = x+y = \sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta \quad \text{und}$$
$$\cos(\alpha+\beta) = u-v = \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta\,.$$

Beispiel 40
Gegeben seien in Polarkoordinaten die komplexen Zahlen $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ und $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Bestimmen Sie das Produkt $z_1 \cdot z_2$ sowie den Quotienten $\frac{z_1}{z_2}$.

Lösung:
Mit den eben hergeleiteten Additionstheoremen gilt

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\ &= r_1 r_2 \left[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\right] \\ &= r_1 r_2 \left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right] \quad \text{und} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2}\cdot\frac{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2} \\ &= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{\underbrace{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2}_{=1}} \\ &= \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]. \end{aligned}$$

Aus diesem Beispiel lassen sich jetzt zwei fundamentale Eigenschaften ablesen:

- Bei der Multiplikation zweier komplexer Zahlen multiplizieren sich die Beträge und addieren sich die Argumente!
- Bei der Division zweier komplexer Zahlen dividieren sich die Beträge und subtrahieren sich die Argumente!

Beispiel 41
Gegeben seien $z_1 = 2+2i$ und $z_2 = \sqrt{3}-i$. Bestimmen Sie ohne Benutzung eines elektronischen Rechners das Produkt $z_1 \cdot z_2$ in Polarkoordinaten.

Lösung:
Mithilfe der Tabelle für die speziellen Funktionswerte der trigonometrischen Funktionen ergeben sich in Polarkoordinaten für z_1 und z_2 zunächst

$$z_1 = 2+2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] \quad \text{und}$$

$$z_2 = \sqrt{3}-i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right].$$

Für das Produkt erhält man also

$$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\,\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right] = 4\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\,\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right].$$

Es gibt noch eine dritte Darstellungsform für komplexe Zahlen, die sogenannte Exponentialform, die sich ebenfalls besonders gut für die Multiplikation und Division komplexer Zahlen eignet.

Eine Reihenentwicklung der komplexen Exponentialfunktion $e^{i\varphi}$ ergibt durch Vergleich mit den Reihenentwicklungen von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ die sogenannte Eulersche Formel, die nach dem Mathematiker ***Leonhard Euler*** $(1707-1783)^*$ benannt ist.

Satz 4.3 *Für alle* $\varphi \in \mathbb{R}$ *gilt die* ***Eulersche Formel***

$$\cos\varphi + i\,\sin\varphi = e^{i\varphi}.$$

Der Beweis dieses Satzes folgt erst an späterer Stelle im Band 3 Abschnitt 3.5 über elementare Funktionen, weil dazu Mittel aus der Differenzialrechnung benötigt werden.

Beispiel 42
Mit der Eulerschen Formel ergeben sich beispielsweise die speziellen Werte:

$$e^{i\cdot 0} = \cos(0)+i\,\sin(0) = 1, \qquad e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\,\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i,$$

$$e^{i\pi} = \cos(\pi)+i\,\sin(\pi) = -1, \qquad e^{i\frac{3\pi}{2}} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\,\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i,$$

$$e^{i2\pi} = \cos(2\pi)+i\,\sin(2\pi) = 1.$$

Mit Satz 4.3 lässt sich jede in Polarkoordinaten gegebene komplexe Zahl schreiben als

$$z = r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi) = re^{i\varphi},$$

wobei $z = re^{i\varphi}$ als **Exponentialform** bezeichnet wird.

Beispiel 43
Schreiben Sie die komplexe Zahl $z = 1+i$ in die Exponentialform.

Lösung:
Mit $r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ und $\varphi = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$ gilt $z = 1+i = \sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$.

---

*) Leonhard Euler, schweizer Mathematiker und Physiker, geb. 15. April 1707 in Basel, gest. 18. September 1783 in Sankt Petersburg. Zu seinen besonderen Leistungen zählen Arbeiten zur Variationsrechnung, Differenzial- und Integralrechnung sowie Arbeiten in der Hydromechanik und Kreiseltheorie.

Beispiel 44
Gegeben seien die komplexen Zahlen in Polarkoordinaten $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ und $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Bestimmen Sie das Produkt $z_1 \cdot z_2$ sowie den Quotienten $\frac{z_1}{z_2}$ in Exponentialform.

Lösung:
Mit den Ergebnissen aus dem Beispiel 40 erhält man

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right] = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right] = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}}.$$

Satz 4.4 *Für alle* $\varphi \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right) \quad \textit{und} \quad \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right).$$

Beweis
Mit der Eulerschen Formel aus Satz 4.3 sowie den Symmetrieeigenschaften der Cosinus- und Sinusfunktion $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ beziehungsweise $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ folgt:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad (i)$$
$$e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi \qquad (ii)$$

Addition der Gleichungen (i) und (ii) ergibt

$$2\cos\varphi = e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right).$$

Subtrahiert man von der Gleichung (i) die Gleichung (ii), dann folgt sofort

$$2i\sin\varphi = e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right).$$

■

4.4 Ganzzahlige Potenzen komplexer Zahlen

Mit der Einführung der Multiplikation und Division hat man automatisch auch ganzzahlige Potenzen komplexer Zahlen definiert. Man erhält diese, indem man die Zahl z mehrmals hintereinander mit sich selbst multipliziert beziehungsweise indem man mehrmals hintereinander durch die Zahl z dividiert.

Beispiel 45
Bestimmen Sie i^n für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Lösung:
Mit der Definition $i^2 = -1$ ergeben sich die Potenzen der imaginären Einheit zu:

$$i^1 = i \qquad\qquad i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$$

$$i^2 = -1 \qquad\qquad i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i \qquad\qquad i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{i^2} \cdot \frac{1}{i} = -1 \cdot (-i) = i$$

$$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = 1 \qquad\qquad i^{-4} = \frac{1}{i^4} = \frac{1}{i^3} \cdot \frac{1}{i} = i \cdot (-i) = -i^2 = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i \qquad\qquad i^{-5} = \frac{1}{i^5} = \frac{1}{i^4} \cdot \frac{1}{i} = 1 \cdot (-i) = -i$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Mit der Definition $i^0 := 1$ lassen sich die ganzzahligen Potenzen der imaginären Einheit für alle $k \in \mathbb{Z}$ darstellen als

$$i^{4k} = 1, \qquad i^{4k+1} = i, \qquad i^{4k+2} = -1, \qquad i^{4k+3} = -i.$$

Für ein beliebiges $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist die Berechnung der ganzzahligen Potenzen z^n nach diesem Verfahren im allgemeinen recht aufwendig. Wandelt man die komplexe Zahl $z = x + iy$ in die zugehörige Polarkoordinatendarstellung $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ um, dann lassen sich die Potenzen mit der Moivreschen Formel, die nach dem Mathematiker ***Abraham de Moivre*** $(1667 - 1754)^*$ benannt ist, wesentlich einfacher bestimmen.

Satz 4.5 *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt die* ***Formel von Moivre***

$$z^n = \left[r(\cos\varphi + i \sin\varphi) \right]^n = r^n \left[\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi) \right] = r^n e^{in\varphi}.$$

Beweis
Im Beispiel 40 wurde gezeigt, dass sich bei der Multiplikation zweier komplexer Zahlen in Polarkoordinatenform die Beträge multiplizieren und die Argumente addieren. Dann gilt für $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$

*) Abraham de Moivre, französischer Mathematiker, geb. 26. Mai 1667 in Vitry-le-François, gest. 27. November 1754 in London.

$$
\begin{aligned}
z^2 &= r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r^2\left[\cos(2\varphi) + i\sin(2\varphi)\right],\\
z^3 &= z^2\cdot z = r^2\left[\cos(2\varphi) + i\sin(2\varphi)\right]\cdot r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\\
&= r^3\left[\cos(3\varphi) + i\sin(3\varphi)\right],\\
&\vdots\\
z^n &= z^{n-1}\cdot z = r^{n-1}\left[\cos((n-1)\varphi) + i\sin((n-1)\varphi)\right]\cdot r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\\
&= r^n\left[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right], \qquad \forall\ n\in\mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

■

Beispiel 46
Berechnen Sie z^{12} für $z = 2 + 2i$.

Lösung:
Zunächst ist $r = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ und $\varphi = \arctan\left(\frac{2}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$. Also gilt $z = 2\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$ und mit Satz 4.5 folgt schließlich

$$
z^{12} = (2\sqrt{2})^{12}\cdot e^{i\frac{12\pi}{4}} = 2^{18}\cdot e^{i3\pi} = 2^{18}\left[\underbrace{\cos(3\pi)}_{=-1} + i\underbrace{\sin(3\pi)}_{=0}\right] = -2^{18}.
$$

Beispiel 47
Berechnen Sie $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$ für alle $n\in\mathbb{N}$ in der Exponentialform.

Lösung:
Mit Satz 4.5 und $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ sowie den Symmetrieeigenschaften der trigonometrischen Funktionen gilt

$$
\begin{aligned}
z^{-n} &= \frac{1}{z^n} = \frac{1}{r^n\left[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right]}\\
&= \frac{1}{r^n\left[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right]}\cdot\frac{\cos(n\varphi) - i\sin(n\varphi)}{\cos(n\varphi) - i\sin(n\varphi)}\\
&= \frac{1}{r^n}\cdot\frac{\cos(n\varphi) - i\sin(n\varphi)}{\underbrace{\cos^2(n\varphi) + \sin^2(n\varphi)}_{=1}} = r^{-n}\left[\cos(n\varphi) - i\sin(n\varphi)\right]\\
&= r^{-n}\left[\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi)\right] = r^{-n}\cdot e^{-in\varphi}.
\end{aligned}
$$

Definiert man schließlich noch $z^0 := 1$, dann gilt $z^n = r^n e^{in\varphi}$ offensichtlich für alle ganzzahligen Potenzen $n\in\mathbb{Z}$.

4.5 Allgemeine reelle Potenzen komplexer Zahlen

Bleibt jetzt noch die Frage zu klären, wie man Potenzen mit beliebigen reellen Exponenten berechnet. Dabei sind von besonderem Interesse Exponenten der Form $\frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$, also die Wurzeln aus komplexen Zahlen.

Definition 4.6 *Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ und $z = re^{i\varphi}$ ist z^α die Menge*

$$z^\alpha := \left\{ w_k \in \mathbb{C} \;\middle|\; w_k = r^\alpha e^{\alpha(\varphi+2k\pi)i},\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Die Auswertung dieser Definition erfordert die Betrachtung von vier Fällen.

1. Fall Für $\alpha = n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$w_k = r^n e^{n(\varphi+2k\pi)i} = r^n e^{in\varphi} \underbrace{e^{i2kn\pi}}_{=1} = r^n e^{in\varphi} =: w_0.$$

Die Potenz z^n ist also eindeutig und in diesem Fall besteht die Menge nur aus dem einen Element w_0.

2. Fall Für $\alpha = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ ist $z^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{z}$. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$

$$w_k = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{1}{n}(\varphi+2k\pi)i} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{\varphi}{n}i} \cdot e^{\frac{2k\pi}{n}i} \quad \text{und}$$

$$w_{n+k} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{\varphi}{n}i} \cdot e^{\frac{2(n+k)\pi}{n}i} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{\varphi}{n}i} \cdot \underbrace{e^{2\pi i}}_{=1} \cdot e^{\frac{2k\pi}{n}i} = w_k.$$

Beachten Sie, dass die Potenz $z^{\frac{1}{n}}$ nicht mehr eindeutig definiert ist! Wegen der Periodizität $w_{n+k} = w_k$ gibt es genau n verschiedene Lösungen

$$w_0 = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{\varphi}{n}i}, \quad w_1 = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{\varphi}{n}i} \cdot e^{\frac{2\pi}{n}i}, \quad \ldots \quad, w_{n-1} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{\varphi}{n}i} \cdot e^{\frac{2(n-1)\pi}{n}i}.$$

Dabei heißt die Lösung w_0 der **Hauptwert** von $\sqrt[n]{z}$.

Bemerkung:
Die komplexwertige Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z) = \sqrt[n]{z}$ ist daher keine klassische Funktion!

3. Fall Für $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ wird $z^{\frac{m}{n}} := (z^m)^{\frac{1}{n}}$ definiert!
Beachten Sie, dass im Allgemeinen $\left(z^{\frac{1}{n}}\right)^m \neq (z^m)^{\frac{1}{n}}$ ist, wie das folgende Beispiel für $m = n = 2$ zeigt!
Für $z = -1$ ist $r = 1$ und $\varphi = \pi$. Dann gilt einerseits

$$z^{\frac{1}{2}} = \{w_0, w_1\} = \left\{ e^{\frac{\pi}{2}i}, e^{\frac{3\pi}{2}i} \right\} = \{i, -i\}.$$

Die Potenz $\left(z^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \{i, -i\}^2$ ist aber nicht definiert!

Für $z^2 = 1$ ist $r = 1$ und $\varphi = 0$. Dann ergibt sich andererseits

$$(z^2)^{\frac{1}{2}} = \{w_0, w_1\} = \left\{e^{0\cdot i}, e^{\pi i}\right\} = \{1, -1\} \neq z \quad \Rightarrow \quad (z^2)^{\frac{1}{2}} \neq \left(z^{\frac{1}{2}}\right)^2.$$

4. Fall Für irrationales $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ hat die Menge z^α unendlich viele Elemente.

Bemerkung:
Die reelle Wurzel $\sqrt[n]{x}$ liefert für alle $x \in \mathbb{R}_0^+$ eine eindeutige Lösung, während die komplexe Wurzel $\sqrt[n]{z}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ (insbesondere auch für den Fall $z = x + i \cdot 0$) eine Menge von n Elementen liefert.

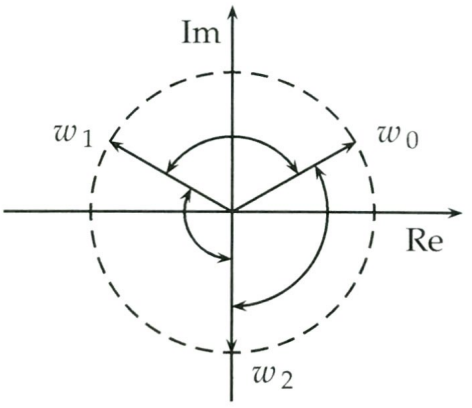
Beispiel 48
Skizzieren Sie die Menge $\sqrt[3]{i}$ in der Gaußschen Zahlenebene.

Lösung:
Für $z = i$ ist $r = 1$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Dann ergibt sich mit der Definition 4.6

$$\sqrt[3]{i} = \left\{ w_k \in \mathbb{C} \;\middle|\; w_k = e^{\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i},\ k \in \{0, 1, 2\} \right\} = \left\{ e^{\frac{\pi}{6}i}, e^{\frac{5\pi}{6}i}, e^{\frac{3\pi}{2}i} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i, -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i, -i \right\} = \{w_0, w_1, w_2\}.$$

Alle Elemente der Menge $\sqrt[3]{i}$ liegen auf dem Einheitskreis um den Ursprung in der komplexen Ebene. Der Winkel zwischen zwei beliebigen Elementen beträgt jeweils $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{3}$.



4.6 Komplexe Gleichungen und Ungleichungen

Weil die komplexen Zahlen nicht vollständig geordnet sind, sind Ungleichungen für komplexe Zahlen nicht erklärt. Beispielsweise kann für die komplexen Zahlen $z_1 = 1 + i$ und $z_2 = 2 + 2i$ nicht entschieden werden ob $z_1 < z_2$ oder $z_2 < z_1$ ist. Betrachtet man die Menge aller komplexen Zahlen, die innerhalb oder auf einem Kreis um den Ursprung mit dem Radius $r > 0$ in der komplexen Ebene liegen, so hat es keinen Sinn, nach einer kleinsten oder größten komplexen Zahl in dieser Menge zu suchen.

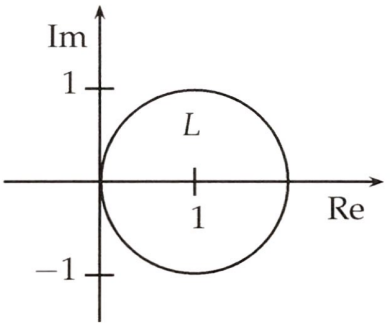
Da der Betrag $|z|$ einer komplexen Zahl reell ist, sind Ungleichungen zwischen Beträgen komplexer Zahlen natürlich möglich. Betrachten Sie dazu das folgende

Beispiel 49
Bestimmen Sie die Lösungsmenge $L = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-1| < 1\} \subset \mathbb{C}$ und skizzieren Sie sie in der Gaußschen Zahlenebene.

Lösung:
Sei $z = x + iy$. Dann ergibt sich durch äquivalente Umformungen:

$$\begin{aligned} & |z-1| < 1 \\ \Leftrightarrow \quad & |x+iy-1| < 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \sqrt{(x-1)^2+y^2} < 1 \quad |\,(\,)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & (x-1)^2+y^2 < 1 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge L besteht also aus allen komplexen Zahlen, die in der Gaußschen Zahlenebene innerhalb des Kreises mit dem Mittelpunkt $M(1\,|\,0)$ und dem Radius $r = 1$ liegen, wobei die Randpunkte des Kreises nicht zur Lösungsmenge gehören.



Betrachten Sie für $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ die komplexe Gleichung $z^n = 1$, die wie aus weiter unten ersichtlichen Gründen auch als **Kreisteilungsgleichung** bezeichnet wird. Die Frage ist nun, wie viele reelle und komplexe Lösungen hat diese Gleichung? Unter Verwendung von Polarkoordinaten und Satz 4.5 kann diese Gleichung überführt werden in die äquivalente Form

$$z^n = r^n\,[\cos(n\varphi) + i\,\sin(n\varphi)] = 1 \cdot [\cos(0) + i\,\sin(0)]\,.$$

Dann folgt durch Vergleich von Real- und Imaginärteil sofort $r = 1$ und wegen der Periodizität der Sinus - und Cosinusfunktion $n\varphi = 0 + 2k\pi \;\Leftrightarrow\; \varphi = \frac{2k\pi}{n}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Weil aber $\frac{2(k+n)\pi}{n} = \frac{2k\pi}{n} + 2\pi$ als Argument dieselbe komplexe Zahl liefert wie das Argument $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$, gibt es genau n verschiedene Lösungen $z_k = e^{\frac{2k\pi}{n}i}$ für alle $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.
Die Lösungen $\{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\} = \sqrt[n]{1}$ der Kreisteilungsgleichung $z^n = 1$ bezeichnet man als die n - ten **Einheitswurzeln**. Sie entstehen nacheinander durch Drehung der Wurzel $z_0 = 1$ um jeweils den Winkel $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{n}$ auf dem Einheitskreis und bilden somit die Ecken eines regelmäßigen n - Ecks. Vergleichen Sie dazu auch die Abbildung aus dem Beispiel 48.

Satz 4.6 *Seien $z, w \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$.*
Dann hat die Gleichung $z^n = w := re^{i\varphi}$ die n verschiedenen Lösungen

$$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{\varphi+2k\pi}{n} i} \quad \text{für alle} \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Beweis
Sei $z := r_z \cdot e^{i\phi}$ in der Exponentialform gegeben. Mit Satz 4.5 sowie der gleichen Argumentation wie bei der eben behandelten Kreisteilungsgleichung folgt

$$z^n = re^{i\varphi} \quad \Leftrightarrow \quad r_z^n e^{in\phi} = re^{i\varphi} \quad \Rightarrow \quad r_z = \sqrt[n]{r} \quad \text{und} \quad \phi_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

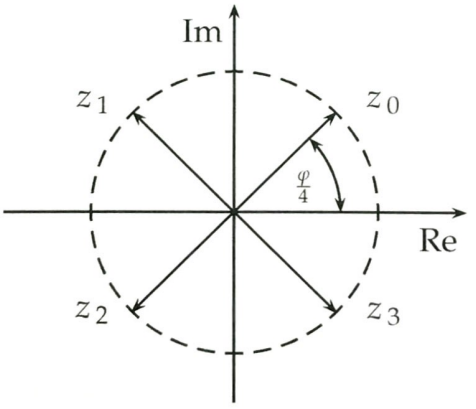
Also lauten die n Lösungen $z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{\varphi+2k\pi}{n} i}$ für alle $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

■

Beispiel 50
Wie muss eine Zahl $w \in \mathbb{C}$ beschaffen sein, damit je zwei ihrer vierten Wurzeln konjugiert komplex sind? Wie lauten die Lösungen in diesem Fall in kartesischen Koordinaten? Skizzieren Sie die vier Lösungen in der komplexen Ebene.

Lösung:
Aus dem Ansatz $z^4 = w = re^{i\varphi}$ und Satz 4.6 folgen die vier Lösungen

$$z_0 = \sqrt[4]{r} \cdot e^{\frac{\varphi}{4} i}, \quad z_1 = \sqrt[4]{r} \cdot e^{\frac{\varphi+2\pi}{4} i}, \quad z_2 = \sqrt[4]{r} \cdot e^{\frac{\varphi+4\pi}{4} i}, \quad z_3 = \sqrt[4]{r} \cdot e^{\frac{\varphi+6\pi}{4} i}.$$



Diese vier Lösungen bilden in der komplexen Ebene ein regelmäßiges Viereck, das im Kreis mit Mittelpunkt $M(0 \mid 0)$ und Radius $R = \sqrt[4]{r}$ einbeschrieben ist. Aus den Bedingungen $\overline{z}_0 = z_3$ und $\overline{z}_1 = z_2$ folgen für die Argumente die beiden Gleichungen

$$-\frac{\varphi}{4} = \frac{\varphi + 6\pi}{4} \quad \text{und} \quad -\frac{\varphi + 2\pi}{4} = \frac{\varphi + 4\pi}{4},$$

die im Intervall $[0, 2\pi)$ offenbar nur für die Lösung $\varphi = \pi$ erfüllt werden. Folglich lauten die vier Lösungen in kartesischen Koordinaten

$$z_0 = \sqrt[4]{r}\cdot e^{\frac{\pi}{4}i} = \sqrt[4]{r}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \qquad z_1 = \sqrt[4]{r}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}i} = \sqrt[4]{r}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$z_2 = \sqrt[4]{r}\cdot e^{\frac{5\pi}{4}i} = \sqrt[4]{r}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \overline{z}_1, \quad z_3 = \sqrt[4]{r}\cdot e^{\frac{7\pi}{4}i} = \sqrt[4]{r}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \overline{z}_0.$$

4.7 Polynome im Komplexen

In diesem Abschnitt geht es darum, wie man Nullstellen von Polynomen mit komplexen Koeffizienten bestimmt. Dazu vorab die

Definition 4.7 *Seien $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ und $a_k \in \mathbb{C}$ für alle $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ mit $a_n \neq 0$. Dann heißt*

$$p(z) := a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n$$

***komplexes Polynom** n - ten Grades.*

Beispiel 51

- $p(z) = iz + 3 - i$ ist ein komplexes Polynom ersten Grades.
- $p(z) = z^2 + (1+i)z$ ist ein komplexes Polynom zweiten Grades.
- $p(z) = 3(z+i)(z+2)(z+i+1)$ ergibt durch ausmultiplizieren

$$\begin{aligned} p(z) &= 3(z+i)(z+2)(z+i+1) = (3z+3i)[z^2+(3+i)z+2+2i] \\ &= 3z^3+(9+3i)z^2+(6+6i)z+3iz^2+(-3+9i)z-6+6i \\ &= 3z^3+(9+6i)z^2+(3+15i)z-6+6i \end{aligned}$$

ein komplexes Polynom dritten Grades.

Definition 4.8 *Sei $p(z)$ ein komplexes Polynom n - ten Grades. Dann heißt die Zahl $z_k \in \mathbb{C}$ eine **Nullstelle** von p, falls $p(z_k) = 0$ ist.*

Das dritte Polynom $p(z) = 3(z+i)(z+2)(z+i+1)$ aus dem Beispiel 51 hat offensichtlich die drei Nullstellen $z_1 = -i$, $z_2 = -2$ und $z_3 = -1-i$, weil dann einer der drei Linearfaktoren null ist. Dagegen lassen sich in der ausmultiplizierten Form

$$p(z) = 3z^3+(9+6i)z^2+(3+15i)z-6+6i$$

die Nullstellen nicht ohne weiteres ablesen.

Die entscheidende Frage ist jetzt, wie viele Nullstellen hat ein komplexes Polynom n - ten Grades? Die Antwort gibt der folgende wichtige **Fundamentalsatz der Algebra**, der mit den momentan zur Verfügung stehenden Mitteln nicht bewiesen werden kann. Der Beweis wird in Band 11 Abschnitt 5.1 nachgeholt werden!

Satz 4.7 *Sei p ein Polynom vom Grad $n \geq 1$, dann gibt es eine bis auf die Reihenfolge eindeutige* ***Linearfaktorzerlegung***

$$p(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n).$$

Bemerkung:

- Aus diesem Satz folgt sofort, dass jedes komplexe Polynom vom Grade n genau n Nullstellen hat, weil jeder Linearfaktor eine Nullstelle liefert. Diese Nullstellen müssen aber nicht notwendigerweise verschieden sein. Mehrfache Nullstellen muss man entsprechend ihrer Vielfachheit zählen.

- Beachten Sie, dass der Fundamentalsatz der Algebra keine Aussagen darüber macht wie man zu einer derartigen Linearfaktorzerlegung kommt, sondern nur dass eine solche Linearfaktorzerlegung existiert. Die Berechnung der Nullstellen ist im Allgemeinen ein äußerst anspruchsvolles mathematisches Problem, das nur in wenigen Ausnahmefällen algebraisch lösbar ist. In den meisten Fällen ist man auf numerische Verfahren angewiesen um die Nullstellen zu berechnen.

Beispiel 52
Das Polynom $p(z) = 2(z - i)(z - i)(z + 3)(z + i)(z - 3)$ hat die doppelte Nullstelle $z_1 = i$ und die drei einfachen Nullstellen $z_2 = -3$, $z_3 = -i$ und $z_4 = 3$.

Eine interessante Tatsache für die Nullstellen eines komplexen Polynoms liefert der

Satz 4.8 *Sei $p(z) := a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n$ ein komplexes Polynom n - ten Grades. Falls die Koeffizienten a_k für alle $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$* ***reell*** *sind und z_0 eine Nullstelle des Polynoms p ist, dann ist auch die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z_0}$ eine Nullstelle des Polynoms p.*

Beweis
Weil nach Voraussetzung das Polynom nur reelle Koeffizienten hat, gilt $\overline{a_k} = a_k$ für alle $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p, also $p(z_0) = 0$. Dann ergibt sich mit den Regeln der Konjugation komplexer Zahlen (Satz 4.1)

$$\begin{aligned}
0 = p(z_0) = \overline{p(z_0)} &= \overline{a_0 + a_1 z_0 + a_2 z_0^2 + a_3 z_0^3 + \ldots + a_n z_0^n} \\
&= \overline{a_0} + \overline{a_1 z_0} + \overline{a_2 z_0^2} + \overline{a_3 z_0^3} + \ldots + \overline{a_n z_0^n} \\
&= \overline{a_0} + \overline{a_1} \cdot \overline{z_0} + \overline{a_2} \cdot \overline{z_0^2} + \overline{a_3} \cdot \overline{z_0^3} + \ldots + \overline{a_n} \cdot \overline{z_0^n} \\
&= a_0 + a_1 \cdot \overline{z_0} + a_2 \cdot \overline{z_0^2} + a_3 \cdot \overline{z_0^3} + \ldots + a_n \cdot \overline{z_0^n} \\
&= a_0 + a_1 \cdot \overline{z_0} + a_2 \cdot \overline{z_0}^2 + a_3 \cdot \overline{z_0}^3 + \ldots + a_n \cdot \overline{z_0}^n = p(\overline{z_0}).
\end{aligned}$$

■

Im Folgenden soll nun gezeigt werden, wie man die Nullstellen von speziell ausgewählten komplexen Polynomen ermittelt und somit die Linearfaktordarstellung aus Satz 4.7 erhält.

Lineare Gleichung:
Für alle $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$ mit $a_1 \neq 0$ lässt sich die lineare Gleichung $a_1 z + a_0 = 0$ äquivalent umformen zu

$$a_1 z + a_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 \left(z + \frac{a_0}{a_1} \right) = 0 .$$

Also ist $z = -\frac{a_0}{a_1}$ die einzige mögliche Nullstelle.

Beispiel 53
Die Nullstelle der linearen Gleichung $(1+i)z + 2 - i = 0$ ist

$$z = -\frac{2-i}{1+i} = -\frac{2-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = -\frac{2-2i-i+i^2}{1-i^2} = -\frac{1-3i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} i .$$

Quadratische Gleichung:
Für alle $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ mit $a_2 \neq 0$ lässt sich zunächst die allgemeine quadratische Gleichung $a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$ äquivalent umformen zu

$$a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_2 \left(z^2 + \frac{a_1}{a_2} z + \frac{a_0}{a_2} \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_2 (z^2 + bz + c) = 0$$

mit den Koeffizienten $b := \frac{a_1}{a_2}$ und $c := \frac{a_0}{a_2}$. Um die Lösungen von $z^2 + bz + c = 0$ zu finden, unterscheidet man in der praktischen Rechnung drei verschiedene Fälle.

1) Für $b = 0$ folgt $z^2 + c = 0 \Leftrightarrow z^2 = -c$. Für den Spezialfall $c \in \mathbb{R}$ ergeben sich die beiden Lösungen $z_{1,2} = \pm\sqrt{c}\, i$ falls $c > 0$ und $z_{1,2} = \pm\sqrt{-c}$ falls $c \leq 0$ ist. Für alle $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ergeben sich mit Satz 4.6 prinzipiell die beiden Lösungen

$$z_1 = \sqrt{|c|} \cdot e^{\frac{\varphi}{2} i} \qquad \text{und} \qquad z_2 = \sqrt{|c|} \cdot e^{\frac{\varphi + 2\pi}{2} i} .$$

Diese Lösungen lassen sich allerdings auch auf einem anderen Weg finden, indem man für z den Ansatz $z = x + iy$ macht. Dann folgt mit $-c := \alpha + i\beta$ durch Vergleich von Real- und Imaginärteil das Gleichungssystem

$$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi = \alpha + \beta i \quad \Rightarrow \quad x^2 - y^2 = \alpha \quad \text{und} \quad 2xy = \beta ,$$

aus denen x beziehungsweise y leicht bestimmt werden können.

2) Für $c = 0$ folgen aus $z^2 + bz = 0 \Leftrightarrow z(z+b) = 0$ die beiden Lösungen $z_1 = 0$ und $z_2 = -b$.

3) Für $b, c \neq 0$ folgt durch binomische Ergänzung wieder der erste Fall

$$z^2 + bz + c = z^2 + bz + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = \left(z + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(z + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c .$$

Beispiel 54
Finden Sie jeweils die Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen.

$a)\ z^2-\sqrt{2}-\sqrt{2}i=0 \qquad b)\ iz^2+(2-i)z=0 \qquad c)\ z^2-(1-2i)z-3-i=0$

Lösung:

a) Mit dem Ansatz $z=x+iy$ folgt durch Vergleich des Real- und Imaginärteils

$$x^2-y^2+2xyi=\sqrt{2}+\sqrt{2}i \quad\Rightarrow\quad x^2-y^2=\sqrt{2} \quad \text{und} \quad 2xy=\sqrt{2}.$$

Unter der Annahme, dass $x\neq 0$ ist, ergibt sich aus der zweiten Gleichung $y=\frac{\sqrt{2}}{2x}$. Eingesetzt in die erste Gleichung liefert mit binomischer Ergänzung:

$$\begin{aligned} x^2-\frac{1}{2x^2}=\sqrt{2} \quad &\Leftrightarrow \quad x^4-\sqrt{2}x^2-\frac{1}{2}=0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(x^2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(x^2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2=\frac{\sqrt{2}}{2}\pm 1 \end{aligned}$$

Weil x^2 positiv sein muss, kommt nur die Lösung $x^2=\frac{\sqrt{2}}{2}+1$ infrage. Also ist $x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}$ und damit $y_{1,2}=\frac{\sqrt{2}}{2x_{1,2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}}=\pm\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+2}}$. Damit lauten die beiden Lösungen der Gleichung

$$z_{1,2}=x_{1,2}+y_{1,2}i=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+2}}i\right).$$

b) Die Linearfaktorzerlegung ergibt sich hier einfach durch Ausklammern von z zu

$$iz^2+(2-i)z=0 \quad\Leftrightarrow\quad i\left(z^2+\left(\frac{2}{i}-1\right)z\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad iz(z-1-2i)=0.$$

Also lauten die beiden Lösungen der Gleichung $z_1=0$ und $z_2=1+2i$.

c) Durch binomische Ergänzung und Anwendung der dritten binomischen Formel erhält man die Linearfaktorzerlegung

$$\begin{aligned} 0=z^2-(1-2i)z-3-i &= z^2-(1-2i)z+\left(\frac{1-2i}{2}\right)^2-\left(\frac{1-2i}{2}\right)^2-3-i \\ &= \left(z-\frac{1-2i}{2}\right)^2-\frac{1-4i+4i^2}{4}-3-i=\left(z-\frac{1}{2}+i\right)^2-\frac{9}{4} \\ &= \left(z-\frac{1}{2}+i+\frac{3}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}+i-\frac{3}{2}\right)=(z+1+i)(z-2+i). \end{aligned}$$

Also lauten die beiden Lösungen der Gleichung $z_1=-1-i$ und $z_2=2-i$.

Gleichung 3 - ten Grades :
Für alle $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ mit $a_3 \neq 0$ lässt sich die allgemeine Gleichung 3 - ten Grades $a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$ äquivalent umformen zu

$$a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_3 \left(z^3 + \frac{a_2}{a_3} z^2 + \frac{a_1}{a_3} z + \frac{a_0}{a_3} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a_3 (z^3 + b z^2 + c z + d) = 0$$

mit den Koeffizienten $b := \frac{a_2}{a_3}$, $c := \frac{a_1}{a_3}$ und $d := \frac{a_0}{a_3}$. Um die Lösungen der Gleichung

$$z^3 + b z^2 + c z + d = 0$$

zu finden, unterscheidet man hier drei verschiedene Fälle.

1) Für $b = c = 0$ folgt $z^3 + d = 0 \Leftrightarrow z^3 = -d = r e^{i\varphi}$. Mit Satz 4.6 ergeben sich die drei Lösungen $z_k = \sqrt[3]{r}\, e^{\frac{\varphi + 2k\pi}{3} i}$ für $k \in \{0, 1, 2\}$.

2) Für $d = 0$ folgt $z^3 + b z^2 + c z = 0 \Leftrightarrow z (z^2 + b z + c) = 0$. Eine erste Lösung ist $z_1 = 0$. Die beiden weiteren Lösungen ergeben sich aus der Lösung der quadratischen Gleichung $z^2 + b z + c = 0$.

3) Die Lösung der allgemeinen Gleichung 3 - ten Grades $z^3 + b z^2 + c z + d = 0$ für beliebige $b, c, d \in \mathbb{C}$ lässt sich nach geeigneter Transformation auf die Lösungsformel von Cardani zurückführen, die aber mit einem erheblichen Rechenaufwand verbunden ist (siehe Abschnitt 6.3) und daher an dieser Stelle nicht weiter verfolgt werden soll. Manchmal lässt sich aber eine erste Lösung raten oder ist sogar schon vorgegeben. Dann führt eine **Polynomdivision** mit dem entsprechenden Linearfaktor auf eine Reduktion des Grades der Gleichung. Nach Satz 4.7 existiert eine eindeutige Linearfaktorzerlegung

$$a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = a_3 (z - z_1) (z - z_2) (z - z_3) = 0.$$

Angenommen die erste Lösung $z = z_1$ ist bekannt, dann gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} (a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0) : (z - z_1) &= \frac{a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0}{z - z_1} \\ &= \frac{a_3 (z - z_1) (z - z_2) (z - z_3)}{z - z_1} \\ &= a_3 (z - z_2) (z - z_3) = 0 \end{aligned}$$

und das Problem ist reduziert auf eine quadratische Gleichung aus der die weiteren Lösungen z_2 und z_3 resultieren.

Beispiel 55
Bestimmen Sie sämtliche Lösungen der Gleichung $p(z) := z^3 - 2z^2 + z - 2 = 0$.

Lösung :
Durch Raten findet man eine erste Lösung $z_1 = i$, denn es gilt

$$p(i) = i^3 - 2i^2 + i - 2 = -i + 2 + i - 2 = 0.$$

Weil dieses Polynom nur reelle Koeffizienten hat, gilt nach Satz 4.8, dass auch die konjugiert komplexe Zahl $z_2 = \overline{z_1} = -i$ eine Lösung dieser Gleichung ist. Damit sind die zwei Linearfaktoren $(z-i)(z+i) = z^2+1$ bekannt und eine Polynomdivision liefert:

$$\begin{array}{rl} & (z^3 - 2z^2 + z - 2) : (z^2+1) = z-2 \\ -(z^3 & \quad +z) \\ \hline 0 & -2z^2 + 0 - 2 \\ & -(-2z^2 \quad -2) \\ \hline & 0 \quad\quad 0 \end{array}$$

Die dritte Lösung folgt damit aus $z-2=0$ zu $z_3 = 2$.

Gleichung 4 - ten Grades:
Für alle $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{C}$ mit $a_4 \neq 0$ lässt sich die allgemeine Gleichung 4 - ten Grades $a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$ äquivalent umformen zu

$$\begin{aligned} a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a_4 \left(z^4 + \frac{a_3}{a_4} z^3 + \frac{a_2}{a_4} z^2 + \frac{a_1}{a_4} z + \frac{a_0}{a_4} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a_4 (z^4 + b z^3 + c z^2 + d z + e) = 0 \end{aligned}$$

mit den Koeffizienten $b := \frac{a_3}{a_4}$, $c := \frac{a_2}{a_4}$, $d := \frac{a_1}{a_4}$ und $e := \frac{a_0}{a_4}$. Um die Lösungen der Gleichung

$$z^4 + b z^3 + c z^2 + d z + e = 0$$

zu finden, unterscheidet man jetzt vier verschiedene Fälle.

1) Für $b = c = d = 0$ folgt $z^4 + e = 0 \Leftrightarrow z^4 = -e = r e^{i\varphi}$. Mit Satz 4.6 ergeben sich die vier Lösungen $z_k = \sqrt[4]{r}\, e^{\frac{\varphi + 2k\pi}{4} i}$ für $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

2) Für $b = d = 0$ gilt $z^4 + c z^2 + e = 0$. Mit der Substitution $w := z^2$ lässt sich diese Gleichung auf die quadratische Gleichung $w^2 + c w + e = 0$ überführen, die die beiden Lösungen w_1 beziehungsweise w_2 liefert. Aus der Resubstitution $z^2 = w_1$ und $z^2 = w_2$ ergeben sich dann die vier Lösungen z_1, z_2 und z_3, z_4.

3) Für $e = 0$ folgt $z^4 + b z^3 + c z^2 + d z = 0 \Leftrightarrow z(z^3 + b z^2 + c z + d) = 0$. Eine erste Lösung ist $z_1 = 0$. Die drei weiteren Lösungen ergeben sich aus der Lösung der Gleichung 3 - ten Grades $z^3 + b z^2 + c z + d = 0$.

4) Die Lösung der allgemeinen Gleichung 4 - ten Grades $z^4 + b z^3 + c z^2 + d z + e = 0$ für beliebige $b, c, d, e \in \mathbb{C}$ lässt sich nach geeigneter Transformation ebenfalls auf eine Lösungsformel zurückführen, die aber auch mit einem erheblichen Rechenaufwand verbunden ist (siehe Abschnitt 6.3) und daher an dieser Stelle nicht weiter verfolgt werden soll. Manchmal lässt sich aber eine erste Lösung raten oder ist sogar schon vorgegeben und dann führt eine Polynomdivision zur Reduktion des Grades.

Gleichung höheren Grades :
Gleichungen vom Grade $n > 4$ sind nur in ganz wenigen speziellen Ausnahmefällen lösbar, wie etwa die Gleichung $z^{2n} + bz^n + c = 0$, die sich für alle $n \in \mathbb{N}$ und $b, c \in \mathbb{C}$ durch die Substitution $w := z^n$ auf eine quadratische Gleichung bringen lässt. Es existieren hier keine allgemeinen Lösungsformeln, sodass man nur versuchen kann, eine Lösung zu raten und damit eine Reduktion des Grades erreicht.

4.8 Übungsaufgaben

Aufgabe 53
Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = -3 + 2i$ und $z_3 = 1 + i$. Bestimmen Sie die Ausdrücke $w_1, \ldots, w_8$ in der kartesischen Form $w = a + ib$ und stellen Sie sie anschließend in der komplexen Ebene dar.

$$w_1 = z_1 + \overline{z_2} \qquad w_2 = \overline{z_3 - z_1} \qquad w_3 = z_1 \cdot z_2 \qquad w_4 = \mathrm{Re}\,(z_1 \cdot z_2)$$
$$w_5 = \overline{z_3 \cdot z_2} \qquad w_6 = \frac{z_2}{z_1} \qquad w_7 = \frac{\overline{z_2}}{z_3} \qquad w_8 = |\,z_1\,|$$

Aufgabe 54
Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 2i$, $z_2 = -2 + i$ und $z_3 = 1 - \frac{i}{2}$. Bestimmen Sie die Ausdrücke $w_1, \ldots, w_8$ in der kartesischen Form $w = a + ib$ und stellen Sie sie anschließend in der komplexen Ebene dar.

$$w_1 = \overline{z_2 + z_3} \qquad w_2 = \overline{z_3} - z_1 \qquad w_3 = z_3 \cdot z_2 \qquad w_4 = \overline{z_3 \cdot z_1}$$
$$w_5 = \frac{z_3}{z_1} \qquad w_6 = \frac{\overline{z_2}}{z_3} \qquad w_7 = \mathrm{Re}\,(z_2) + \mathrm{Im}\,(z_2) \qquad w_8 = |\,z_3\,|$$

Aufgabe 55
Es seien die komplexen Zahlen $z_1 = 2 + 3i$ und $z_2 = 3 - 2i$ gegeben. Schreiben Sie die folgenden Zahlen in der Form $w = x + iy$.

$$w_1 = z_1 + z_2 \qquad w_2 = iz_2^{\,2} \qquad w_3 = \frac{z_1}{z_2} \qquad w_4 = z_1 \cdot z_2$$
$$w_5 = z_1 \cdot \overline{z_2} \qquad w_6 = |\,z_2\,| \qquad w_7 = (z_1 - z_2)^2 \qquad w_8 = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

Aufgabe 56
Es seien die komplexen Zahlen $z_1 = 1 - 3i$ und $z_2 = 4 + i$ gegeben. Schreiben Sie die folgenden Zahlen in der Form $w = x + iy$.

$$w_1 = z_1 + z_2 \qquad w_2 = z_1 \cdot z_2 \qquad w_3 = \frac{z_1}{z_2} \qquad w_4 = |\,z_1 \cdot \overline{z_2}\,|$$

Aufgabe 57
Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $z = a + ib$ dar.

$$z_1 = \frac{1+i}{1-i} \qquad z_2 = \left(\frac{4-i}{2+i}\right)^2 \qquad z_3 = \frac{(1+2i)^2}{2+3i}$$

Aufgabe 58

Geben Sie die komplexen Zahlen $w_1 = z_1 + z_2$, $w_2 = z_1 \cdot z_2$ und $w_3 = \frac{z_1}{z_2}$ in der Form $w = a + ib$ an und bestimmen Sie jeweils deren Betrag. Dabei sind z_1 und z_2 gegeben durch

$$z_1 = \frac{5i}{2-i} \qquad \text{und} \qquad z_2 = \frac{1+2i}{i}.$$

Tragen Sie die Punkte in der Gaußschen Zahlenebene ein und überlegen Sie sich, was der Betrag anschaulich bedeutet.

Aufgabe 59

Berechnen Sie die Real- und Imaginärteile sowie die Beträge der folgenden komplexen Zahlen.

$a)\ z_1 = (3-4i)(3+4i) - 5(5+2i)$ $\quad b)\ z_2 = \frac{1+i}{2-i} + \frac{3+i}{4+i}$ $\quad c)\ z_3 = (1+2i)^3$

$d)\ z_4 = \frac{1+i}{2+i} + \frac{2+i}{3+i} + \frac{3+i}{1+i}$ $\quad e)\ z_5 = (1+3i)(4-2i)$ $\quad f)\ z_6 = \frac{1+3i}{4-2i}$

Aufgabe 60

Schreiben Sie die komplexen Zahlen in die Schreibweise $z = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$.

$$z_1 = -3, \qquad z_2 = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i, \qquad z_3 = 2\sqrt{3} - 2i, \qquad z_4 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2i}.$$

Aufgabe 61

Gegeben seien die komplexen Zahlen z_1 und z_2. Stellen Sie die Ausdrücke $w_1 = z_1 + z_2$, $w_2 = z_1 \cdot z_2$ und $w_3 = \frac{z_1}{z_2}$ für

$a)\ z_1 = 4 - 4i, z_2 = -2 + 3i$ $\quad b)\ z_1 = e^{\frac{i\pi}{4}}, z_2 = 3 \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}$ $\quad c)\ z_1 = 1 + i, z_2 = \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{i\pi}{4}}$

in der kartesischen Form $w = a + ib$ dar und zeichnen Sie sie in die Gaußsche Zahlenebene.

Aufgabe 62

Berechnen Sie für $z_1 = \frac{(1+i)^2}{1-i}$ und $z_2 = 1 - 3i$ die komplexen Zahlen w_1, w_2 und w_3 in der Form $w = a + ib$.

$$w_1 = z_1 \cdot z_2, \qquad w_2 = |z_2|, \qquad w_3 = e^{z_1^2 - i \cdot z_2}.$$

Aufgabe 63

Stellen Sie w_1, w_2, $w_1 \cdot w_2$, $\frac{w_1}{w_2}$ in der Form $w = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$ dar, und skizzieren Sie die Zahlen in der komplexen Zahlenebene.

$a)\ w_1 = 1 + i, \quad w_2 = -2 + 2i.$ $\qquad b)\ w_1 = \sqrt{3} + i, \quad w_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$

Aufgabe 64

Berechnen Sie $w_1 = z_1 + z_2$, $w_2 = z_1 - z_2$, $w_3 = \frac{z_1}{z_2}$ und $w_4 = z_1 \cdot z_2$ mit den folgenden komplexen Zahlen:

$a)$ $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 1 - i$. $b)$ $z_1 = \frac{(1-i)^2}{1+i}$, $z_2 = 3 - 5i$.

$c)$ $z_1 = 3 + 3i$, $z_2 = 2\sqrt{3}\, e^{-i\frac{2}{3}\pi}$.

Aufgabe 65

Es seien die komplexen Zahlen z_1 und z_2 gegeben durch:

$a)$ $z_1 = 2 - 2i$, $z_2 = -1 + 3i$. $b)$ $z_1 = e^{\frac{i\pi}{4}}$, $z_2 = \frac{1}{2} e^{\frac{i\pi}{2}}$.

$c)$ $z_1 = 1 - i$, $z_2 = \sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{4}}$.

Berechnen Sie $w_1 = z_1 + z_2$, $w_2 = z_1 \cdot z_2$ und $w_3 = \frac{z_1}{z_2}$. Schreiben Sie dies in der Form $w = a + ib$ und skizzieren Sie die Zahlen in der komplexen Zahlenebene.

Aufgabe 66

a) Von den folgenden komplexen Zahlen bestimme man Real- und Imaginärteil sowie ihren Betrag:

$$z_1 = \frac{1}{1+i}, \qquad z_2 = \frac{3+2i}{1-i}, \qquad z_3 = 3e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

b) Berechnen Sie $w_1 = z_1 + z_2$, $w_2 = |z_1 + z_2|$, $w_3 = z_1 \cdot z_3$, $w_4 = \frac{z_1}{z_2}$ und skizzieren Sie sie in die komplexe Ebene.

Aufgabe 67

Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in Polarkoordinaten dar.

$a)$ $z_1 = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$ $b)$ $z_2 = \sqrt{3} - i$ $c)$ $z_3 = -1 + \sqrt{3}i$

Aufgabe 68

Geben Sie die komplexen Zahlen z_1, z_2, $w_1 = z_1 + z_2$ und $w_2 = \frac{z_1}{z_2}$ in kartesischer Darstellung an und berechnen Sie $|z_2|$ mit

$$z_1 = \frac{1-i}{1+i} \quad \text{und} \quad z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Aufgabe 69

Berechnen Sie

$a)$ $w_1 = z^{10}$ für $z = \frac{7-i}{3-4i}$ und $b)$ $w_2 = z^6$ für $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3+2i}{4-6i}$

und stellen Sie das Ergebnis in der Form $w = x + iy$ dar.

Aufgabe 70

Welche komplexe Zahl ist das Spiegelbild einer gegebenen komplexen Zahl $z = x + iy$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, bei Spiegelung

$a)$ am Ursprung? $b)$ an der reellen Achse? $c)$ an der imaginären Achse?

Aufgabe 71

Beschreiben Sie in Worten, was mit der Lage einer beliebigen komplexen Zahl in der Gaußschen Zahlenebene geschieht, wenn man sie mit $z = 1 + i$ multipliziert.

Aufgabe 72

Berechnen Sie jeweils den Real- und Imaginärteil folgender Elemente aus $\mathbb{C}$. Bestimmen Sie anschließend die Darstellung in Polarkoordinaten.

$$a)\ z_1 = \frac{(3-2i)(3i-1)}{(1-i)}\, i^5 \qquad b)\ z_2 = \left((\sqrt{2}-i) - i(1-i\sqrt{2})\right)^{11}$$

$$c)\ z_3 = \frac{1+2i}{3-4i} \qquad d)\ z_4 = (1+i)^4$$

Aufgabe 73

Schreiben Sie die komplexen Zahlen $z = -2-2i$ und $w = -1+\sqrt{3}i$ in Polarkoordinaten und berechnen Sie anschließend den Real- und Imaginärteil von:

$$a)\ u_1 = z^4 \qquad b)\ u_2 = w^3 \qquad c)\ u_3 = (z \cdot w)^6$$

Hinweis: Verwenden Sie die Eulersche Formel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$.

Aufgabe 74

Berechnen Sie jeweils den Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen.

$$a)\ z_1 = \left(\frac{2i}{1-i}\right)^6 \qquad b)\ z_2 = \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{21}$$

Aufgabe 75

a) Geben Sie i^k für beliebige $k \in \mathbb{N}$ in kartesischer Form an.

b) Stellen Sie die folgende komplexe Zahl z in der kartesischen Form $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar.

$$z = \frac{2 \cdot i^7 \cdot |i-1| + i^{12} \cdot |1+i| + \sqrt{2} \cdot i^{21}}{i^6 \cdot (1+i)} + i$$

Aufgabe 76

Sei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine beliebige komplexe Zahl und sei $z = iz_0$. Fassen Sie z_0 und z als Vektoren in der komplexen Zahlenebene auf. Was ist der Winkel zwischen den Ortsvektoren z_0 und z?

Aufgabe 77

Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen jeweils in der Form $z = r \cdot e^{i\varphi}$ an.

$$a)\ z_1 = (1+i)^8 \qquad b)\ z_2 = \left(\sqrt{\frac{1}{3}} - i\right)^4 \qquad c)\ z_3 = \sqrt[3]{-i} \qquad d)\ z_4 = \left(\sqrt{1+i}\right)^9$$

Welche der Lösungen sind nicht eindeutig ?

Aufgabe 78

a) Sei i die imaginäre Einheit. Berechnen Sie i^{123}.

b) Sei $z \in \mathbb{C}$. Wie viele Lösungen besitzt die Gleichung $e^z = e$?

c) Es sei $z = -1 - i$ und $w = e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot z$. Ermitteln Sie den Real- und Imaginärteil von $u = w^{12}$.

Aufgabe 79

Stellen Sie $z_1 \in \mathbb{C}$ in kartesischen Koordinaten und $z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ in Polarkoordinaten dar.

$$a)\ z_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5 \qquad b)\ z_2 = 1 - \frac{i}{\sqrt{3}} \qquad c)\ z_3 = -6$$

Aufgabe 80

Bestimmen Sie Realteil, Imaginärteil und Absolutbetrag der folgenden komplexen Zahlen:

$$a)\ z_1 = (-1+i)^5 \qquad b)\ z_2 = \frac{2-3i}{-1+2i} \qquad c)\ z_3 = \frac{3e^{\frac{2}{3}\pi i}}{2e^{\frac{1}{2}\pi i}}$$

$$d)\ z_4 = e^{2-3i} \qquad e)\ z_5 = \left(1+\sqrt{3}i\right)^{10} \qquad f)\ z_6 = \frac{2e^{\frac{2}{3}\pi i}}{3+7i}$$

$$g)\ z_7 = \left[\cos\left(\frac{6}{7}\pi - 1\right) + i\sin\left(\frac{6}{7}\pi - 1\right)\right] e^{3+i+\frac{1}{7}\pi i}$$

Aufgabe 81

Berechnen Sie mithilfe der Polardarstellung für komplexe Zahlen:

$$a)\ z_1 = (1+i)^{20} \qquad b)\ z_2 = (1+i)^n + (1-i)^n \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 82

Berechnen Sie den Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl

$$z = \exp\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Aufgabe 83

Sei $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ mit $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$. Zeigen Sie, dass genau dann ein $n \in \mathbb{N}$ mit $z^n \in \mathbb{R}$ existiert, wenn $\frac{\varphi}{\pi}$ eine rationale Zahl ist.

Aufgabe 84

Vereinfachen Sie für $z \in \mathbb{C}$ die folgenden Ausdrücke.

a) $\left((\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2 \right)^2$

b) $\mathrm{Im}\,(z^2 + \overline{z}^2)$

c) $\mathrm{Re}\,((1+i)z) + \mathrm{Im}\,((1+i)z)$

d) $\dfrac{\mathrm{Re}\,(z)}{\mathrm{Im}\,(iz)}$

e) $(1 - \mathrm{Re}\,(z) + i\,\mathrm{Im}\,(z))(1 - \mathrm{Re}\,(z) - i\,\mathrm{Im}\,(z))$

f) $\mathrm{Im}\,(z^2 - \overline{z}^2)$

g) $\mathrm{Re}\left(e^{z^2}\right)$

h) $\mathrm{Im}\left(\overline{z}^{80} \cdot z^{79}\right)$

Aufgabe 85

a) Welche Werte haben $\mathrm{Re}\,(z)$ und $|z|$ für $z = (1+i)^{20}$?

b) Berechnen Sie $|e^i|$.

c) Welche $z \in \mathbb{C}$ erfüllen die Gleichung $\mathrm{Im}\,(z) = |z|$?

Aufgabe 86

Stellen Sie $z(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ in Polarkoordinaten dar, wobei $z(x) := \frac{x+i}{ix-1}$ ist.

Aufgabe 87

Die komplexe Exponentialfunktion ist für alle $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ definiert als

$$e^z := e^x (\cos y + i \sin y).$$

a) Zeigen Sie, dass die komplexe Exponentialfunktion $2\pi i$ - periodisch ist. Skizzieren Sie einen beliebigen Periodenbereich dieser Funktion in der komplexen Ebene.

b) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für die $e^z = 1$ gilt.

Aufgabe 88

Gegeben sei $z_1 = \frac{3+i}{1-i}$. Geben Sie zunächst ein $z_2 \in \mathbb{C}$ so an, dass $|z_1 + z_2| = \sqrt{32}$ und erklären Sie Ihre Vorgehensweise zum Auffinden von z_2 grafisch. Geben Sie dann alle $z_2 \in \mathbb{C}$ an, so dass $|z_1 + z_2| = \sqrt{32}$.

Aufgabe 89

Es sei $a \in \mathbb{R}$. Durch die Abbildung $z : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $z(t) = a\cos(t) + ia\sin(t)$ wird eine Kurve in der komplexen Zahlenebene beschrieben. Zeichnen Sie die Kurve.

Aufgabe 90

Skizzieren Sie die Menge M in der Gaußschen Zahlenebene.

$$M := \{z \in \mathbb{C} \mid (|z|^2 - 4) \geq 0\} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,(z^2) \geq 0\}$$

Aufgabe 91

Skizzieren Sie die folgenden Mengen $M \subset \mathbb{C}$ in der Gaußschen Zahlenebene.

a) $M := \{z \in \mathbb{C} \mid 2 \leq |z| \leq 3\} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\,(z) \geq 1\}$

b) $M := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,(z) \geq 1 \wedge 1 < \mathrm{Im}\,(z) \leq 3\}$

Aufgabe 92

Skizzieren Sie die folgenden Mengen $M \subset \mathbb{C}$ in der Gaußschen Zahlenebene.

a) $M := \{ z \in \mathbb{C} \mid iz - i \cdot \overline{z} = 3 \}$ b) $M := \{ z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z - 2 - 3i| < 2 \}$

c) $M := \{ z \in \mathbb{C} \mid iz + i \cdot \overline{z} = 3 \}$ d) $M := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \left| \frac{z-1}{z+1} \right| \geq 1 \right\}$

Aufgabe 93

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $M \subset \mathbb{C}$ und beschreiben Sie diese verbal, oder skizzieren Sie sie in der Gaußschen Zahlenebene!

a) $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \left| \frac{\mathrm{Re}(z)}{2} \right| \leq \frac{\mathrm{Im}(z)}{4} \right\}$ b) $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z} \right) = 1 \right\}$

c) $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \,\middle|\, \frac{6}{|z|} - |z| = 1 \right\}$ d) $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \,\middle|\, \frac{z}{\overline{z}} = 1 \right\}$

e) $M = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z + i| + |z - i| = 4 \}$ f) $M = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z + 1| < 2 \}$

g) $M = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - i| \geq |z + 2 + i| \}$ h) $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - e^{i\frac{\pi}{2}}| \geq 1 \right\}$

i) $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \,\middle|\, \left| \frac{2iz + 4}{(1+i)z} \right|^2 \leq 3 \right\}$ j) $M = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = |z| \}$

k) $M = \{ z \in \mathbb{C} \mid |(2+i)(z-1)| \leq |1 - 2i| \}$ l) $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - e^{i\frac{\pi}{4}}| \geq 2 \right\}$

m) $M = \{ z \in \mathbb{C} \mid |(1+i)(z-1)| \leq |1 - i| \}$ n) $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z^2| + |z| = 0 \right\}$

Aufgabe 94

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $M \subset \mathbb{C}$ mit $r \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und beschreiben Sie diese verbal, oder skizzieren Sie sie in der Gaußschen Zahlenebene!

a) $M = \{ z \in \mathbb{C} \mid z = i + 2(1+i)t,\ t \in \mathbb{R} \}$ b) $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \,\middle|\, \left| 1 + \frac{1}{z} \right| \leq 1 \right\}$

c) $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\} \,\middle|\, \mathrm{Re}\left(\frac{z-1}{z+1} \right) \geq 1 \right\}$ d) $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{Re}\left(\frac{z+i}{i+1} \right) \leq \frac{1}{2} \right\}$

e) $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \,\middle|\, \mathrm{Re}\left(\frac{z+1}{z-1} \right) = r \right\}$ f) $M = \{ z \in \mathbb{C} \mid 2 = |z - 1| \}$

g) $M = \{ z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \leq 4 \}$ h) $M = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z + 1 - i| \leq 2 \}$

i) $M = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = |z| \}$ j) $M = \{ z \in \mathbb{C} \mid 1 > |z + 1 - 2i| \}$

k) $M = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}((1+2i)z) = 0 \}$ l) $M = \{ z \in \mathbb{C} \mid |4z + 3 - i| \leq 5 \}$

m) $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \,\middle|\, \mathrm{Re}\left(\frac{z+1}{z-1} \right) \geq 2 \right\}$

Aufgabe 95

Bestimmen Sie jeweils sämtliche Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichungen.

$a)\ -3\,\overline{z}+z-2iz=4i$ $\quad b)\ z^2-i\,\overline{z}=0$ $\quad c)\ 2z\overline{z}=3$

$d)\ \frac{5}{2}\,\overline{z}+3i\,\overline{z}+\frac{1}{2}z-2iz=7-5i$ $\quad e)\ |z|=z\cdot\overline{z}$ $\quad f)\ z^2+\overline{z}+z=1$

Aufgabe 96

Bestimmen Sie die Lösungsmenge in $\mathbb{C}$ für die Gleichung $z^2-2z+1-8i=0$ und geben Sie die Lösungen in der Form $z=x+iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an.

Hinweis: $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Aufgabe 97

Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen in $\mathbb{C}$ und geben Sie die Lösungen jeweils in den Formen $z=x+iy$ und $z=r\cdot e^{i\varphi}$ an ($x, y \in \mathbb{R}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$).

$a)\ z^2=4z-8$ $\quad b)\ z^2+\sqrt{3}\cdot z+3=0$ $\quad c)\ z^2-2\left(z-\frac{2}{3}\right)=0$

Aufgabe 98

Bestimmen Sie jeweils sämtliche Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der folgenden quadratischen Gleichungen.

$a)\ z^2+(1-2i)z-2i=0$ $\quad b)\ z^2-2iz+8=0$ $\quad c)\ z^2-z+iz-i=0$

$d)\ z^2(1+i)=2z$ $\quad e)\ iz^2+(2+i)z=i-1$ $\quad f)\ z^2-2z+5=0$

$g)\ z^2+(1+i)z+2-i=0$ $\quad h)\ z^2+6z+2i+9=0$ $\quad i)\ z^2-4z+5=0$

$j)\ z^2+(1+i)z-(6+2i)=0$ $\quad k)\ z^2+2iz-1+i=0$ $\quad l)\ z^2-3z+(3+i)=0$

$m)\ z^2-2iz+2z+2i=0$ $\quad n)\ z(z+6)=-13$

Aufgabe 99

a) Lösen Sie die quadratische Gleichung $z^2-2z+2=0$. Die beiden Lösungen seien z_1 und z_2.

b) Sind z_1+z_2 oder z_1-z_2 oder $z_1\cdot z_2$ reell?

Aufgabe 100

Sei $c \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ eine komplexe Zahl und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Wie viele verschiedene komplexe Lösungen $z \in \mathbb{C}$ besitzt die Gleichung $z^n=c$?

Aufgabe 101

a) Es sei w eine komplexe Zahl und $z_1=\sqrt{2}\,(1+i)$ eine Lösung der Gleichung $z^3=w$. Bestimmen Sie w und alle weiteren Lösungen der Gleichung.

b) Sei $w \in \mathbb{C}$ und sei $z_1=1+i$ eine Lösung der Gleichung $z^4-w=0$. Bestimmen Sie w und alle weiteren Lösungen der Gleichung.

c) Eine Lösung der Gleichung $z^4=-7+24i$ ist $z_0=2+i$. Geben Sie die weiteren Lösungen an.

Aufgabe 102

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^3 = -27$ und stellen Sie diese in der Form $z = x + iy$ dar.

b) Bestimmen Sie sämtliche Lösungen $z \in \mathbb{C}$ von $z^4 + 8(i\sqrt{3} - 1) = 0$. Geben Sie jede Lösung sowohl in Polarkoordinaten, als auch in der Form $z = x + iy$ mit reellen x und y an.

c) Bestimmen Sie alle Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $\bar{z}^2 = iz$ und skizzieren Sie diese in der Gaußschen Zahlenebene.

Aufgabe 103

Geben Sie alle komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichungen an und skizzieren Sie sie in der komplexen Zahlenebene.

$a)\ z^3 = 8i$ $\quad b)\ z^7 = i + 1$ $\quad c)\ z + 2\bar{z} = 5 + iz$

$d)\ z^4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\quad e)\ z^5 = 16\sqrt{2}(-1 + i)$ $\quad f)\ z^3 = 1 + i$

Aufgabe 104

Berechnen Sie alle komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichungen.

$a)\ z^4 + 2 - 2i = 0$ $\quad b)\ (z - 3i)^6 + 64 = 0$ $\quad c)\ (1 + i)z^3 - \sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi} = 0$

Aufgabe 105

a) Sei $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4$, $z \in \mathbb{C}$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3, a_4. Zeigen Sie: Ist z_0 eine Nullstelle des Polynoms p, dann ist $\bar{z}_0$ es auch.

b) Zeigen Sie, dass das Polynom $p(z) = z^4 - 4z^3 + 14z^2 - 4z + 13$ in $z_0 = i$ eine Nullstelle hat, und bestimmen Sie alle weiteren Nullstellen von p.

Aufgabe 106

Gegeben sei ein Polynom sechsten Grades $P(z)$ mit reellen Koeffizienten.

a) Das Polynom habe Nullstellen bei $2 - i$, $1 + 3i$ und $5 - 2i$. Geben Sie alle Nullstellen des Polynoms an und stellen Sie $P(z)$ mit komplexen Linearfaktoren dar.

b) Welche Konstellationen für Nullstellen (Anzahl reeller bzw. komplexer Nullstellen) sind für ein Polynom sechsten Grades mit reellen Koeffizienten möglich?

Aufgabe 107

a) Begründen Sie: Ist p ein Polynom mit reellen Koeffizienten und hat p nur komplexe Nullstellen (mit nicht verschwindenden Imaginärteilen), so ist der Grad von p gerade.

b) Bestimmen Sie alle Polynome 5. Grades mit reellen Koeffizienten, die in $2, 3i, 1 - i$ Nullstellen haben.

Aufgabe 108

a) Sei $p(z)$ ein Polynom mit der Eigenschaft, dass mit jeder Nullstelle z_k auch die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}_k$ eine Nullstelle von $p(z)$ ist. Hat $p(z)$ dann reelle Koeffizienten? (Begründung oder Gegenbeispiel.)

b) Gegeben sei das Polynom $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fünften Grades mit ausschließlich reellen Koeffizienten und den Nullstellen $z_1 = 1 - i$ beziehungsweise $z_2 = i$. Das Produkt aller fünf Nullstellen ist 1. Bestimmen Sie alle drei restlichen Nullstellen von p.

Aufgabe 109

Sei p ein Polynom 5. Grades mit reellen Koeffizienten.

a) Wie viele Nullstellen besitzt p höchstens in $\mathbb{C}$?

b) Wie viele reelle Nullstellen besitzt p mindestens?

c) Das Polynom p habe eine doppelte Nullstelle bei i. Wie viele verschiedene Nullstellen besitzt das Polynom dann in $\mathbb{C}$?

Aufgabe 110

Berechnen Sie alle komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichungen:

$a)\ (z^5 + i)(z + z^2 + 3) = 0$

$b)\ z^4 - 2z^2 + 17 = 0$

$c)\ 2z - iz^2 + z^3 = 0$

$d)\ \left(z^3 + \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)(z + i) = 0$

$e)\ z^3 - 3z^2 i - 3z + 2i = 0$

$f)\ z^3 - 5z^2 + 12z - 8 = 0$

Aufgabe 111

a) Zeigen Sie, dass durch $z_0 = 2i$ eine Nullstelle des Polynoms $z^3 + (-4 - i)z^2 + (5 + 5i)z - 6 - 6i = 0$ gegeben ist. Berechnen Sie alle weiteren Nullstellen.

b) Gegeben sei das Polynom $p(z) = z^3 - 5z^2 + 8z - 6$. Zeigen Sie, dass $z_0 = 1 + i$ und $\overline{z}_0$ Nullstellen dieses Polynoms sind. Bestimmen Sie die weitere Nullstelle.

Aufgabe 112

Finden Sie alle reellen und komplexen Nullstellen $z \in \mathbb{C}$ des reellen Polynoms.

$a)\ p(z) = 2z^4 - z^3 + 10z^2 - 4z + 8,$ wenn $p\left(\frac{1 + i\sqrt{15}}{4}\right) = 0$ gilt.

$b)\ p(z) = z^4 - 3z^3 + 5z^2 - 4z + 2,$ wenn $p\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right) = 0$ gilt.

Aufgabe 113

Zerlegen Sie die folgenden Polynome in Linearfaktoren.

a) $p(z) = z^5 + z^4 - 5z^3 + 10z^2 - 36z + 24$ mit $p(2i) = 0$.

b) $p(z) = z^5 + 2z^3 + 6z^2 - 63z + 54$ mit $p(3i) = 0$.

c) $p(z) = z^6 - z^4 + z^2 - 1$

Hinweis zu c): Führen Sie die Variablensubstitution $z^2 =: w$ aus.

Aufgabe 114

Zerlegen Sie die nachfolgenden Polynome mithilfe der gegebenen Nullstelle(n) in reelle Faktoren minimaler Ordnung.

a) $p(z) = z^6 - 2z^5 + 2z^4 - z^2 + 2z - 2$, $z_0 = 1 - i$.

b) $p(z) = z^6 - 4z^5 + 2z^4 + 8z^3 + z^2 - 36z + 36$, $z_0 = \sqrt{2} + i$, $z_1 = -\sqrt{2} - i$.

c) $p(z) = z^6 + 4z^5 + 8z^4 + 16z^3 + 32z^2 + 64z + 64$, $z_0 = 1 + \sqrt{3}i$, $z_1 = -1 - \sqrt{3}i$.

d) $p(z) = z^6 - 2z^5 - 3z^4 + 3z^3 - 10z^2 + 5z - 6$, $z_0 = i$.

Aufgabe 115

Für die folgenden Polynome ist jeweils eine Nullstelle z_0 bekannt. Ermitteln Sie alle weiteren Nullstellen.

a) $p(z) = z^3 - 4z^2 + (6+i)z - (3+i)$ mit $z_0 = 1 + i$.

b) $p(z) = z^3 - 2z^2 + iz + 3 + i$ mit $z_0 = 2 - i$.

c) $p(z) = (z^2 + 1)(5z^3 - 3z^2 + 5z - 3)$ mit $z_0 = i$.

d) $p(z) = z^7 + z^6 + 2iz + 2i$ mit $z_0 = -1$.

e) $p(z) = z^3 - 6z^2 + (12+i)z - (9+3i)$ mit $z_0 = 1 + i$.

f) $p(z) = z^6 - 3z^5 + 5z^4 - 6z^3 + 5z^2 - 3z + 1$ mit $z_0 = i$.

g) $p(z) = z^3 - 2z^2 + 4z - 8$ mit $z_0 = -2i$.

5 Abbildungen

5.1 Bild und Urbild

Definition 5.1 *Seien A und B beliebige Mengen.*
*Eine **Abbildung** f von A nach B ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in A$ genau ein Element $y = f(x) \in B$ zuordnet. Man nennt A den **Definitionsbereich** und B den **Wertebereich** der Abbildung f. Für Abbildungen sind folgende Schreibweisen üblich:*

- $f : A \to B$ *gelesen als „die Abbildung f von A nach B".*
- $f : A \to B,\ x \mapsto f(x)$ *gelesen als „die Abbildung f von A nach B, wobei jedem $x \in A$ der Wert $f(x) \in B$ zugeordnet wird".*
- $f : x \mapsto f(x)$, *wenn der Definitionsbereich und Wertebereich klar sind.*

Beispiel 56
An der Vorlesung Analysis für Ingenieure nimmt eine Gruppe von drei befreundeten Studenten teil, die der Einfachheit halber mit s_1, s_2 und s_3 bezeichnet werden sollen. Es werden zur Vorlesung drei verschiedene Tutorien t_1, t_2 und t_3 angeboten, wobei jedem Studenten freigestellt bleibt, welches Tutorium er besucht. Sei $S := \{s_1, s_2, s_3\}$ die Menge der drei befreundeten Studenten und $T := \{t_1, t_2, t_3\}$ die Menge der angebotenen Tutorien. Betrachten Sie jetzt die folgenden drei verschiedenen Zuordnungen aus der Menge S in die Menge T und entscheiden Sie, bei welcher Zuordnung es sich um eine Abbildung handelt.

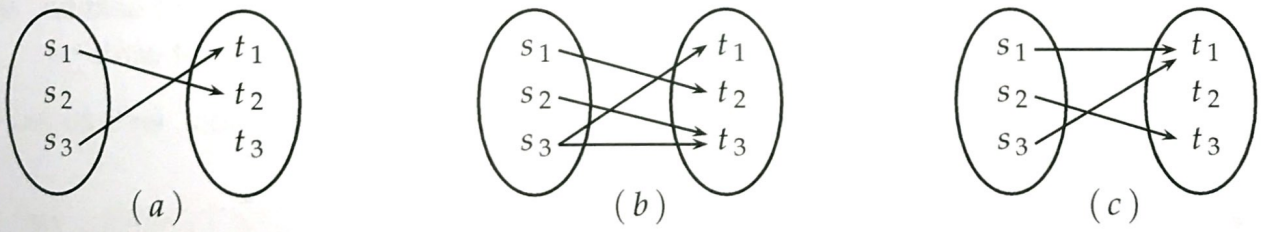
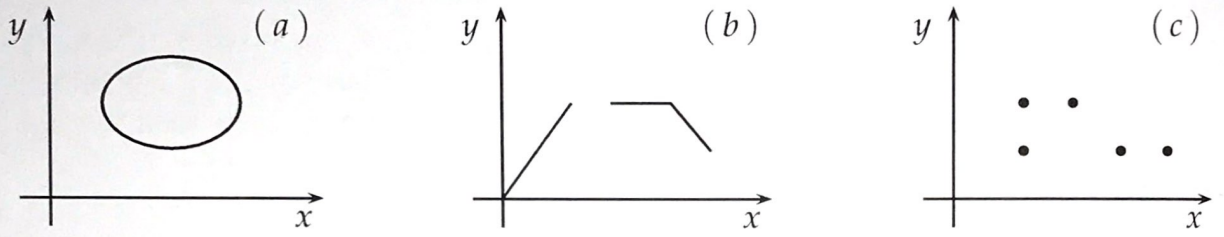


Abbildung 5.1 Geometrische Veranschaulichung einer Abbildung.

- Bei der Zuordnung (a) handelt es sich nicht um eine Abbildung, weil dem Element $s_2 \in S$ kein Element aus der Menge T zugeordnet ist.
- Bei der Zuordnung (b) handelt es sich nicht um eine Abbildung, weil dem Element $s_3 \in S$ zwei Elemente $t_1, t_3 \in T$ zugeordnet sind.
- Bei der Zuordnung (c) handelt es sich um eine Abbildung, weil jedem Element der Menge S genau ein Element der Menge T zugeordnet ist.

Bemerkung:
Eine Abbildung heißt auch **Funktion**, wenn es sich bei dem Definitions- und Wertebereich um Zahlenmengen handelt.

Beispiel 57
Betrachten Sie die folgenden Graphen in $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und entscheiden Sie, bei welchen Graphen es sich um eine Funktion $f : \mathbb{R} \supset A \to B \subset \mathbb{R}$ handelt.



Geometrisch gesehen stellt der Graph genau dann eine Funktion dar, wenn jede zur y - Achse gezogene parallele Gerade den Graphen in höchstens einem Punkt schneidet. Denn dann gibt es zu jedem $x \in A$ genau ein $y \in B$.

- Bei dem Graphen (a) handelt es sich nicht um eine Funktion, weil es parallele Geraden zur y - Achse gibt, die den Graphen in zwei Punkten schneiden.
- Bei dem Graphen (b) handelt es sich um eine Funktion, weil es keine parallele Gerade zur y - Achse gibt, die den Graphen in mehr als einem Punkt schneidet.
- Bei dem Graphen (c) handelt es sich nicht um eine Funktion, weil es eine parallele Gerade zur y - Achse gibt, die den Graphen in zwei Punkten schneiden.

Beispiel 58
- Bei der Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x$ handelt es sich um eine Funktion, weil jedem $x \in \mathbb{R}$ genau ein Wert $y := f(x) = 2x \in \mathbb{R}$ zugeordnet wird.
- Bei der Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ n \mapsto \frac{n}{n^2+n+1}$ handelt es sich um eine Funktion, weil jedem $n \in \mathbb{N}$ genau ein Wert $a_n := a(n) = \frac{n}{n^2+n+1} \in \mathbb{R}$ zugeordnet wird.
- Bei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \pm x$ handelt es sich nicht um eine Funktion, weil zu jedem $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zwei Werte $y := g(x) = \pm x \in \mathbb{R}$ zugeordnet sind.
- Bei der Abbildung $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1$ handelt es sich um eine Funktion, weil zu jedem $x \in \mathbb{R}$ genau ein Wert $y := h(x) = 1 \in \mathbb{R}$ zugeordnet wird.
- Bei $k : \{1\} \to \mathbb{R}$ handelt es sich nicht um eine Funktion, weil für $x = 1$ unendlich viele Werte $y := k(1) \in \mathbb{R}$ zugeordnet sind.

Betrachten Sei jetzt die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin x$. Der Wertebereich dieser Funktion ist die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, obwohl diese Funktion tatsächlich nur Werte aus dem Intervall $y \in [-1, 1] \subset \mathbb{R}$ annehmen kann. Für diesen Sachverhalt schreibt man kurz $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ und nennt dieses das Bild der Funktion f. Das Bild einer Funktion muss also nicht notwendiger Weise der gesamte Wertebereich sein!

Definition 5.2 *Seien A und B beliebige Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung. Dann heißt $f(A) := \{ f(x) \mid x \in A \} \subseteq B$ der tatsächlich angenommenen Werte das* ***Bild*** *von f.*

Beispiel 59

- Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ hat das Bild $f(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$.
- Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos x + 2$ hat das Bild $g(\mathbb{R}) = [1, 3] \subset \mathbb{R}$.
- Die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3$ hat das Bild $h(\mathbb{R}) = \{3\} \subset \mathbb{R}$.

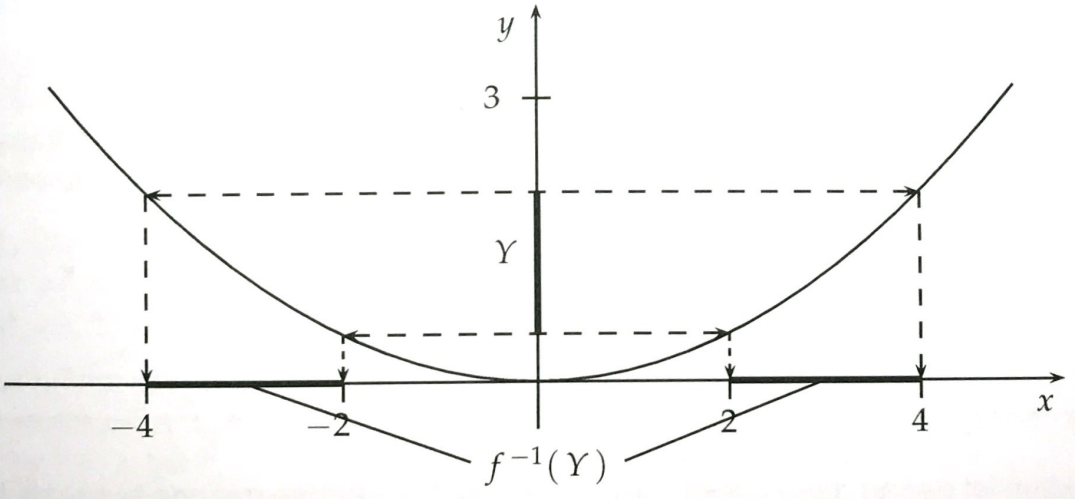
Definition 5.3 *Sei $f : A \to B$ eine beliebige Abbildung und $Y \subset B$. Dann heißt die Menge*

$$f^{-1}(Y) := \{ x \in A \mid f(x) \in Y \}$$

Urbildmenge *beziehungsweise das* ***Urbild*** *von Y.*

Beispiel 60

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto \frac{1}{8} x^2$. Bestimmen Sie das Urbild von f für die Teilmenge $Y = \left[\frac{1}{2}, 2 \right] \subset \mathbb{R}_0^+$ des Wertebereichs.



Lösung:

Aus der grafischen Darstellung der Parabel lässt sich wegen $f(\pm 2) = \frac{1}{2}$ und $f(\pm 4) = 2$ die Urbildmenge sofort ablesen. Sie lautet

$$f^{-1}(Y) := \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; f(x) \in \left[\frac{1}{2}, 2 \right] \right\} = [-4, -2] \cup [2, 4].$$

5.2 Inverse Abbildung

Betrachten Sie jetzt die Funktion $f : [-2,2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$. Dann ist offensichtlich $f([-2,2]) = [0,4]$ das Bild von f. Zu dem jedem $y \in]0,4]$ existieren zwei Werte $x = \pm\sqrt{y}$ aus dem Definitionsbereich $[-2,2]$.

Dagegen hat die Funktion $g : [-2,2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$ das Bild $g([-2,2]) = [-8,8]$ und zu jedem $y \in [-8,8]$ existiert genau ein Wert $x = \sqrt[3]{y}$ aus dem Definitionsbereich $[-2,2]$. Das legt die folgende Definition nahe.

Definition 5.4 *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Die Abbildung heißt **injektiv**, wenn für alle $x_1, x_2 \in A$ mit $x_1 \neq x_2$ auch $f(x_1) \neq f(x_2)$ gilt.*

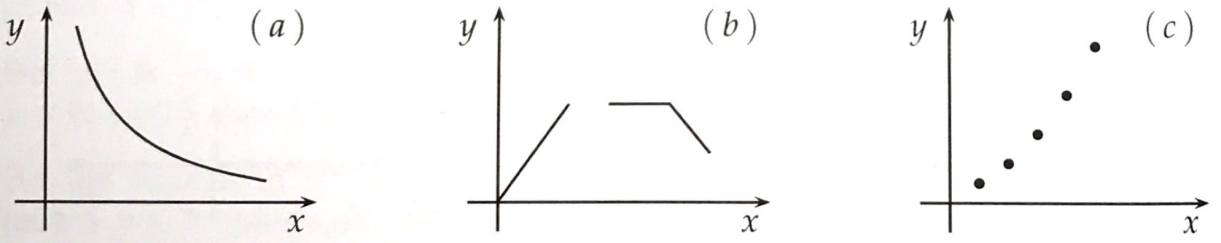
- *Verschiedene Argumente liefern also verschiedene Funktionswerte.*
- *Aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt immer $x_1 = x_2$.*

Beispiel 61

- Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ ist nicht injektiv, weil zum Beispiel für die beiden Werte $x_1 = -1, x_2 = 1$ aus dem Definitionsbereich $f(-1) = f(1) = 1$ gilt.
- Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos x$ ist nicht injektiv, weil zum Beispiel für alle Werte $x_k = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ aus dem Definitionsbereich $f(x_k) = \cos(2k\pi) = 1$ gilt.
- Die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$ ist injektiv, weil aus $f(x_1) = f(x_2)$ immer $x_1 = x_2$ für alle Werte $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ folgt.

Beispiel 62

Betrachten Sie die folgenden Graphen der Funktionen in $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und entscheiden Sie, bei welcher Funktion es sich um eine injektive Funktion $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ handelt.



Eine Funktion ist genau dann injektiv, wenn jede zur x - Achse gezogene parallele Gerade den Graphen in höchstens einem Punkt schneidet.

- Bei dem Graphen (a) handelt es sich um eine injektive Funktion, weil jede parallele Gerade zur x - Achse den Graphen in höchstens einem Punkt schneidet.
- Bei dem Graphen (b) handelt es sich nicht um eine injektive Funktion, weil es parallele Geraden zur x - Achse gibt, die den Graphen in mehr als einem Punkt schneiden.

- Bei dem Graphen (c) handelt es sich um eine injektive Funktion, weil jede parallele Gerade zur x - Achse den Graphen in höchstens einem Punkt schneidet.

Häufig kommen Abbildungen $f : A \to B$ vor, bei denen das Bild $f(A)$ oft nur eine echte Teilmenge des Wertebereichs B ist. Die Funktion $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ beispielsweise hat das Bild $f([-2, 2]) = [0, 4] \subset \mathbb{R}$. Das hieße, nicht zu jedem $y \in \mathbb{R}$ gibt es ein $x \in [-2, 2]$! Sie werden zum Beispiel zu $y = 10$ kein $x \in [-2, 2]$ finden.

Definition 5.5 *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Die Abbildung heißt* ***surjektiv****, wenn $f(A) = B$ gilt.*

✍ *Das Bild der Abbildung f ist also der gesamte Wertebereich. Das heißt: Zu jedem $y \in B$ gibt es mindestens ein $x \in A$.*

Beispiel 63

- Die Funktion $f : [-2, 2] \to [0, 4]$, $x \mapsto x^2$ ist surjektiv, weil zu jedem $y \in [0, 4]$ mindestens ein $x \in [-2, 2]$ existiert.
- Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$ ist nicht surjektiv, weil zum Beispiel zu $y = 2$ kein $x \in \mathbb{R}$ existiert.
- Die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to [0, \infty)$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ ist nicht surjektiv, weil zu $y = 0$ kein $x \in \mathbb{R}^+$ existiert.

Von besonderer Bedeutung sind Abbildungen, die sowohl injektiv als auch surjektiv sind. Daher auch die folgende

Definition 5.6 *Eine Abbildung $f : A \to B$ die injektiv und surjektiv ist, heißt* ***bijektive*** *Abbildung.*

Betrachten Sie zum Beispiel die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$. Aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt sofort $x_1 = x_2$, womit f injektiv ist. Die Funktion f ist aber nicht surjektiv, weil zu $y = 0$ kein $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert. Also ist f auch nicht bijektiv.

Es stellt sich jetzt die entscheidende Frage, wann eine Abbildung $f : A \to B$ umkehrbar ist. Oder anders formuliert: Wann gibt es eine Umkehrabbildung $f^{-1} : B \to A$ derart, dass $f^{-1}(y) = x$ gilt?

Beispiel 64

Gegeben sei die Funktion $f : [-2, 2] \to [0, 4]$, $x \mapsto x^2$. Dann wird $x = 2$ auf $y = 4$ abgebildet. Umgekehrt existiert zu $y = 4$ kein eindeutiger Wert $x \in [-2, 2]$. Das heißt: $f^{-1} : [0, 4] \to [-2, 2]$ ist nach der Definition 5.1 keine Abbildung mehr, weil jedem $y \in]0, 4]$ zwei Werte aus $[-2, 2]$ zugeordnet werden.

Definition 5.7 *Sei $f : A \to B$ eine injektive Abbildung. Dann gibt es zu jedem $y \in f(A) \subseteq B$ genau ein $x \in A$ mit $y = f(x)$ und man kann auf dem Bild $f(A)$ eine* ***Umkehrabbildung*** *oder auch* ***Inverse*** *$f^{-1} : B \supseteq f(A) \to A$ definieren, die durch*

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{oder äquivalent dazu} \quad f(x) = y$$

charakterisiert ist.

Beispiel 65
Gegeben sei die Funktion $f : [0,2] \to [0,4]$, $x \mapsto x^2$. Diese Funktion ist injektiv und wegen $f([0,2]) = [0,4]$ sogar surjektiv. Daher existiert zu dieser Abbildung die Inverse beziehungsweise Umkehrabbildung $f^{-1} : [0,4] \to [0,2]$, $y \mapsto \sqrt{y}$.

Bemerkung:
Rechnerisch erhält man die Inverse, unter der Voraussetzung dass diese existiert, indem man einfach die Gleichung $y = f(x)$ nach x auflöst.

Beispiel 66
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x + 5$. Diese Funktion ist bijektiv und daher existiert die inverse Funktion f^{-1}. Auflösen der Gleichung $y = f(x) = 2x + 5$ nach der Variable x ergibt $x = \frac{y-5}{2}$ und daher ist die Inverse $f^{-1}(y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \frac{y-5}{2}$.

5.3 Komposition von Abbildungen

In diesem Abschnitt geht es um die Hintereinanderschaltung von mehreren Abbildungen. Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ zwei beliebige Abbildungen. Man kann dann zuerst die Abbildung f von A nach B und danach die Abbildung g von B nach C ausführen.

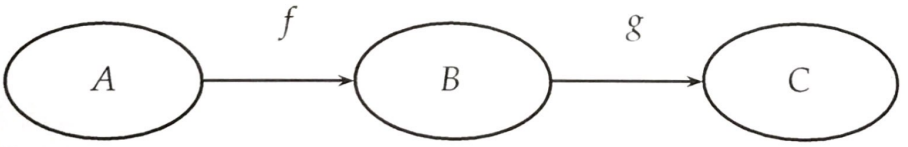
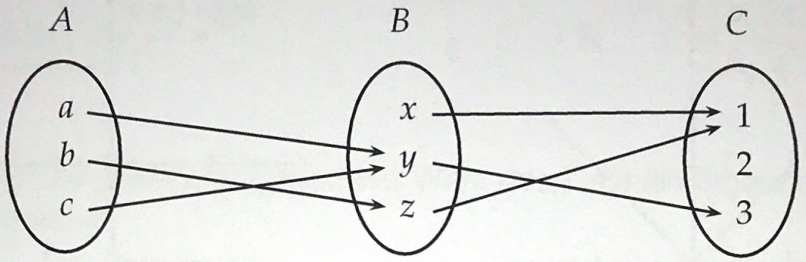


Abbildung 5.2 Hintereinanderschaltung von zwei Abbildungen.

Definition 5.8 *Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ zwei beliebige Abbildungen. Dann heißt die Abbildung $g \circ f : A \to C$, $x \mapsto g(f(x))$ die* ***Komposition*** *oder auch* ***Hintereinanderschaltung*** *von f und g. Gelesen wird das als „g Kringel f“.*

Beispiel 67
Es seien die Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ durch das folgende Diagramm definiert.



Berechnen Sie mithilfe der Definition die Komposition $g \circ f : A \to C$.

Lösung:
Mit Definition 5.8 erhält man die Bilder

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(y) = 3, \qquad (g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(z) = 1 \quad \text{und}$$
$$(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(y) = 3.$$

Beispiel 68
Gegeben seien die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^x$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos x$. Berechnen Sie die beiden Kompositionen $(g \circ f)(x)$ und $(f \circ g)(x)$.

Lösung:
Nach Definition 5.8 gilt

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(e^x) = \cos(e^x) \quad \text{und}$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\cos x) = e^{\cos x}.$$

5.4 Betrags - und Signumfunktion

Definition 5.9 *Die Funktionen*

$$|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x| := \begin{cases} x & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ -x & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

$$\operatorname{sign} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \operatorname{sign}(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ -1 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

heißen ***Betragsfunktion*** *beziehungsweise* ***Signumfunktion*** *und werden gelesen als „Betrag von x“ beziehungsweise „Signum von x“.*

Die Signumfunktion wird oft auch als **Vorzeichenfunktion** bezeichnet. In der folgenden Abbildung sind die Graphen der Betrags- und Signumfunktion dargestellt.

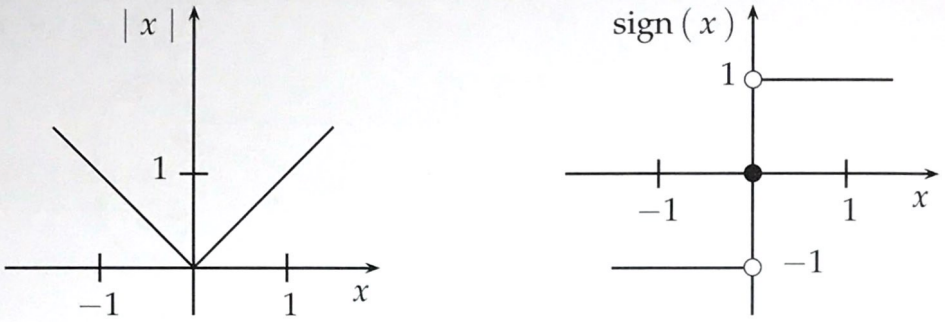


Abbildung 5.3 Betrags- und Signumfunktion.

5.5 Übungsaufgaben

Aufgabe 116

Skizzieren Sie für den jeweils größtmöglichen Definitionsbereich die Bilder der Funktionen

$$f(x), \quad [f(x)]^2, \quad f(x^2), \quad \frac{1}{f(x)} \quad \text{und} \quad f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{für:}$$

$$a)\ f(x) = \frac{1}{x} \qquad b)\ f(x) = \sin x$$

Aufgabe 117

Durch welche der folgenden Zuordnungsvorschriften sind Funktionen $y = f(x)$ mit $f: D \to \mathbb{R}$ definiert? Fertigen Sie jeweils eine Skizze an!

$a)\ y^2 = x \quad , D = \mathbb{R}^+.$

$b)\ \arctan y = e^{-|x|} \quad , D = \mathbb{R}.$

$$c)\ y = \begin{cases} 2 & \text{für} \quad x \neq 0 \\ x & \text{für} \quad x^2 = x \end{cases} \quad , D = \mathbb{R}.$$

$$d)\ y = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für} \quad x > 0 \\ 0 & \text{für} \quad x \leq 0 \end{cases} \quad , D = \mathbb{R}.$$

$$e)\ y = \begin{cases} x^2 + 1{,}04 & \text{für} \quad x \leq 1{,}6 \\ 3x - 1{,}2 & \text{für} \quad x \geq 1{,}6 \end{cases} \quad , D = \mathbb{R}.$$

$f)\ \tan y = x \quad , D = \mathbb{R}.$

$$g)\ |y| = \frac{\ln x}{x^2 + 1} \quad , D = [1, \infty[.$$

Aufgabe 118

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $b > 0$. Geben Sie für die Funktion

$$f: D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{b - |a - 2x|}}$$

den größtmöglichen Definitionsbereich D in Intervallschreibweise an.

Aufgabe 119

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ der folgenden Funktionen, und untersuchen Sie sie auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2. \qquad g : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{4-x}} - 7.$$

Aufgabe 120

Untersuchen Sie für die jeweils angegebene Wahl des Definitionsbereichs D und Wertebereichs W der Funktion

$$f : D \to W \qquad \text{mit} \qquad f(x) = x^2 - 2x + 1$$

auf Injektivität und Surjektivität und kreuzen Sie die jeweils richtige Antwort an.

D	W	injektiv		surjektiv	
		ja	nein	ja	nein
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	○	○	○	○
$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$	$\{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$	○	○	○	○
$[-1, 1]$	$[0, 4]$	○	○	○	○
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$	$\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$	○	○	○	○

Aufgabe 121

Entscheiden Sie über Injektivität, Surjektivität beziehungsweise Bijektivität der Funktion

$$g : A \to B \qquad \text{mit} \qquad x \mapsto \exp(-x^2),$$

wenn folgende Mengen A und B vorgegeben sind. Kreuzen Sie die jeweils richtige Antwort in der Tabelle an. Bestimmen Sie weiterhin die Umkehrfunktion für die bijektive Abbildung $g : A \to B$.

A	B	injektiv	surjektiv	bijektiv
$[1, \infty[$	$\mathbb{R}$	○	○	○
$]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$	$]0, \frac{1}{\sqrt{e}}]$	○	○	○
$]-\infty, \frac{1}{2}[$	$]0, 1]$	○	○	○

Aufgabe 122

Ist die Abbildung f injektiv und/oder surjektiv?

$$f : \mathbb{Z} \to \{q \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq q \leq 1\} \qquad \text{mit} \qquad f(a) = \frac{|a|}{2a^2 + 2}.$$

Aufgabe 123

a) Betrachten Sie die Funktion $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ mit $f(x) := \sin(x)$. Wie kann man die Mengen A und B wählen, so dass die Funktion $f(x)$

i) injektiv, ii) surjektiv, oder iii) bijektiv ist?

b) Beweisen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x + 2$ bijektiv ist.

Aufgabe 124

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ der folgenden Funktion und untersuchen Sie sie auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\pi}{2} \sin(x).$$

b) Welche Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ kann man maximal als Definitions- und Wertebereich wählen, damit $f : A \to A, \quad x \mapsto \frac{\pi}{2} \sin(x)$ eine bijektive Funktion ist?

Aufgabe 125

Sind die folgenden Zuordnungen injektive, surjektive oder gar keine Funktionen? Begründen Sie Ihre Antworten anhand einer Skizze!

$a)$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{für} \quad x \geq 1, \\ 2 & \text{für} \quad x < 1. \end{cases}$ $b)$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -x^5.$

$c)$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} e^x & \text{für} \quad x \geq 0, \\ x^3 & \text{für} \quad x \leq 1. \end{cases}$ $d)$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \arctan(x).$

$e)$ $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [0, 1], \quad f(x) = \cos(x).$

Aufgabe 126

a) Gegeben seien die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto 1 + x^2 \qquad \text{und} \qquad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto 1 + (\sin x \cdot \cos x)^2.$$

Gibt es eine Funktion g mit $h = f \circ g$? Falls ja, geben Sie eine solche an.

b) Gegeben seien die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto 1 + x^2 \qquad \text{und} \qquad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto 1 + x^3.$$

Gibt es eine Funktion g mit $h = g \circ f$? Falls ja, geben Sie eine solche an.

Aufgabe 127

Welche der folgenden Zuordnungsvorschriften definieren eine Funktion $y = f(x)$ mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? Welche Funktionen sind injektiv? Berechnen Sie falls möglich die Inverse.

$a)$ $y = \begin{cases} -1 & \text{für} \quad x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ \sin x & \text{für} \quad x > -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$ $b)$ $y = \begin{cases} -x^2 & \text{für} \quad x \geq 0, \\ x & \text{für} \quad x > 0. \end{cases}$ $c)$ $\cos y = x$

Aufgabe 128

Sei H die Menge aller lebenden Menschen, sowie W die Menge aller lebenden Menschen weiblichen Geschlechts und $M := H \setminus W$ die Menge aller lebenden Menschen männlichen Geschlechts. Betrachten Sie die folgenden Abbildungen:

$$m : H \to W \text{ mit } m(x) \text{ ist die leibliche Mutter von } x.$$

$$f : H \to M \text{ mit } f(x) \text{ ist der leiblicher Vater von } x.$$

a) Beschreiben Sie in Worten die zusammengesetzten Abbildungen (Kompositionen)

$$m^2 := m \circ m, \qquad g := f \circ m, \qquad h := m \circ f, \qquad \text{gilt } g = h?$$

b) Welche der Abbildungen m, f, m^2, g, h sind injektiv, surjektiv oder bijektiv?

c) Welche Menge wird durch $m^{-1}(W)$ beschrieben?

Aufgabe 129

Es seien X, Y Mengen. $f : X \to Y$ eine Funktion und $A \subseteq X$. Begründen Sie:

a) Ist f injektiv, so ist $f^{-1}(f(A)) = A$.

b) Im Allgemeinen gilt $f^{-1}(f(A)) = A$ nicht.

Aufgabe 130

a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3 + 4x$. Berechnen Sie, falls möglich, die Umkehrabbildung f^{-1} mit passendem Definitions- und Wertebereich und das Urbild $f^{-1}([-5, 5])$.

b) Gegeben sei die Funktion $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - 3$. Berechnen Sie, falls möglich, die Umkehrabbildung f^{-1} mit passendem Definitions- und Wertebereich und das Urbild $f^{-1}([1, 5])$.

Aufgabe 131

a) Für welche $y \in \mathbb{R}$ ist die Gleichung $x^2 + 2x = y$ lösbar? Für welche y ist sie eindeutig lösbar?

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x$. Bestimmen Sie $f(\mathbb{R})$. Ist f injektiv?

c) Hat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := 7x + 5$ eine Umkehrfunktion? Falls ja, welche?

d) Welche der Funktionen sind injektiv? Bestimmen Sie, falls möglich, die Umkehrfunktion inklusive ihres maximalen Definitionsbereichs.

$$g : [-1, 5[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 \qquad h : [3, 8] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (x-3)^2$$

Aufgabe 132

Sei $f : D \to W$ gegeben durch:

$$a)\ x \mapsto \sqrt{x} \qquad b)\ x \mapsto \sqrt{5 - x^2} \qquad c)\ x \mapsto \frac{x^2 + 1}{(x-1)(x-5)(x+2)}$$

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ und minimalen Wertebereich $W \subset \mathbb{R}$ der jeweiligen Abbildung. Welche der Abbildungen sind injektiv? Geben Sie falls möglich die Umkehrabbildung an.

Aufgabe 133

Sind die folgenden Funktionen injektiv? Falls ja, bestimmen Sie die Umkehrfunktion einschließlich ihres maximalen Definitionsbereichs!

$$a)\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3 + 5 \qquad b)\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -5x^2 - 9 \qquad c)\ h : [2, \infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 + 6x + 19$$

$$d)\ k :]1, \infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$$

Aufgabe 134

Beschreiben Sie die folgenden Mengen als Vereinigung von Intervallen. Skizzieren Sie sie auf dem Zahlenstrahl.

a) $f^{-1}(]0, 1[)$ mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - 4$.

b) $f([-\frac{\pi}{2}, 0]) \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - \frac{1}{4} \geq 0\}$ mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos x$.

c) $f^{-1}(]1, 2[) \cap f([1, 2])$ mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 3x - 3$.

Aufgabe 135

Bestimmen Sie folgende Urbilder der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$. Beachten Sie dabei, dass f^{-1} im Allgemeinen keine Funktion ist.

a) $f^{-1}([-9, 0])$ mit $f(x) = 3x^2 - 12$ und $D = \mathbb{R}$.

b) $f^{-1}([0, 1])$ mit $f(x) = \tan x$, einmal mit $D =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ und dann mit $D =]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\setminus \{\frac{\pi}{2}\}$.

c) $f^{-1}([2, 5])$ mit $f(x) = x^2 + 1$ und $D = \mathbb{R}$.

d) $f^{-1}(\{1\})$ mit $f(x) = \sin x$ und $D = \mathbb{R}$.

Aufgabe 136

Ordnen Sie jeder der fünf Mengen

$$\mathbb{R},\ \mathbb{N}_0,\ ]-1, 0],\ \{\ \}\ \text{und}\ \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ ist keine ganze Zahl}\}$$

genau eine der Variablen A, B, C, D und E zu, so dass gilt:

$$A \setminus (B \cup f^{-1}(C \cap D)) = E \qquad \text{mit} \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(\pi x).$$

Aufgabe 137

Beschreiben Sie die folgenden Mengen als Vereinigung und / oder Durchschnitt von Intervallen. Skizzieren Sie sie auf dem Zahlenstrahl.

a) $f^{-1}([-1,1]\setminus\{0\}) \cap]0,2\pi]$ mit $f(x) := \sin x$.

b) $f^{-1}(]2,5[)$ mit $f(x) := |x|$.

c) $f([-2,2]) \cup]0,10]$ mit $f(x) := x^2$.

d) $f^{-1}(]0,\infty[)$ mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2 - x$.

6 Anhang

6.1 Etwas Aussagenlogik

In der Mathematik versteht man unter einer **Aussage** ein sprachliches Gebilde, für das es sinnvoll ist zu fragen, ob sie wahr (W) oder falsch (F) ist. Dabei bezeichnet W beziehungsweise F den **Wahrheitswert** der Aussage. Betrachten Sie die Beispiele:

Aussage	Wahrheitswert	Verwendete Sprache
Das Jahr 2020 ist ein Schaltjahr.	wahr	Umgangssprache
$2^4 = 16$	wahr	Mathematische Formelsprache
Die Zahl 2 teilt die Zahl 9.	falsch	Kombination beider
$2H_2 + O_2 \longrightarrow 2H_2O$	wahr	Chemische Formelsprache
Jede gerade Zahl größer 2 ist die Summe zweier Primzahlen.	unbekannt	

Keine Aussagen dagegen sind beispielsweise die sprachlichen Gebilde:

„ Heute haben wir schönes Wetter. "

„ Lesen Sie dieses Buch durch! "

Sind A und B zwei beliebige Aussagen, dann lassen sich daraus durch Aussagenverbinder den sogenannten **Junktoren** neue Aussagen zusammensetzen. Die wichtigsten Junktoren und deren Bedeutung sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

Junktor	umgangssprachlich	symbolisch
Negation	nicht A	$\neg A$
Konjunktion	A und B	$A \wedge B$
Adjunktion	A oder B	$A \vee B$
Materiale Implikation	wenn A, dann B	$A \Rightarrow B$
Materiale Äquivalenz	A genau dann, wenn B	$A \Leftrightarrow B$

Die Wahrheitswerte der so zusammengesetzten Aussagen sind festgelegt und der folgenden **Wahrheitstafel** zu entnehmen.

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	F	W	W	W	W
W	F	F	F	W	F	F
F	W	W	F	W	W	F
F	F	W	F	F	W	W

Es wird hier noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen, dass diese Tabelle eine Festlegung (Definition) der Bedeutung für die einzelnen Junktoren ist. Für diese Festlegung spricht einzig, dass sie sich als praktisch herausgestellt hat.

Bemerkung:

1) Das Wort **oder** wird im allgemeinen auf zwei Arten benutzt. Manchmal beinhaltet es A oder B oder auch beide, das heißt mindestens eine der beiden Alternativen tritt ein. Manchmal beinhaltet es A oder B aber nicht beide, das heißt **oder** im ausschließenden Sinn. Hier wird **oder** nur im nicht ausschließenden Sinn benutzt.

2) Die Wahrheitstafel der materialen Implikation ist vielleicht auf den ersten Blick nicht einzusehen. Wie ist etwa zu verstehen, dass aus etwas Falschem etwas Falsches folgt wahr sein soll (vierte Zeile in $A \Rightarrow B$)?

   Um die Wahrheitstafel der materialen Implikation einzusehen, betrachten Sie die beiden Aussagen:

   A: Ich werfe einen Euro in den Getränkeautomaten.

   B: Ich erhalte ein Getränk.

   Vereinbart man nun der Aussage $A \Rightarrow B$ den Wahrheitswert W zuzuordnen falls man zufrieden ist und den Wahrheitswert F zuzuordnen falls man unzufrieden ist, dann erhält man die obige Festlegung.

Im Weiteren soll nur noch auf die materiale Implikation $\Rightarrow$ und materiale Äquivalenz $\Leftrightarrow$ näher eingegangen werden, weil sie für die Beweisführung (Kapitel 2) eine wichtige Rolle spielen. Für die materiale Implikation kurz auch nur Implikation genannt, sind die folgenden Sprechweisen üblich:

(1) Wenn A, dann B.
(2) Aus A folgt B.
(3) A ist hinreichend für B.
(4) B ist notwendig für A.

Ebenso sind für die materiale Äquivalenz kurz auch nur Äquivalenz genannt, die folgenden Sprechweisen üblich:

(1) A genau dann, wenn B.
(2) A ist äquivalent zu B.
(3) A gilt genau dann, wenn B gilt.
(4) A ist hinreichend und notwendig für B.

Definition 6.1 *Eine Aussageform heißt* ***allgemeingültig*** *oder* ***Tautologie****, wenn sie bei jeder Belegung zu einer Aussage mit dem Wahrheitswert W wird.*

Beispiel 69
Zeigen Sie, dass die Aussageform $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ eine Tautologie ist.

Lösung:
Mittels der Wahrheitstafel gilt:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
W	W	F	F	W	W	W
W	F	F	W	F	F	W
F	W	W	F	W	W	W
F	F	W	W	W	W	W

■

Die Anwendung findet die Tautologie $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ in allen Sätzen, die Aussagen der Form „aus A folgt B“ enthalten. Beispielsweise gilt (vgl. Satz 2.5 Band 2)

$$\left(\sum_{k=c}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=c}^{\infty} a_k \text{ divergent}\right).$$

Beispiel 70
Zeigen Sie, dass die Aussageform $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)\big)$ $(*)$ eine Tautologie ist.

Lösung:
Mittels der Wahrheitstafel gilt:

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	$A \Leftrightarrow B$	$(*)$
W	W	W	W	W	W	W
W	F	F	W	F	F	W
F	W	W	F	F	F	W
F	F	W	W	W	W	W

■

Um die Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ zu beweisen, muss aus der Aussage A die Aussage B folgen und umgekehrt aus der Aussage B wieder die Aussage A. Diese Tautologie wird in Beweisen des öfteren benutzt werden.

6.2 Beweis der vollständigen Induktion

In Abschnitt 2.3 wurde die Beweismethode der vollständigen Induktion vorgestellt, ohne aber den Wahrheitsgehalt dieser Beweismethode zu beweisen. Es hieß dort:

> Es sei $A(n)$ eine Aussage, welche von natürlichen Zahlen n abhängt. Zum Beweis einer Behauptung: „ Für alle natürlichen Zahlen n gilt $A(n)$ " ...

Satz 6.1 *$A(n)$ sei eine Aussageform, die durch Belegung mit beliebigen Elementen aus dem Zahlenabschnitt $\mathbb{Z}_c$ jeweils zu einer Aussage wird. Dann gilt:*

$$\Big(A(c) \wedge \bigwedge_{n\in\mathbb{Z}_c} [A(n) \Rightarrow A(n+1)]\Big) \Rightarrow \bigwedge_{n\in\mathbb{Z}_c} A(n).$$

Bemerkung:

Das Zeichen $\bigwedge_{n\in\mathbb{Z}_c}$ bedeutet dabei „ für alle $n \in \mathbb{Z}_c$ " und korrespondiert mit $\forall\, n \in \mathbb{Z}_c$.

Beweis:

Es wird angenommen, es gibt Zahlen $n \in \mathbb{Z}_c$, für die die Aussage $A(n)$ nicht gilt. Sei also $K := \{n \mid n \in \mathbb{Z}_c, \neg A(n)\}$ die Menge aller Zahlen $n \in \mathbb{Z}_c$ für die die Aussage $A(n)$ nicht gilt. Dann ist zu zeigen, dass $K = \{\ \}$ ist und somit $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}_c$ gilt.

Der Beweis von $K = \{\ \}$ erfolgt hier indirekt.

- Wegen $K \subset \mathbb{Z}_c$ gibt es eine kleinste Zahl $n_0 \in K$, für die die Aussage $A(n_0)$ nicht gilt. Nach Voraussetzung gilt die Aussage $A(c)$ und damit ist sicher, dass $c \notin K$ ist. Dann muss $n_0 > c$ sein, woraus $n_0 - 1 \geq c$ folgt.
- Wegen $n_0 - 1 \notin K$ gilt also die Aussage $A(n_0 - 1)$. Dann folgt aus der Voraussetzung $A(n_0 - 1) \Rightarrow A(n_0)$, dass auch die Aussage $A(n_0)$ gilt und damit der Widerspruch $n_0 \notin K$. Also existiert keine kleinste Zahl $n_0 \in K$, für die die Aussage $A(n_0)$ nicht gilt, womit $K = \{\ \}$ bewiesen ist.

■

6.3 Lösungsformeln für Gleichungen vom Grad 3 oder 4

In Abschnitt 4.7 über Polynome im Komplexen, wurden bereits die Lösungsverfahren für spezielle Typen von Gleichungen dritten und vierten Grades besprochen. Liegt allerdings keiner dieser speziellen Typen vor, dann können die in diesem Abschnitt hergeleiteten Lösungsformeln, die jedoch mit einem relativ hohen Rechenaufwand verbunden sind, benutzt werden.

1) Allgemeine Gleichung 3 - ten Grades

Gesucht sind die Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der allgemeinen Gleichung dritten Grades

$$z^3 + a z^2 + b z + c = 0 \quad \text{für beliebige} \quad a, b, c \in \mathbb{C}. \qquad (1)$$

Im ersten Schritt wird mithilfe der Substitution $z := w + \lambda$ die Gleichung so reduziert, dass das quadratische Glied in der Gleichung verschwindet.

$$\begin{aligned} 0 &= (w+\lambda)^3 + a(w+\lambda)^2 + b(w+\lambda) + c \\ &= [w^3 + 3\lambda w^2 + 3\lambda^2 w + \lambda^3] + [a w^2 + 2a\lambda w + a\lambda^2] + [b w + b\lambda] + c \\ &= w^3 + (3\lambda + a) w^2 + \underbrace{(3\lambda^2 + 2a\lambda + b)}_{=:p} w + \underbrace{\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c}_{=:q} \end{aligned}$$

Der quadratische Term $(3\lambda + a) w^2$ entfällt für $\lambda = -\frac{a}{3}$. Eingesetzt in p und q ergibt

$$p = 3\left(-\frac{a}{3}\right)^2 + 2a\left(-\frac{a}{3}\right) + b = \frac{a^2}{3} - \frac{2a^2}{3} + b = -\frac{a^2}{3} + b \quad \text{und}$$

$$q = \left(-\frac{a}{3}\right)^3 + a\left(-\frac{a}{3}\right)^2 + b\left(-\frac{a}{3}\right) + c = -\frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} - \frac{ab}{3} + c = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c.$$

Die Lösungen der Gleichung (1) sind also gegeben durch $z = w - \frac{a}{3}$, wobei w aus der Lösung der **reduzierten Gleichung**

$$w^3 + \left(-\frac{a^2}{3} + b\right) w + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = w^3 + p w + q = 0 \qquad (2)$$

folgt. Für den speziellen Fall $p = 0$ ergeben sich die Lösungen für w aus den dritten Wurzeln von $-q$ (vgl. Abschnitt 4.6). Sei also im weiteren $p \neq 0$ angenommen. Durch eine zweite Substitution $w := u + v$ folgt aus der Gleichung (2)

$$\begin{aligned} 0 &= (u+v)^3 + p(u+v) + q = u^3 + 3u^2 v + 3u v^2 + v^3 + p(u+v) + q \\ &= u^3 + 3uv(u+v) + v^3 + p(u+v) + q \\ &= u^3 + v^3 + q + (3uv + p)(u+v). \end{aligned}$$

Weil über die Variablen u und v frei verfügt werden kann, können sie so gewählt werden, dass der Term $u+v$ verschwindet. Wählt man also

$$p = -3uv \;\Leftrightarrow\; uv = -\frac{p}{3} \quad (3), \quad \text{so folgt} \quad u^3 + v^3 + q = 0 \;\Leftrightarrow\; u^3 + v^3 = -q \quad (4).$$

Aus den beiden Gleichungen (3) und (4) folgt:

$$q^2+4\left(\frac{p}{3}\right)^3=(u^3+v^3)^2-4(uv)^3=u^6+2u^3v^3+v^6-4u^3v^3$$
$$=u^6-2u^3v^3+v^6=(u^3-v^3)^2$$
$$\Rightarrow\quad u^3-v^3=\pm\sqrt{q^2+4\left(\frac{p}{3}\right)^3}\quad(5)$$

Durch Addition beziehungsweise Subtraktion der Gleichungen (4) und (5) erhält man

$$2u^3=-q\pm\sqrt{q^2+4\left(\frac{p}{3}\right)^3}\quad\Leftrightarrow\quad u^3=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}\quad\text{und}$$
$$2v^3=-q\mp\sqrt{q^2+4\left(\frac{p}{3}\right)^3}\quad\Leftrightarrow\quad v^3=-\frac{q}{2}\mp\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Wegen Gleichung (4) muss $u^3+v^3=-q$ gelten, was nur möglich ist für die beiden Kombinationen

$$u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3},\quad v^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}\quad\text{oder}$$
$$u^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3},\quad v^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Die zweite Kombination ist äquivalent zur ersten Kombination, weil u und v in $w=u+v$ ausgetauscht werden können. Zieht man jetzt noch die dritten Wurzeln, so erhält man für u und v jeweils drei verschiedene Lösungen u_1, u_2, u_3 beziehungsweise v_1, v_2, v_3 (vgl. Abschnitt 4.6) die so kombiniert werden müssen, dass die Bedingung $3uv=-p$ erfüllt wird. Aus jedem solchen Paar erhält man mit $z=w-\frac{a}{3}$ eine Lösung der Gleichung (1).

Beispiel 71
Bestimmen Sie sämtliche Lösungen $z\in\mathbb{C}$ der Gleichung $z^3+9z^2+24z-9=0$.

Lösung:
Aus den Koeffizienten $a=9$, $b=24$, $c=-9$ ergibt sich mit

$$z=w-\frac{a}{3}=w-3,\qquad p=-\frac{a^2}{3}+b=-3,\qquad q=\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c=-27$$

die reduzierte Gleichung $w^3+pw+q=w^3-3w-27=0$, deren Lösungen aus

$$u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}=\frac{27}{2}+\sqrt{\left(-\frac{27}{2}\right)^2+(-1)^3}=\frac{1}{2}(27+5\sqrt{29})\quad\text{und}$$
$$v^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}=\frac{27}{2}-\sqrt{\left(-\frac{27}{2}\right)^2+(-1)^3}=\frac{1}{2}(27-5\sqrt{29})$$

folgen. Mit der dritten Einheitswurzel $\omega = -\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$ (vgl. Abschnitt 4.6) ergeben sich damit für u und v jeweils die drei Lösungen

$$u_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(27+5\sqrt{29})}, \quad u_2 = \omega\sqrt[3]{\frac{1}{2}(27+5\sqrt{29})}, \quad u_3 = \overline{\omega}\sqrt[3]{\frac{1}{2}(27+5\sqrt{29})} \quad \text{und}$$

$$v_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(27-5\sqrt{29})}, \quad v_2 = \omega\sqrt[3]{\frac{1}{2}(27-5\sqrt{29})}, \quad v_3 = \overline{\omega}\sqrt[3]{\frac{1}{2}(27-5\sqrt{29})}.$$

Wegen $w = u + v$ können für w eigentlich neun verschiedene Werte gebildet werden. Weil die Größen u und v aber noch die Gleichung $uv = -\frac{p}{3} = 1$ erfüllen müssen, beschränkt sich die Anzahl der möglichen Kombinationen von u und v auf die drei Lösungen

$$w_1 = u_1 + v_1, \quad w_2 = u_2 + v_3 \quad \text{und} \quad w_3 = u_3 + v_2.$$

Mit $z = w - 3$ lauten die drei Lösungen der betrachteten Gleichung endlich

$$z_1 = w_1 - 3 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(27+5\sqrt{29})} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}(27-5\sqrt{29})} - 3,$$

$$\begin{aligned} z_2 = w_2 - 3 &= -\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})\sqrt[3]{\frac{1}{2}(27+5\sqrt{29})} - \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})\sqrt[3]{\frac{1}{2}(27-5\sqrt{29})} - 3 \\ &= -3 - \frac{1}{2}\left[\sqrt[3]{\frac{1}{2}(27+5\sqrt{29})} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}(27-5\sqrt{29})}\right] \\ &\quad + i\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\sqrt[3]{\frac{1}{2}(27-5\sqrt{29})} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}(27+5\sqrt{29})}\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_3 = w_3 - 3 &= -\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})\sqrt[3]{\frac{1}{2}(27+5\sqrt{29})} - \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})\sqrt[3]{\frac{1}{2}(27-5\sqrt{29})} - 3 \\ &= -3 - \frac{1}{2}\left[\sqrt[3]{\frac{1}{2}(27+5\sqrt{29})} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}(27-5\sqrt{29})}\right] \\ &\quad + i\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\sqrt[3]{\frac{1}{2}(27+5\sqrt{29})} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}(27-5\sqrt{29})}\right]. \end{aligned}$$

Bemerkung:

1) Wie an den Lösungen aus diesem Beispiel zu erkennen ist, wäre es nahezu unmöglich, ja wenn nicht sogar unmöglich, eine dieser Lösungen zu erraten und dann mit dem Verfahren der Polynomdivision fortzufahren.

2) Die reelle Wurzel der Gleichung $w^3 + pw + q = 0$, das heißt die Wurzel

$$w = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

ist unter dem Namen **Cardanische Formel** bekannt. Sie wurde benannt nach dem Mathematiker ***Gerolamo Cardano*** $(1501-1576)^*$, dem fälschlicherweise die Entdeckung dieser Lösungsformel zugeschrieben wurde. In Wahrheit stammt die Formel von dem Bologneser Mathematikprofessor ***Scipione del Ferro*** $(1465-1526)^{**}$, dem das Auffinden dieses genialen Lösungsweges vorbehalten blieb.

2) Allgemeine Gleichung 4 - ten Grades

Gesucht sind die Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der allgemeinen Gleichung vierten Grades

$$z^4 + a z^3 + b z^2 + c z + d = 0 \quad \text{für beliebige} \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}. \qquad (6)$$

Auch hier wird im ersten Schritt mithilfe der Substitution $z := w + \lambda$ die Gleichung so reduziert, dass der kubische Term in der Gleichung verschwindet.

$$\begin{aligned} 0 &= (w+\lambda)^4 + a(w+\lambda)^3 + b(w+\lambda)^2 + c(w+\lambda) + d \\ &= [w^4 + 4w^3\lambda + 6w^2\lambda^2 + 4w\lambda^3 + \lambda^4] + [a w^3 + 3a w^2\lambda + 3a w\lambda^2 + a\lambda^3] \\ &\quad + [b w^2 + 2b w\lambda + b\lambda^2] + [c w + c\lambda] + d \\ &= w^4 + (4\lambda + a) w^3 + \underbrace{(6\lambda^2 + 3a\lambda + b)}_{=:p} w^2 + \underbrace{(4\lambda^3 + 3a\lambda^2 + 2b\lambda + c)}_{=:q} w \\ &\quad + \underbrace{\lambda^4 + a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d}_{=:r} \end{aligned}$$

Der kubische Term $(4\lambda + a) w^3$ entfällt für $\lambda = -\frac{a}{4}$. Eingesetzt ergibt für p, q und r

$$\begin{aligned} p &= 6\left(-\frac{a}{4}\right)^2 + 3a\left(-\frac{a}{4}\right) + b = \frac{3a^2}{8} - \frac{3a^2}{4} + b = -\frac{3a^2}{8} + b, \\ q &= 4\left(-\frac{a}{4}\right)^3 + 3a\left(-\frac{a}{4}\right)^2 + 2b\left(-\frac{a}{4}\right) + c = -\frac{a^3}{16} + \frac{3a^3}{16} - \frac{ab}{2} + c = \frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c, \\ r &= \left(-\frac{a}{4}\right)^4 + a\left(-\frac{a}{4}\right)^3 + b\left(-\frac{a}{4}\right)^2 + c\left(-\frac{a}{4}\right) + d = -\frac{3a^4}{256} + \frac{a^2 b}{16} - \frac{ac}{4} + d. \end{aligned}$$

Die Lösungen der Gleichung (6) sind also gegeben durch $z = w - \frac{a}{4}$, wobei w aus der Lösung der **reduzierten Gleichung**

$$f(w) := w^4 + p w^2 + q w + r = 0 \qquad (7)$$

folgt. Falls $q = 0$ oder $r = 0$ ist, ergeben sich Sonderfälle der Gleichung (6) die bereits in Abschnitt 4.7 besprochen wurden. Seien also im Weiteren $q \neq 0$ und $r \neq 0$ angenommen.

$*$) Gerolamo Cardano, italienischer Mathematiker, Arzt und Philosoph, geb. 24. September 1501 in Pavia, gest. 21. September 1576 in Rom.

$**$) Scipione del Ferro, geb. 6. Februar 1465 in Bologna, gest. 5. November 1526 in Bologna. Um 1500 entdeckte er die Methode zur Auflösung der Gleichung dritten Grades, veröffentlichte sie jedoch nicht.

Der Mathematiker ***Lodovico Ferrari*** $(1522-1565)^*$ hatte die geniale Idee, die Gleichung (7) in die Form

$$f(w)=\left(w^2+\frac{u}{2}\right)^2-(vw+t)^2=w^4+(u-v^2)w^2-2tvw+\frac{u^2}{4}-t^2$$

zu bringen. Der Koeffizientenvergleich mit (7) liefert dann das Gleichungssystem:

$$p=u-v^2 \quad \Leftrightarrow \quad v^2=u-p \qquad (8)$$

$$q=-2tv \qquad (9)$$

$$r=\frac{u^2}{4}-t^2 \quad \Leftrightarrow \quad t^2=\frac{u^2}{4}-r \qquad (10)$$

Aus (9) folgt mit (8) und (10) die Gleichung:

$$q^2=4t^2v^2=4\left(\frac{u^2}{4}-r\right)(u-p)=(u^2-4r)(u-p)=u^3-pu^2-4ru+4rp$$

$$\Leftrightarrow \quad u^3-pu^2-4ru+4rp-q^2=0 \qquad (11)$$

Das ist eine Gleichung dritten Grades, deren Lösung oben behandelt worden ist. Von (11) reicht nur **eine** Lösung u aus, um die vier Lösungen w aus der Gleichung (7) zu gewinnen. Aus (8) folgt zunächst $v=\pm\sqrt{u-p}$. Setzt man $v=\sqrt{u-p}$, dann folgt wegen der Voraussetzung $q\neq 0$ aus (9) sofort $t=-\frac{q}{2v}$ ($v\neq 0$ wegen $-2tv=q\neq 0$). Dann gelten die obigen Gleichungen für p, q und r. Die Lösungen der Gleichung (7) ergeben sich also aus

$$f(w)=w^4+pw^2+qw+r=\left(w^2+\frac{u}{2}\right)^2-(vw+t)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(w^2+\frac{u}{2}\right)^2=(vw+t)^2 \quad \Leftrightarrow \quad w^2+\frac{u}{2}=\pm(vw+t)$$

$$\Leftrightarrow \quad w^2-vw+\frac{u}{2}-t=0 \quad \text{oder} \quad w^2+vw+\frac{u}{2}+t=0.$$

Anwenden der Lösungsformel für quadratische Gleichungen sowie den beiden Beziehungen $v=\sqrt{u-p}$ und $t=-\frac{q}{2v}=-\frac{q}{2\sqrt{u-p}}$ liefert mit $\epsilon, \delta\in\{-1, 1\}$ die vier Lösungen

$$w_{1,2,3,4}=\epsilon\frac{v}{2}+\delta\sqrt{\frac{v^2}{4}-\frac{u}{2}+\epsilon t}=\frac{1}{2}\left(\epsilon v+\delta\sqrt{v^2-2u+4\epsilon t}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\epsilon\sqrt{u-p}+\delta\sqrt{-p-u-\epsilon\frac{2q}{\sqrt{u-p}}}\right).$$

---

*) Lodovico Ferrari, italienischer Mathematiker, geb. 2. Februar 1522 in Bologna, gest. 5. Oktober 1565 in Bologna. Er fand mithilfe von Cardano die Auflösung der Gleichung vierten Grades.

Die Lösungen von (6) sind dann $z_k = w_k - \frac{a}{4}$ für alle $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Beispiel 72
Bestimmen Sie sämtliche Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^4 - 4z^3 - 3z^2 + 29z - 29 = 0$.

Lösung:
Aus den Koeffizienten $a = -4$, $b = -3$, $c = 29$ und $d = -29$ ergibt sich mit

$$z = w - \frac{a}{4} = w + 1, \qquad p = -\frac{3a^2}{8} + b = -9,$$

$$q = \frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c = 15, \qquad r = -\frac{3a^4}{256} + \frac{a^2 b}{16} - \frac{ac}{4} + d = -6$$

die reduzierte Gleichung $w^4 - 9w^2 + 15w - 6 = 0$ und die zugehörige zu lösende Gleichung dritten Grades

$$u^3 - pu^2 - 4ru + 4rp - q^2 = u^3 + 9u^2 + 24u - 9 = 0.$$

Die Lösungen der letzten Gleichung wurden schon im Beispiel 71 berechnet. Weil nur eine Lösung u benötigt wird, kann die reelle Lösung

$$u = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(27 + 5\sqrt{29})} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}(27 - 5\sqrt{29})} - 3$$

benutzt werden, um die w_k und damit schließlich die z_k für alle $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ zu bestimmen. Für $p = -9$, $q = 1$ und $\epsilon, \delta \in \{-1, 1\}$ ergeben sich die Lösungen damit zu

$$z_k = w_k + 1 = \frac{1}{2}\left(\epsilon\sqrt{u+9} + \delta\sqrt{9 - u - \epsilon\frac{30}{\sqrt{u+9}}}\right) + 1.$$

Bemerkung:

1) Für Gleichungen vom Grad $n = 1, 2, 3, 4$ kann eine allgemeine Lösungsformel angegeben werden. Im Fall $n = 3$ beispielsweise besteht sie aus einer Verschachtelung von Wurzeln (sogenannte **Radikale**) der Form $\sqrt[3]{a + \sqrt{b}}$. Offensichtlich gibt es eine unerschöpfliche Mannigfaltigkeit von Radikalen, sodass man annehmen könnte, dass sich durch irgendeine Kombination dieser Radikale auch die allgemeine Gleichung fünften Grades lösen lässt. Es ist im Gegenteil bewiesen worden (u.a. von Carl Friedrich Gauß), dass sich die Lösungen von Gleichungen höher als vierten Grades im Allgemeinen nicht durch Radikale darstellen lassen. Die Wurzeln der Gleichung vierten Grades sind ihrer algebraischen Struktur nach schon recht kompliziert. Die Lösungen von Gleichungen höherer Grade als vier sind im Allgemeinen wesentlich komplizierter. Man sagt auch, sie gehören einer weitaus verwickelterer Kategorie von Zahlen an.

2) Der Einblick in die Lösungsverhältnisse von Gleichungen höherer Grade ist darum schwierig zu gewinnen, weil sich spezielle Gleichungen sehr wohl durch Radikale lösen lassen. Der genaue und vollständige Überblick über alle durch Radikale lösbaren Gleichungen sämtlicher Grade wird durch die Galoissche Theorie [2] beschrieben.

6.4 Computer - Algebra - Systeme

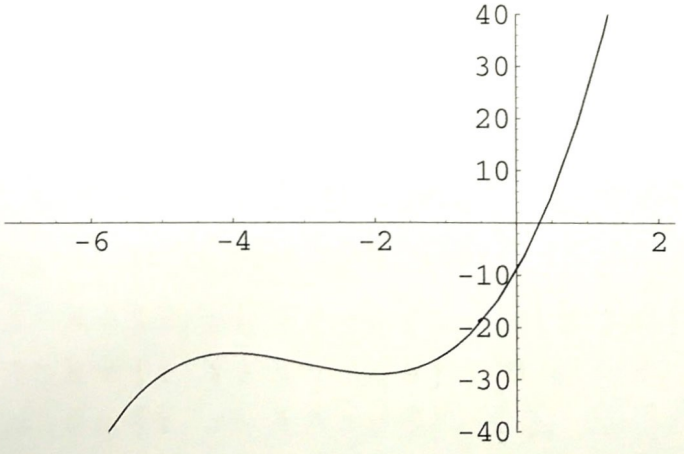
Mit modernen **C**omputer - **A**lgebra - **S**ystemen (**CAS**), wie zum Beispiel das in diesem Buch verwendete *Mathematica*, lassen sich interessante mathematische Experimente betreiben und können für die Ingenieurmathematik ein äußerst nützliches Werkzug sein. Vor allem können diese Systeme Sie von der fehleranfälligen stupiden Routine - Rechenarbeit entlasten und Sie können sich dann auf die wesentlichen Konzepte konzentrieren. Jedoch lassen sich mit einem so mächtigen Werkzeug im Allgemeinen keine Beweise führen, womit Sie dann doch noch Ihren Kopf anstrengen müssen um so manche Aufgabe bewältigen zu können.

In diesem Abschnitt soll keine Einführung in die Programmiersprache *Mathematica* gegeben werden, sondern vielmehr an einem Beispiel gezeigt werden, wie wirkungsvoll der Einsatz eines CAS ist. Für die Vielzahl der zur Verfügung stehenden Befehle und Optionen sei auf das ausgezeichnete Buch [3] verwiesen. Die Syntax der in dem folgenden Beispiel verwendeten Befehle ist allerdings so einfach, dass man sie auch verstehen kann, wenn man zuvor noch kein CAS benutzt hat.

Beispiel 73
Betrachtet werde die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(z) := z^3 + 9z^2 + 24z - 9$. Zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall $[-7, 2]$.

Mathematica erledigt diese Aufgabe einfach durch Eingabe des Befehls:

```
In[1]:= Plot[z^3 + 9 z^2 + 24 z - 9, {z, -7, 2}, PlotRange → {-40, 40}]
```




```
Out[1]= - Graphics -
```

Jetzt interessieren uns die Nullstellen der Funktion f, also für die $f(z) = 0$ gilt. Mit *Mathematica* ergeben sie sich durch Eingabe des Befehls

```
In[2]:= Solve[z^3 + 9 z^2 + 24 z - 9 == 0, z];
        TableForm[%]
```

Out[3]//TableForm=

$$z \to -3 + \frac{1}{3}\left(\frac{729}{2} - \frac{135\sqrt{29}}{2}\right)^{1/3} + \left(\frac{1}{2}\left(27 + 5\sqrt{29}\right)\right)^{1/3}$$

$$z \to -3 - \frac{1}{6}\left(1 + i\sqrt{3}\right)\left(\frac{729}{2} - \frac{135\sqrt{29}}{2}\right)^{1/3} - \frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}\left(27 + 5\sqrt{29}\right)\right)^{1/3}$$

$$z \to -3 - \frac{1}{6}\left(1 - i\sqrt{3}\right)\left(\frac{729}{2} - \frac{135\sqrt{29}}{2}\right)^{1/3} - \frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}\left(27 + 5\sqrt{29}\right)\right)^{1/3}$$

Vergleichen Sie diese Lösungen mit denen aus dem Beispiel 71 !

7 Lösungen der Übungsaufgaben

7.1 Grundzüge der Mengenlehre

Aufgabe 1 a

Bestimmen Sie die Schnittmenge $A \cap B$, die Vereinigungsmenge $A \cup B$ und die beiden Differenzmengen $A \setminus B$ beziehungsweise $B \setminus A$ für

$$A = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x| < 8 \} \quad \text{und} \quad B = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2 \}.$$

Lösung:

Die Mengen A und B lauten in Intervallschreibweise

$$A = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x| < 8 \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid -8 < x < 8 \} =]-8, 8[,$$
$$B = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2 \} = [2, \infty].$$

Damit ergeben sich die gesuchten Verknüpfungen

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \} = [2, 8[, \qquad A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \} =]-8, \infty[,$$
$$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \} =]-8, 2[, \quad B \setminus A = \{ x \mid x \notin A \wedge x \in B \} = [8, \infty[.$$

Aufgabe 1 b

Bestimmen Sie die Schnittmenge $A \cap B$, die Vereinigungsmenge $A \cup B$ und die beiden Differenzmengen $A \setminus B$ beziehungsweise $B \setminus A$ für

$$A = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4 \} \quad \text{und} \quad B = \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4 \}.$$

Lösung:

In Intervallschreibweise ergeben sich die Mengen A und B zu

$$A = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4 \} = \{ 1, 2, 3, 4 \} \quad \text{und} \quad B = \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4 \} = [0, 4].$$

Die gesuchten Mengenverknüpfungen lauten dann

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \} = \{ 1, 2, 3, 4 \} = A,$$
$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \} = [0, 4] = B,$$
$$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \} = \{ \},$$
$$B \setminus A = \{ x \mid x \notin A \wedge x \in B \} = [0, 4] \setminus \{ 1, 2, 3, 4 \}.$$

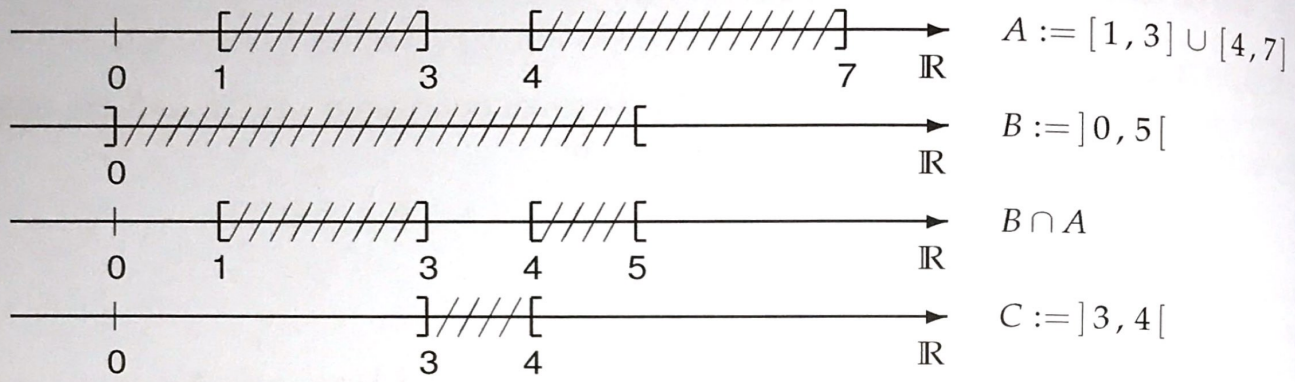
Aufgabe 2

Die Menge $M := (\,]0, 5[\cap ([1, 3] \cup [4, 7])) \cap]3, 4[$ ist soweit wie möglich zu vereinfachen. Benutzen Sie zur Veranschaulichung den Zahlenstrahl, auf dem Sie die einzelnen Intervalle kenntlich machen.

Lösung:
Für die Menge M ist es von Vorteil, zunächst die Abkürzungen

$$A := [1,3] \cup [4,7], \quad B :=]0,5[\quad \text{und} \quad C :=]3,4[$$

einzuführen. Aus der grafischen Darstellung



lässt sich jetzt die Lösung $M = (B \cap A) \cap C = \{\ \}$ leicht ablesen.

Aufgabe 3 a

Vereinfachen Sie die Menge $M_1 := X \setminus (C \cap (A \setminus B))$ mit

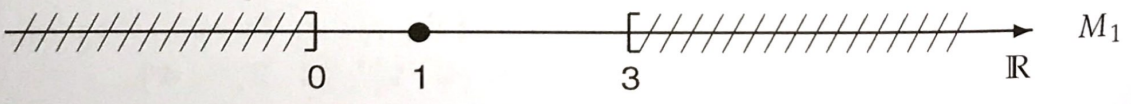
$$X = \mathbb{R}, \quad A = [0,\infty[, \quad B = \{1,3\}, \quad C =]-\infty,3]$$

soweit wie möglich und skizzieren Sie Ihre Lösung auf dem Zahlenstrahl.

Lösung:
Zunächst werden die Klammern von innen nach außen aufgelöst. Dann folgt:

$$\begin{aligned} A \setminus B &= [0,\infty[\setminus \{1,3\} = \{x \mid x \in [0,\infty[\wedge x \notin \{1,3\}\} = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1,3\} \\ C \cap (A \setminus B) &=]-\infty,3] \cap \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1,3\} = \{x \mid x \in]-\infty,3] \wedge x \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1,3\}\} \\ &= [0,3[\setminus \{1\} := L_1 \\ \Rightarrow \quad M_1 &= X \setminus L_1 = \mathbb{R} \setminus ([0,3[\setminus \{1\}) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \notin [0,3[\setminus \{1\}\} \\ &=]-\infty,0] \cup \{1\} \cup [3,\infty[\end{aligned}$$

Die grafische Darstellung der Menge M_1 zeigt die folgende Abbildung.



Aufgabe 3 b

Vereinfachen Sie die Menge $M_2 := X \setminus (D \cup ((B \setminus C) \cap (A \cap E)))$ mit

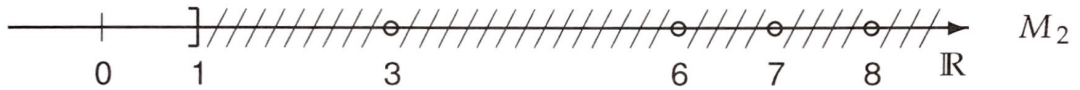
$$X = \mathbb{R}, \quad A = [3,\infty[, \quad B = \mathbb{N}, \quad C = \{4,5\}, \quad D =]-\infty,1], \quad E = [1,8]$$

soweit wie möglich und skizzieren Sie Ihre Lösung auf dem Zahlenstrahl.

Lösung:
Die Klammern werden zunächst von innen nach außen aufgelöst. Dann gilt:

$$\begin{aligned} B \setminus C &= \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \notin \{4,5\}\} = \mathbb{N} \setminus \{4,5\} \\ A \cap E &= \{x \mid x \in [3,\infty[\wedge x \in [1,8]\} = [3,8] \\ Y := (B \setminus C) \cap (A \cap E) &= \{3,6,7,8\} \\ D \cup Y &=]-\infty,1] \cup Y =]-\infty,1] \cup \{3,6,7,8\} \\ \Rightarrow \quad X \setminus (D \cup Y) &= \mathbb{R} \setminus (D \cup Y) = \mathbb{R} \setminus (\,]-\infty,1] \cup \{3,6,7,8\}) \\ &=]1,\infty[\setminus \{3,6,7,8\} \end{aligned}$$

Die grafische Darstellung der Menge M_2 zeigt die folgende Abbildung.



Aufgabe 3 c

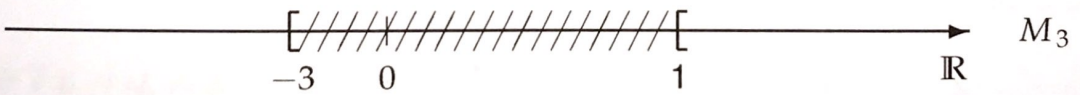
Vereinfachen Sie die nachfolgenden Mengen soweit wie möglich und skizzieren Sie Ihre Lösungen auf dem Zahlenstrahl.

$M_3 := (A \setminus B) \cap (C \cup D)$ und $M_4 := ((D \setminus A) \cap (B \setminus A)) \cup D$ mit
$A = [-3,1]$, $B = \{1,3,5\}$, $C =]5,\infty[$, $D =]-\infty,1]$.

Lösung:
Für die Menge M_3 werden zunächst die Mengen in den Klammern bestimmt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} A \setminus B &= [-3,1] \setminus \{1,2,3\} \\ &= \{x \mid x \in [-3,1] \wedge x \notin \{1,2,3\}\} = [-3,1[\\ C \cup D &=]5,\infty[\cup]-\infty,1] \\ &= \{x \mid x \in]5,\infty[\vee x \in]-\infty,1]\} = \mathbb{R} \setminus]1,5] \\ \Rightarrow \quad (A \setminus B) \cap (C \cup D) &= [-3,1[\cap \mathbb{R} \setminus]1,5] \\ &= \{x \mid x \in [-3,1[\wedge x \in \mathbb{R} \setminus]1,5]\} = [-3,1[\end{aligned}$$

Die grafische Darstellung der Menge M_3 zeigt die folgende Abbildung.

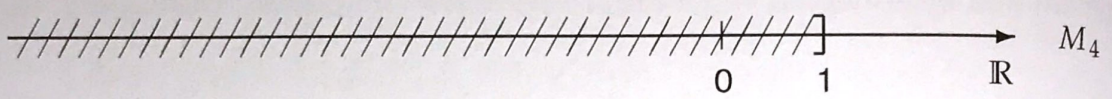


Um die Menge M_4 zu bestimmen werden zuerst die inneren Klammern aufgelöst.

$$\begin{aligned} L_1 &:= D \setminus A =]-\infty,1] \setminus [-3,1] = \{x \mid x \in]-\infty,1] \wedge x \notin [-3,1]\} =]-\infty,-3[\\ L_2 &:= B \setminus A = \{1,3,5\} \setminus [-3,1] = \{x \mid x \in \{1,3,5\} \wedge x \notin [-3,1]\} = \{3,5\} \\ L_3 &:= L_1 \cap L_2 =]-\infty,-3[\cap \{3,5\} = \{x \mid x \in]-\infty,-3[\wedge x \in \{3,5\}\} = \{\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad M_4 = L_3 \cup D = \{\} \cup]-\infty,1] = \{x \mid x \in \{\} \vee x \in]-\infty,1]\} =]-\infty,1] = D$$

Die grafische Darstellung der Menge M_4 zeigt die folgende Abbildung.



Aufgabe 4 a

Geben Sie die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ für die Menge $M := \left\{ \frac{1}{2}, \sqrt{3} \right\}$ an.

Lösung:
Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M) = \{A \mid A \subseteq M\}$ ist die Menge aller möglichen Teilmengen von M. Dazu gehören die leere Menge, alle einelementigen Mengen und die Menge M selbst. Also ist

$$\mathcal{P}(M) = \left\{ \{\}, \left\{ \frac{1}{2} \right\}, \{\sqrt{3}\}, \left\{ \frac{1}{2}, \sqrt{3} \right\} \right\}.$$

Aufgabe 4 b

Wie viele Elemente (Mächtigkeit) $\#\mathcal{P}(M)$ hat die Potenzmenge einer Menge M mit $n \in \mathbb{N}$ Elementen? Geben Sie dafür einen anschaulichen Beweis an.

Lösung:
Aus der Kombinatorik ist bekannt, dass aus einer Menge mit n Elementen die Anzahl der k - elementigen Teilmengen ($k \leq n$) gerade $\binom{n}{k}$ ist. Dann ist die Anzahl aller möglichen Teilmengen einer Menge M mit n Elementen

$$\#P(M) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Dabei gibt der Ausdruck $\binom{n}{1}$ die Anzahl der einelementigen Teilmengen, $\binom{n}{2}$ die Anzahl der zweielementigen Teilmengen, ... und $\binom{n}{n}$ die Anzahl der n elementigen Teilmengen an. $\binom{n}{0} = 1$ ist der Ausdruck der die leere Menge berücksichtigt. Aus der Binomialentwicklung (vgl. Satz 2.5) ist die folgende Formel bekannt.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Wenn Sie in dieser Formel $a = b = 1$ einsetzen, erhalten Sie

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} 1^{n-k} 1^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \#P(M).$$

Aufgabe 5

Geben Sie die Menge M konkret an und begründen Sie Ihre Argumentation sorgfältig!

$$M := \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \frac{n-1}{2^n} < \frac{1}{10} \right\}$$

Lösung:
Zunächst wird gezeigt, dass $a_n := \frac{n-1}{2^n}$ für alle natürlichen Zahlen $n > 2$ fallend ist.

$$\begin{aligned} & 2 < n && | : 2 \\ \Leftrightarrow \quad & 1 < \frac{n}{2} && | \ -1 + \frac{n}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{n}{2} < n - 1 && | \cdot \frac{1}{2^n} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{(n+1)-1}{2^{n+1}} < \frac{n-1}{2^n} \\ \Leftrightarrow \quad & a_{n+1} < a_n \end{aligned}$$

Berechnet man jetzt die ersten sechs Folgenglieder, dann erhält man

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{4}, \quad a_3 = \frac{1}{4}, \quad a_4 = \frac{3}{16}, \quad a_5 = \frac{1}{8}, \quad a_6 = \frac{5}{64} \approx 0{,}08.$$

Man erkennt, dass alle Folgenglieder für $n = 1$ und $n \geq 6$ die Ungleichung erfüllen. Damit und wegen $a_{n+1} < a_n$ für $n > 2$ ergibt sich $M = \{1, 6, 7, 8, \ldots\} = \mathbb{N} \setminus \{2, 3, 4, 5\}$.

Aufgabe 6 a

Bestimmen Sie die Menge

$$M_1 := \{ x \in \mathbb{R} \mid x \text{ ist durch 2 teilbar} \} \cap \{ x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist durch 3 teilbar} \}.$$

Lösung:
Die gesuchten Zahlen müssen durch 2 und durch 3 teilbar sein und natürlich sein. Das sind dann alle natürlichen Zahlen die durch 6 teilbar sind. Also ist $M_1 = \{6n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Aufgabe 6 b

Bestimmen Sie die Menge

$$M_2 := \{ n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist Primzahl} \} \cap \{ n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade} \}.$$

Lösung:
Gesucht werden alle natürlichen Zahlen die gerade und prim sind. Eine solche Zahl gibt es offensichtlich nur eine, nämlich die Zahl 2. Also ist $M_2 = \{2\}$.

Aufgabe 7 a

Welche Menge wird beschrieben durch

$$M := \bigcup_{k=0}^{\infty} M_k \quad \text{mit} \quad M_k := \left\{ x \in \left] k\pi, (k+2)\pi \right[\;\middle|\; \sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \right\}?$$

Lösung:
Die Bedingung $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ ist für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ wahr, weil die Cosinusfunktion um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts verschoben identisch mit der Sinusfunktion ist.

Daher kommen alle Zahlen die die Bedingung $x \in]k\pi, (k+2)\pi[$ erfüllen infrage. Die ersten vier Mengen lauten

$$M_0 =]0, 2\pi[, \quad M_1 =]\pi, 3\pi[, \quad M_2 =]2\pi, 4\pi[, \quad M_3 =]3\pi, 5\pi[.$$

Weil sich die Mengen M_k und M_{k+1} für alle $k \in \mathbb{N}_0$ überlappen, ist die Vereinigung das offene Intervall $M =]0, \infty[= \mathbb{R}^+$.

Aufgabe 7 b

Welche Menge wird beschrieben durch

$$N := \bigcap_{k=1}^{\infty} N_k \quad \text{mit} \quad N_k := \left\{0, \frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+2}, \dots\right\}?$$

Lösung:
Die ersten vier Mengen lauten

$$N_1 = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}, \qquad N_2 = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\},$$

$$N_3 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots\right\}, \qquad N_4 = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots\right\}.$$

In der Schnittmenge aller dieser Mengen N_k befindet sich offensichtlich nur die Zahl Null. Also ist $N = \{0\}$.

Aufgabe 7 c

Bildet die Vereinigung $M \cup N$ der Mengen aus a) und b) ein Intervall?

Lösung:
Die Vereinigungsmenge $M \cup N =]0, \infty[\cup \{0\} = [0, \infty[$ ist ein halboffenes Intervall.

Aufgabe 8 a

Bestimmen Sie die Menge $M_1 := \bigcup_{m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \{x \in \mathbb{R} \mid m \cdot x \in \mathbb{N}\}$.

Lösung:
Nehmen Sie eine beliebige Zahl $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und setzen $x := \frac{n}{m}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Dann ist das Produkt $m \cdot x = m \cdot \frac{n}{m} = n \in \mathbb{N}$ und die Zahlen $x = \frac{n}{m}$ stellen dann alle möglichen Brüche mit dem Nenner m dar. Die Vereinigung der Lösungsmengen für alle möglichen $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ liefert gerade die Menge der rationalen Zahlen ohne die Null $M_1 = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Aufgabe 8 b

Bestimmen Sie die Menge $M_2 := \bigcup_{k=1}^{\infty}]k-1, k+1]$.

Lösung:
Schreibt man die ersten Intervalle auf, dann lässt sich erkennen, dass sich alle Intervalle überlappen. Es gilt

$$M_2 = \bigcup_{k=1}^{\infty}]k-1, k+1] =]0,2] \cup]1,3] \cup]2,4] \cup \ldots =]0, \infty[= \mathbb{R}^+.$$

Aufgabe 8 c

Bestimmen Sie die Menge $M_3 := \bigcap_{a \in \mathbb{R}} \{ x \mid (x-a)(x-1) = 0 \}$.

Lösung:
Ein Produkt ist null, wenn einer der beiden Faktoren null ist. Daher sind die Lösungen der Gleichung $x = 1$ oder $x = a$ für beliebige $a \in \mathbb{R}$. Der Durchschnitt der einzelnen Mengen kann nur die Zahl $x = 1$ enthalten, da nur diese Zahl allen Mengen gemeinsam ist. Also ist $M_3 = \{1\}$.

Aufgabe 8 d

Bestimmen Sie die Menge $M_4 := \bigcap_{k=0}^{\infty} \{ x \in \mathbb{R} \mid \sin(k \cdot x) = 0 \ \wedge \ k \in \mathbb{N}_0 \}$.

Lösung:
Zunächst berechnet man einige Lösungsmengen A_k und bildet dann den Durchschnitt dieser Mengen. Für $k = 0$ erhält man folgende zu lösende Gleichung $\sin(0 \cdot x) = 0$, die offensichtlich für jede Zahl $x \in \mathbb{R}$ wahr ist. Also ist $A_0 = \mathbb{R}$. Sei nun $k \in \mathbb{N}$ beliebig, dann hat die Gleichung $\sin(k \cdot x) = 0$ nur Lösungen, wenn das Argument vom Sinus die Bedingung $kx = z\pi$ mit $z \in \mathbb{Z}$ erfüllt. Für $k = 0, k = 1, k = 2$ und $k = 3$ haben die Lösungsmengen A_k dann folgende Gestalt

$$A_0 = \mathbb{R},$$
$$A_1 = \{\ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots\},$$
$$A_2 = \left\{\ldots, -2\pi, -\frac{3}{2}\pi, -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi, \ldots\right\},$$
$$A_3 = \left\{\ldots, -2\pi, -\frac{5}{3}\pi, -\frac{4}{3}\pi, -\pi, -\frac{2}{3}\pi, -\frac{1}{3}\pi, 0, \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}, 2\pi, \ldots\right\}.$$

Der Durchschnitt all dieser Mengen A_k können demnach nur ganzzahlige Vielfache von π sein. Also ist die Lösung $M_4 = \{z\pi \mid z \in \mathbb{Z}\}$.

Aufgabe 8 e

Bestimmen Sie die Menge

$$M_5 := \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \quad \text{mit} \quad B_k = \{-k, -k+1, \ldots, k-1, k\} \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Lösung:
Aus der Auflistung der ersten neun Mengen

$B_1 = \{-1, 0, 1\}$ $B_2 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ $B_3 = \{-3, -2, \ldots, 2, 3\}$
$B_4 = \{-4, -3, \ldots, 3, 4\}$ $B_5 = \{-5, -4, \ldots, 4, 5\}$ $B_6 = \{-6, -5, \ldots, 5, 6\}$
$B_7 = \{-7, -6, \ldots, 6, 7\}$ $B_8 = \{-8, -7, \ldots, 7, 8\}$ $B_9 = \{-9, -8, \ldots, 8, 9\}$

erkennt man sofort, dass die Vereinigung aller Mengen die Menge $M_5 = \mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist.

Aufgabe 8 f

Bestimmen Sie die Menge $M_6 := \bigcap_{\nu=1}^{\infty} N_\nu$ mit $N_\nu = \{0, 1, 2, \ldots, \nu\}$ und $\nu \in \mathbb{N}$.

Lösung:

Weil $N_\nu \subset N_{\nu+1}$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$ gilt, kann die Schnittmenge nur die kleinste Menge $M_6 = N_1 = \{0, 1\}$ sein.

7.2 Mathematische Beweismethoden

Aufgabe 9 a

Schreiben Sie den Ausdruck $1 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 49 \cdot 81 \cdot 121 \cdot 169$ mithilfe eines Produktzeichens.

Lösung:

$$1 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 49 \cdot 81 \cdot 121 \cdot 169 = 1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 = \prod_{n=1}^{7} (2n-1)^2$$

Aufgabe 9 b

Schreiben Sie den Ausdruck $\frac{1}{4-2} \cdot \frac{1}{9-3} \cdot \frac{1}{16-4} \cdot \frac{1}{25-5} \cdot \frac{1}{36-6}$ mithilfe eines Produktzeichens.

Lösung:

$$\frac{1}{4-2} \cdot \frac{1}{9-3} \cdot \frac{1}{16-4} \cdot \frac{1}{25-5} \cdot \frac{1}{36-6}$$
$$= \frac{1}{2^2-2} \cdot \frac{1}{3^2-3} \cdot \frac{1}{4^2-4} \cdot \frac{1}{5^2-5} \cdot \frac{1}{6^2-6} = \prod_{n=2}^{6} \frac{1}{n^2-n}$$

Aufgabe 10 a

Schreiben Sie den Ausdruck $1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{15} + \frac{1}{28} + \frac{1}{45} + \frac{1}{66}$ mithilfe eines Summenzeichens.

Lösung:

$$1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{15} + \frac{1}{28} + \frac{1}{45} + \frac{1}{66} = \frac{1}{1 \cdot 1} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{6 \cdot 11} = \sum_{n=1}^{6} \frac{1}{n(2n-1)}$$

Aufgabe 10 b

Schreiben Sie den Ausdruck $\frac{18}{27}+\frac{32}{64}+\frac{50}{125}+\frac{72}{216}+\frac{98}{343}+\frac{128}{512}$ mithilfe eines Summenzeichens.

Lösung:

$$\frac{18}{27}+\frac{32}{64}+\frac{50}{125}+\frac{72}{216}+\frac{98}{343}+\frac{128}{512}=\frac{2\cdot 3^2}{3^3}+\frac{2\cdot 4^2}{4^3}+\frac{2\cdot 5^2}{5^3}+\frac{2\cdot 6^2}{6^3}+\frac{2\cdot 7^2}{7^3}+\frac{2\cdot 8^2}{8^3}$$
$$=\sum_{n=3}^{8}\frac{2n^2}{n^3}=\sum_{n=3}^{8}\frac{2}{n}$$

Aufgabe 10 c

Schreiben Sie den Ausdruck $\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{10}}$ mithilfe eines Summenzeichens.

Lösung:

$$\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{10}}=\sum_{n=3}^{10}\frac{1}{2^n}$$

Aufgabe 10 d

Schreiben Sie den Ausdruck $1+2a+3a^2+4a^3+\ldots+na^{n-1}$ mithilfe eines Summenzeichens.

Lösung:

$$1+2a+3a^2+4a^3+\ldots+na^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}ka^{k-1}$$

Aufgabe 10 e

Schreiben Sie den Ausdruck $-1+1+3+5+\ldots+15$ mithilfe eines Summenzeichens.

Lösung:

Mit dem Bildungsgesetz für die **arithmetische Folge** $a_n=a_1+(n-1)d$ erhält man mit $a_1=-1$ und $d=2$ den allgemeinen Ausdruck $a_n=-1+(n-1)\cdot 2=-3+2n$. Damit ergibt sich

$$-1+1+3+5+\ldots+15=\sum_{n=1}^{9}(2n-3).$$

Aufgabe 10 f

Schreiben Sie den Ausdruck $1-4+7-10+13-16+19-22$ mithilfe eines Summenzeichens.

Lösung:

Mit dem Bildungsgesetz für die **arithmetische Folge** $a_n=a_1+(n-1)d$ erhält man mit $a_1=1$ und $d=3$ zunächst den allgemeinen Ausdruck $a_n=1+(n-1)3=-2+3n$. Beachtet man jetzt noch dass die Zahlenreihe alternierend ist, ergibt sich

$$1-4+7-10+13-16+19-22=\sum_{n=1}^{8}(3n-2)(-1)^{n+1}.$$

Aufgabe 10 g

Schreiben Sie den Ausdruck $\frac{4}{5}-\frac{5}{6}+\frac{6}{7}-\frac{7}{8}+\frac{8}{9}-\frac{9}{10}$ mithilfe eines Summenzeichens.

Lösung:

$$\frac{4}{5}-\frac{5}{6}+\frac{6}{7}-\frac{7}{8}+\frac{8}{9}-\frac{9}{10}=\sum_{n=4}^{9}\frac{n(-1)^n}{n+1}$$

Aufgabe 10 h

Schreiben Sie den Ausdruck $-\frac{2}{3}+\frac{3}{6}-\frac{4}{9}+\frac{5}{12}-\frac{6}{15}+\frac{7}{18}-\frac{8}{21}+\frac{9}{24}$ mithilfe eines Summenzeichens.

Lösung:

$$-\frac{2}{3}+\frac{3}{6}-\frac{4}{9}+\frac{5}{12}-\frac{6}{15}+\frac{7}{18}-\frac{8}{21}+\frac{9}{24}=\sum_{n=1}^{8}(-1)^n\frac{n+1}{3n}$$

Aufgabe 11 a

Schreiben Sie den Ausdruck $\frac{1}{3}-\frac{1}{8}+\frac{1}{15}-\frac{1}{24}+\frac{1}{35}\mp\ldots+\frac{1}{2703}$ mithilfe eines Summenzeichens.

Lösung:

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{8}+\frac{1}{15}-\frac{1}{24}\pm\ldots+\frac{1}{2703}=\frac{1}{1\cdot3}-\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot5}-\frac{1}{4\cdot6}\pm\ldots+\frac{1}{k(k+2)}$$
$$=\sum_{n=1}^{k}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+2)}=\sum_{n=1}^{51}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+2)}$$

Um k zu bestimmen, muss die Gleichung $k(k+2)=2703$ gelöst werden. Mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen erhält man die beiden Lösungen $k_1=51$ und $k_2=-53$. Da k positiv sein muss, kommt folglich nur die Lösung $k=51$ infrage.

Aufgabe 11 b

Schreiben Sie den Ausdruck $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{12}-\frac{1}{20}+\frac{1}{30}\mp\ldots+\frac{1}{6642}$ mithilfe eines Summenzeichens.

Lösung:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{12}-\frac{1}{20}\pm\ldots+\frac{1}{6642}=\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}-\frac{1}{4\cdot5}\pm\ldots+\frac{1}{k(k+1)}$$
$$=\sum_{n=1}^{k}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{81}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$$

Um k zu bestimmen, muss die Gleichung $k(k+1) = 6642$ gelöst werden. Mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen erhält man die beiden Lösungen $k_1 = 81$ und $k_2 = -82$. Da k positiv sein muss, kommt nur die Lösung $k = 81$ infrage.

Aufgabe 12

Bestimmen Sie die Lösungen $x \in \mathbb{Z}$ der Gleichung $\sum_{k=0}^{2} k\,x^k = 0$.

Lösung:

$$\sum_{k=0}^{2} k\,x^k = 0 \cdot x^0 + x + 2x^2 = x(1+2x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \ \vee \ x_2 = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$$

Aufgabe 13 a

Berechnen Sie den Wert der Summe $\sum_{j=0}^{4} \frac{1}{2^j}$.

Lösung:

$$\sum_{j=0}^{4} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{31}{16}$$

Aufgabe 13 b

Berechnen Sie den Wert der Summe $\sum_{k=0}^{4} \frac{k}{2^k}$.

Lösung:

$$\sum_{k=0}^{4} \frac{k}{2^k} = \frac{0}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} = \frac{13}{8}$$

Aufgabe 13 c

Berechnen Sie den Wert der Summe $\sum_{n=2}^{100} \frac{n+1}{n-1} - \sum_{k=2}^{100} \frac{k+2}{k}$.

Lösung:

$$\sum_{n=2}^{100} \frac{n+1}{n-1} - \sum_{k=2}^{100} \frac{k+2}{k} = \frac{3}{1} + \frac{4}{2} + \frac{5}{3} + \frac{6}{4} + \ldots + \frac{101}{99} - \frac{4}{2} - \frac{5}{3} - \frac{6}{4} - \ldots - \frac{101}{99} - \frac{102}{100}$$

$$= 3 - \frac{102}{100} = \frac{198}{100} = \frac{99}{50}$$

Aufgabe 13 d

Berechnen Sie den Wert der Summe $\sum_{k=0}^{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$.

Lösung:

$$\sum_{k=0}^{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} = \frac{85}{64}$$

Aufgabe 13 e

Berechnen Sie den Wert der Summe $\sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Lösung:

$$\sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \frac{(-1)^4}{4!} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{3}{8}$$

Aufgabe 13 f

Berechnen Sie den Wert der Summe $\sum_{k=0}^{99} (k+1)^3 - \sum_{k=2}^{101} (k-1)^3$.

Lösung:

$$\sum_{k=0}^{99} (k+1)^3 - \sum_{k=2}^{101} (k-1)^3 = \sum_{k=0}^{99} (k+1)^3 - \sum_{k=0}^{99} (k+2-1)^3 = 0$$

Aufgabe 13 g

Berechnen Sie den Wert der Summe $\sum_{m=-3}^{0} \frac{m+2}{m+4}$.

Lösung:

$$\sum_{m=-3}^{0} \frac{m+2}{m+4} = \frac{-3+2}{-3+4} + \frac{-2+2}{-2+4} + \frac{-1+2}{-1+4} + \frac{0+2}{0+4} = -1 + 0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

Aufgabe 13 h

Berechnen Sie den Wert der Summe $\sum_{n=-2}^{1} \frac{(-1)^n}{n+3}$.

Lösung:

$$\sum_{n=-2}^{1} \frac{(-1)^n}{n+3} = \frac{(-1)^{-2}}{-2+3} + \frac{(-1)^{-1}}{-1+3} + \frac{(-1)^0}{0+3} + \frac{(-1)^1}{1+3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

Aufgabe 13 i

Berechnen Sie den Wert der Summe $\sum_{k=1}^{100} \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)$.

Lösung:

$$\sum_{k=1}^{100} \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right) = \sqrt{1} - \sqrt{0} + \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{99} - \sqrt{98} + \sqrt{100} - \sqrt{99}$$

$$= \sqrt{100} = 10$$

Aufgabe 13 j

Berechnen Sie den Wert der Summe $\sum_{j=-4}^{0} \frac{|j|}{j+5}$.

Lösung:

$$\sum_{j=-4}^{0} \frac{|j|}{j+5} = \frac{4}{-4+5} + \frac{3}{-3+5} + \frac{2}{-2+5} + \frac{1}{-1+5} + \frac{0}{0+5} = \frac{77}{12}$$

Aufgabe 13 k

Berechnen Sie den Wert der Summe $\sum_{m=-2}^{4} \frac{m}{|m|+2}$.

Lösung:

$$\sum_{m=-2}^{4} \frac{m}{|m|+2} = \frac{-2}{2+2} + \frac{-1}{1+2} + \frac{0}{0+2} + \frac{1}{1+2} + \frac{2}{2+2} + \frac{3}{3+2} + \frac{4}{4+2} = \frac{19}{15}$$

Aufgabe 13 l

Berechnen Sie den Wert der Summe $\sum_{k=1}^{171} \left[k^2 - (k-1)^2\right]$.

Lösung:

$$\sum_{k=1}^{171} \left[k^2 - (k-1)^2\right] = 1^2 - 0^2 + 2^2 - 1^2 + 3^2 - 2^2 + 4^2 - 3^2 + \ldots$$

$$\ldots + 170^2 - 169^2 + 171^2 - 170^2 = 171^2$$

Aufgabe 14 a

Berechnen Sie den Wert des Produkts $\prod_{k=-3}^{3} 2^k$.

Lösung:

$$\prod_{k=-3}^{3} 2^k = 2^{-3} \cdot 2^{-2} \cdot 2^{-1} \cdot 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 2^0 = 1$$

Aufgabe 14 b

Berechnen Sie den Wert des Produkts $\prod_{k=-4}^{4} (k-1)\,k$.

Lösung:

$\prod_{k=-4}^{4} (k-1)\,k = 0$ da für $k = 0$ und $k = 1$ der Faktor $(k-1)\,k = 0$ ist.

Aufgabe 14 c

Berechnen Sie den Wert des Produkts $\prod_{k=2}^{247} \frac{2k^2}{2k^2 - 4k + 2}$.

Lösung:

$$\prod_{k=2}^{247} \frac{2k^2}{2k^2 - 4k + 2} = \prod_{k=2}^{247} \frac{2k^2}{2(k-1)^2} = \prod_{k=2}^{247} \left(\frac{k}{k-1}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2}{1}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \ldots \cdot \left(\frac{247}{246}\right)^2$$

$$= \left(\frac{247!}{246!}\right)^2 = \left(\frac{246! \cdot 247}{246!}\right)^2 = 247^2$$

Aufgabe 14 d

Berechnen Sie den Wert des Produkts $\prod_{k=0}^{7} \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)$.

Lösung:

$\prod_{k=0}^{7} \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right) = 0$ da für $k = 2$ und $k = 6$ der Faktor $\cos\left(\frac{k\pi}{4}\right) = 0$ ist.

Aufgabe 14 e

Berechnen Sie den Wert des Produkts $\prod_{k=1}^{171} (-1)^k \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$.

Lösung:

$\prod_{k=0}^{171} (-1)^k \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = 0$ da für alle geraden Zahlen k der Faktor $\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = 0$ ist.

Aufgabe 14 f

Berechnen Sie den Wert des Produkts $\prod_{j=0}^{10} \frac{1}{2^{2j+1}} \prod_{j=2}^{11} 4^j$.

Lösung:

$$\prod_{j=0}^{10} \frac{1}{2^{2j+1}} \prod_{j=2}^{11} 4^j = \prod_{j=0}^{10} 2^{-2j-1} \prod_{j=2}^{11} 2^{2j} = 2^{-1} \cdot 2^{-3} \cdot \prod_{j=2}^{10} 2^{-2j-1} \prod_{j=2}^{10} 2^{2j} \cdot 2^{22}$$

$$= 2^{18} \cdot \prod_{j=2}^{10} 2^{-2j-1} \cdot 2^{2j} = 2^{18} \cdot \prod_{j=2}^{10} 2^{-1} = 2^{18} \cdot 2^{-9} = 2^9 = 512$$

Aufgabe 14 g

Berechnen Sie den Wert des Produkts $\prod_{k=2}^{15} \frac{k-1}{k+1}$.

Lösung:

$$\prod_{k=2}^{15} \frac{k-1}{k+1} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 13 \cdot 14}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 15 \cdot 16} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 14!}{16!} = \frac{2 \cdot 14!}{14! \cdot 15 \cdot 16} = \frac{2}{240} = \frac{1}{120}$$

Aufgabe 14 h

Berechnen Sie den Wert des Produkts $\prod_{n=1}^{300} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Lösung:

$$\prod_{n=1}^{300} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \prod_{n=1}^{300} \frac{n+1}{n} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 300 \cdot 301}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 299 \cdot 300} = \frac{301!}{300!} = \frac{300! \cdot 301}{300!} = 301$$

Aufgabe 14 i

Berechnen Sie den Wert des Produkts $\prod_{j=0}^{11} \left(\frac{1}{4}\right)^j \prod_{j=0}^{11} 2^{2j}$.

Lösung:

$$\prod_{j=0}^{11}\left(\frac{1}{4}\right)^{j}\prod_{j=0}^{11}2^{2j}=\prod_{j=0}^{11}2^{-2j}\prod_{j=0}^{11}2^{2j}=\prod_{j=0}^{11}2^{-2j}\cdot 2^{2j}=\prod_{j=0}^{11}2^{0}=1$$

Aufgabe 14 j

Berechnen Sie den Wert des Produkts $\prod_{k=3}^{150}\frac{2k}{k-2}$.

Lösung:

$$\prod_{k=3}^{150}\frac{2k}{k-2}=\frac{2\cdot 3}{1}\cdot\frac{2\cdot 4}{2}\cdot\frac{2\cdot 5}{3}\cdot\frac{2\cdot 6}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2\cdot 150}{148}=2^{148}\cdot\frac{150!}{1\cdot 2\cdot 148!}$$

$$=2^{147}\cdot\frac{148!\cdot 149\cdot 150}{148!}=2^{147}\cdot 149\cdot 150$$

Aufgabe 14 k

Berechnen Sie den Wert des Produkts $\prod_{k=1}^{100}\frac{k}{k+1}$.

Lösung:

$$\prod_{k=1}^{100}\frac{k}{k+1}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 99\cdot 100}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot 100\cdot 101}=\frac{100!}{101!}=\frac{100!}{100!\cdot 101}=\frac{1}{101}$$

Aufgabe 14 l

Berechnen Sie den Wert des Produkts $\prod_{k=1}^{4}\sin\frac{(2k+1)\pi}{4}$.

Lösung:

$$\prod_{k=1}^{4}\sin\frac{(2k+1)\pi}{4}=\underbrace{\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}}\cdot\underbrace{\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)}_{=-\frac{1}{\sqrt{2}}}\cdot\underbrace{\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)}_{=-\frac{1}{\sqrt{2}}}\cdot\underbrace{\sin\left(\frac{9\pi}{4}\right)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{4}$$

Aufgabe 15 a

Berechnen Sie den Wert des Ausdrucks $\sum_{k=0}^{4}\left(\prod_{j=0}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{j}\right)$.

Lösung:

$$\sum_{k=0}^{4}\left(\prod_{j=0}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{j}\right)=\prod_{j=0}^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{j}+\prod_{j=0}^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j}+\prod_{j=0}^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{j}+\prod_{j=0}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{j}+\prod_{j=0}^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{j}$$

$$=1+1\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{16}=\frac{1681}{1024}$$

Aufgabe 15 b

Berechnen Sie den Wert des Produkts $\prod_{k=0}^{171}(-1)^{k}\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)$.

Lösung:

$\prod_{k=0}^{171} (-1)^k \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) = 0$ da für alle ungeraden Zahlen k der Faktor $\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) = 0$ ist.

Aufgabe 15 c

Berechnen Sie den Wert des Ausdrucks $\prod_{k=1}^{4} \left(\sum_{j=0}^{k} j \right)$.

Lösung:

$$\prod_{k=1}^{4} \left(\sum_{j=0}^{k} j \right) = \sum_{j=0}^{1} j \cdot \sum_{j=0}^{2} j \cdot \sum_{j=0}^{3} j \cdot \sum_{j=0}^{4} j = 1 \cdot (1+2) \cdot (1+2+3) \cdot (1+2+3+4) = 180$$

Aufgabe 15 d

Berechnen Sie den Wert der Summe $\sum_{k=12}^{21} (k^2 - 22k + 121)$.

Lösung:

$$\sum_{k=12}^{21} (k^2 - 22k + 121) = \sum_{k=12}^{21} (k-11)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 10^2 = 385$$

Aufgabe 15 e

Berechnen Sie den Wert des Ausdrucks $\prod_{j=1}^{6} \frac{1}{j+1} \left(j + \sum_{k=1}^{j} (k-1) \right)$.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{6} \frac{1}{j+1} \left(j + \sum_{k=1}^{j} (k-1) \right) &= \frac{1}{1+1} \left(1 + \sum_{k=1}^{1} (k-1) \right) \cdot \frac{1}{2+1} \left(2 + \sum_{k=1}^{2} (k-1) \right) \\
&\quad \cdot \frac{1}{3+1} \left(3 + \sum_{k=1}^{3} (k-1) \right) \cdot \frac{1}{4+1} \left(4 + \sum_{k=1}^{4} (k-1) \right) \\
&\quad \cdot \frac{1}{5+1} \left(5 + \sum_{k=1}^{5} (k-1) \right) \cdot \frac{1}{6+1} \left(6 + \sum_{k=1}^{6} (k-1) \right) \\
&= \frac{1}{2}(1+0) \cdot \frac{1}{3}(2+1) \cdot \frac{1}{4}(3+1+2) \cdot \frac{1}{5}(4+1+2+3) \\
&\quad \cdot \frac{1}{6}(5+1+2+3+4) \cdot \frac{1}{7}(6+1+2+3+4+5) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{6}{4} \cdot \frac{10}{5} \cdot \frac{15}{6} \cdot \frac{21}{7} = \frac{45}{4}
\end{aligned}$$

Aufgabe 16 a

Zeigen Sie Gleichheit oder Ungleichheit der Summen $\sum_{j=0}^{9} (3j+1) = \sum_{j=1}^{10} (3j-2)$.

Lösung:
Eine Indexverschiebung ergibt

$$\sum_{j=0}^{9}(3j+1)=\sum_{j=1}^{10}(3(j-1)+1)=\sum_{j=1}^{10}(3j-2).$$

Aufgabe 16 b

Zeigen Sie Gleichheit oder Ungleichheit der Produkte $\prod_{k=1}^{10}k^2=\prod_{k=1}^{9}(11-k)^2$.

Lösung:
Es gilt

$$\prod_{k=1}^{10}k^2=1^2\cdot2^2\cdot3^2\cdot\ldots\cdot10^2=1^2\cdot(11-9)^2\cdot(11-8)^2\cdot\ldots\cdot(11-1)^2=\prod_{k=1}^{9}(11-k)^2.$$

Aufgabe 16 c

Zeigen Sie Gleichheit oder Ungleichheit der Summen

$$\sum_{l=1}^{4}(6l-5)-\sum_{l=1}^{4}(5l-2)=\sum_{m=1}^{4}(m-3).$$

Lösung:

$$\sum_{l=1}^{4}(6l-5)-\sum_{l=1}^{4}(5l-2)=\sum_{l=1}^{4}[(6l-5)-(5l-2)]=\sum_{l=1}^{4}(l-3)=\sum_{m=1}^{4}(m-3)$$

Aufgabe 16 d

Zeigen Sie Gleichheit oder Ungleichheit der Summen $\sum_{l=1}^{5}l=\sum_{m=1}^{5}(6-m)$.

Lösung:
Es gilt

$$\sum_{l=1}^{5}l=1+2+3+4+5=(6-5)+(6-4)+(6-3)+(6-2)+(6-1)=\sum_{m=1}^{5}(6-m).$$

Aufgabe 16 e

Zeigen Sie Gleichheit oder Ungleichheit der Summen

$$\sum_{u=1}^{4}(u^2-1)-\sum_{v=1}^{4}(2v-2)=\sum_{w=1}^{4}(w-1)^2.$$

Lösung:

$$\sum_{u=1}^{4}(u^2-1)-\sum_{v=1}^{4}(2v-2)=\sum_{w=1}^{4}(w^2-1)-\sum_{w=1}^{4}(2w-2)$$

$$=\sum_{w=1}^{4}(w^2-1-2w+2)=\sum_{w=1}^{4}(w^2-2w+1)=\sum_{w=1}^{4}(w-1)^2$$

Aufgabe 16 f

Zeigen Sie Gleichheit oder Ungleichheit des Ausdrucks $\prod_{l=1}^{5}\sum_{m=1}^{5} m\,l = \sum_{l=1}^{5}\prod_{m=1}^{5} m\,l.$

Lösung:

$$\prod_{l=1}^{5}\sum_{m=1}^{5} m\,l = \prod_{l=1}^{5} l \cdot \sum_{m=1}^{5} m = \left(\sum_{m=1}^{5} m\right)^5 \prod_{l=1}^{5} l = \left(\sum_{l=1}^{5} l\right)^5 \prod_{m=1}^{5} m \neq \sum_{l=1}^{5}\prod_{m=1}^{5} m\,l$$

Aufgabe 16 g

Zeigen Sie Gleichheit oder Ungleichheit der Summen

$$\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=j}^{4}(i+j-1) = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{i}(i+j-1).$$

Lösung:

Berechnet werden beide Seiten der Gleichung. Die linke Seite ergibt

$$\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=j}^{4}(i+j-1) = \sum_{i=1}^{4} i + \sum_{i=2}^{4}(i+1) + \sum_{i=3}^{4}(i+2) + \sum_{i=4}^{4}(i+3)$$
$$= (1+2+3+4) + (3+4+5) + (5+6) + 7 = 40.$$

Die rechte Seite ergibt

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{i}(i+j-1) = \sum_{j=1}^{1} j + \sum_{j=1}^{2}(j+1) + \sum_{j=1}^{3}(j+2) + \sum_{j=1}^{4}(j+3)$$
$$= 1 + (2+3) + (3+4+5) + (4+5+6+7) = 40.$$

Da beide Seiten das selbe Ergebnis liefern, ist die Gleichheit der Summen bewiesen.

Aufgabe 17 a

Vervollständigen Sie die Gleichung $\sum_{l=0}^{n} 2^l = 1 + \sum_{k=0}$ $= \left(\sum_{m=0}\right) + 2^n.$

Lösung:

$$\sum_{l=0}^{n} 2^l = 1 + \sum_{k=1}^{n} 2^k = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1} = \sum_{m=0}^{n-1} 2^m + 2^n$$

Aufgabe 17 b

Vervollständigen Sie die Gleichung $\sum_{k=2}^{n} (-1)^k a_{k-1} = \sum_{m=} (-1)\, a_{n-m}.$

Lösung:

$$\sum_{k=2}^{n} (-1)^k a_{k-1} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \pm \ldots + (-1)^n a_{n-1} = \sum_{m=1}^{n-1} (-1)^{n-m+1} a_{n-m}$$

Aufgabe 18 a

Zeigen Sie durch Indexverschiebung, dass beide Summen

$$\sum_{l=2}^{10} \frac{l}{l^2+1} = \sum_{k=-2}^{6} \frac{k+4}{k^2+8k+17}$$ identisch sind.

Lösung:

$$\sum_{l=2}^{10} \frac{l}{l^2+1} = \sum_{k=2}^{10} \frac{k}{k^2+1} = \sum_{k=-2}^{6} \frac{k+4}{(k+4)^2+1} = \sum_{k=-2}^{6} \frac{k+4}{k^2+8k+16+1}$$
$$= \sum_{k=-2}^{6} \frac{k+4}{k^2+8k+17}$$

Aufgabe 18 b

Zeigen Sie durch Indexverschiebung, dass beide Summen

$$\sum_{l=3}^{10} \frac{l^2}{l-1} = \sum_{k=0}^{7} \frac{k^2+6k+9}{k+2}$$ identisch sind.

Lösung:

$$\sum_{l=3}^{10} \frac{l^2}{l-1} = \sum_{k=3}^{10} \frac{k^2}{k-1} = \sum_{k=0}^{7} \frac{(k+3)^2}{k+3-1} = \sum_{k=0}^{7} \frac{k^2+6k+9}{k+3-1} = \sum_{k=0}^{7} \frac{k^2+6k+9}{k+2}$$

Aufgabe 18 c

Zeigen Sie durch Indexverschiebung, dass beide Summen

$$\sum_{n=10}^{29} \frac{1}{n^2-18n} = \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k^2-81}$$ identisch sind.

Lösung:

$$\sum_{n=10}^{29} \frac{1}{n^2-18n} = \sum_{k=10}^{29} \frac{1}{k^2-18k} = \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{(k+9)^2-18(k+9)}$$
$$= \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k^2+18k+81-18k-162} = \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k^2-81}$$

Aufgabe 18 d

Zeigen Sie durch Indexverschiebung, dass beide Summen

$$\sum_{k=4}^{25} \frac{1}{k^2-9} = \sum_{n=7}^{28} \frac{1}{n^2-6n}$$ identisch sind.

Lösung:

$$\sum_{k=4}^{25} \frac{1}{k^2-9} = \sum_{n=4}^{25} \frac{1}{n^2-9} = \sum_{n=7}^{28} \frac{1}{(n-3)^2-9} = \sum_{n=7}^{28} \frac{1}{n^2-6n+9-9} = \sum_{n=7}^{28} \frac{1}{n^2-6n}$$

Aufgabe 19

Geben Sie die folgende Menge M konkret an. Benutzen Sie für Ihre Behauptung die vollständige Induktion.

$$M = \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \frac{2n+1}{2^n} < \frac{1}{3} \right\}$$

Lösung:

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 6$ gilt $\frac{2n+1}{2^n} < \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 3(2n+1) < 2^n$.

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = 6$, denn

  $$3(2 \cdot 6 + 1) = 39 < 2^6 = 64.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 6$ gilt:

  $$3(2n+1) < 2^n \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

  $$3(2(n+1)+1) < 2^{n+1}.$$

  Mit der Induktionsannahme $(\star)$ ergibt sich

  $$3(2(n+1)+1) = 3(2n+1) + 6 \overset{(\star)}{<} 2^n + 6 \leq 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

■

Aufgabe 20

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Hinweis: Wenden Sie den binomischen Satz an!

Lösung:

Wendet man hier den binomischen Satz an und setzt anschließend $a = b = 1$ ein, dann erhält man unmittelbar die gewünschte Aussage.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad \text{also} \quad (1+1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k},$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Aufgabe 21
Sei $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion die Gültigkeit der Gleichung

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Lösung:

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = 1$, denn

$$\sum_{k=0}^{1-1} q^k = q^0 = 1 = \frac{q^1 - 1}{q - 1} = \frac{q - 1}{q - 1} = 1.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n + 1$ wahr ist; also

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

  Mit der Induktionsannahme $(\star)$ ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n-1} q^k + q^n \overset{(\star)}{=} \frac{q^n - 1}{q - 1} + q^n = \frac{q^n - 1 + (q - 1)\, q^n}{q - 1} = \frac{q^n - 1 + q^{n+1} - q^n}{q - 1}$$
$$= \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

■

Aufgabe 22
Beweisen Sie mithilfe der vollständigen Induktion.

$$(b+1)^n > 1 + \frac{n^2 b^2}{4} \qquad \text{für} \quad n \geq 2,\ b > 0.$$

Lösung:

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = 2$, denn

$$(b+1)^2 = b^2 + 2b + 1 > 1 + \frac{2^2 \cdot b^2}{4} = 1 + b^2.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt:

$$(b+1)^n > 1 + \frac{n^2 b^2}{4} \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

$$(b+1)^{n+1} > 1 + \frac{(n+1)^2 b^2}{4}.$$

Mit der Induktionsannahme $(\star)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
(b+1)^{n+1} &= (b+1)(b+1)^n \overset{(\star)}{>} (b+1)\left(1 + \frac{n^2 b^2}{4}\right) \\
&= b\left(1 + \frac{n^2 b^2}{4}\right) + 1 + \frac{n^2 b^2}{4} \\
&= b\left(1 + \frac{n^2 b^2}{4}\right) + 1 + \frac{n^2 b^2}{4} + \frac{2n+1}{4} b^2 - \frac{2n+1}{4} b^2 \\
&= b\left(1 + \frac{n^2 b^2}{4}\right) - \frac{2n+1}{4} b^2 + 1 + \frac{(n+1)^2 b^2}{4} \\
&= b\left[\underbrace{\left(\frac{nb}{2} - 1\right)^2}_{>0} + \underbrace{b \cdot \frac{2n-1}{4}}_{>0}\right] + 1 + \frac{(n+1)^2 b^2}{4} \\
&> 1 + \frac{(n+1)^2 b^2}{4}.
\end{aligned}$$

■

Aufgabe 23

Beweisen Sie mithilfe der vollständigen Induktion, dass

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \;\wedge\; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n \in \mathbb{R} \qquad \text{gilt:} \qquad \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

Lösung:

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = 1$, denn

$$\left| \sum_{k=1}^{1} a_k \right| = |a_1| \leq \sum_{k=1}^{1} |a_k| = |a_1|.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |a_k| .$$

  Mit der Induktionsannahme $(\star)$ und der Dreiecksungleichung (vgl. Satz 3.2) $|a+b| \leq |a| + |b| \quad (\star\star)$ ergibt sich

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} a_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} \right| \overset{(\star\star)}{\leq} \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| + |a_{n+1}| \overset{(\star)}{\leq} \sum_{k=1}^{n} |a_k| + |a_{n+1}|$$
$$= \sum_{k=1}^{n+1} |a_k| .$$

■

Aufgabe 24

Zeigen Sie mittels des Beweisprinzips der vollständigen Induktion.

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt} \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right)^2 \leq 2n .$$

Lösung:

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = 1$, denn

$$\left(\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} \right)^2 = \left(\frac{1}{1} \right)^2 = 1 \leq 2 \cdot 1 = 2 .$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right)^2 \leq 2n \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \sqrt{2n} \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \right)^2 \leq 2(n+1) .$$

Mit der Induktionsannahme $(\star)$ ergibt sich

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)^2 + 2\cdot\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\overset{(\star)}{\leq} 2n+\frac{2}{n+1}\sqrt{2n}+\frac{1}{(n+1)^2} = 2n+2\,\frac{(n+1)\sqrt{2n}+\frac{1}{2}}{(n+1)^2}$$

$$\leq 2n+2\,\frac{(n+1)\sqrt{2n}+\frac{1}{2}(n+1)}{(n+1)^2} = 2n+2\,\frac{(n+1)\left(\sqrt{2n}+\frac{1}{2}\right)}{(n+1)^2}$$

$$= 2n+2\underbrace{\frac{\sqrt{2n}+\frac{1}{2}}{n+1}}_{<1\ (\star\star)} \leq 2n+2 = 2(n+1).$$

Zu beweisen bleibt noch die Aussage $(\star\star)$. Für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}
& 0 < \left(n-\frac{1}{2}\right)^2 \\
\Leftrightarrow\quad & 0 < n^2-n+\frac{1}{4} && |\ +2n \\
\Leftrightarrow\quad & 2n < n^2+n+\frac{1}{4} \\
\Leftrightarrow\quad & 2n < \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 && |\ \sqrt{\ } \\
\Leftrightarrow\quad & \sqrt{2n} < n+\frac{1}{2} && |\ +\frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow\quad & \sqrt{2n}+\frac{1}{2} < n+1 && |\ :(n+1) \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{\sqrt{2n}+\frac{1}{2}}{n+1} < 1
\end{aligned}$$

■

Aufgabe 25

Für welche natürlichen Zahlen n gilt die *Bernoullische* Ungleichung

$$(1+h)^n \geq 1+nh \qquad \text{mit} \qquad h \geq -1.$$

Beweisen Sie Ihre Vermutung mithilfe der vollständigen Induktion.

Lösung:

Behauptung: Für alle $n\in\mathbb{N}$ und $h\geq -1$ gilt $(1+h)^n \geq 1+nh$.

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = 1$, denn

$$(1+h)^1 = 1+h \geq 1+1\cdot h = 1+h.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt:

$$(1+h)^n \geq 1+nh \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

$$(1+h)^{n+1} \geq 1+(n+1)h.$$

  Mit der Induktionsannahme $(\star)$ und der Voraussetzung $h \geq -1$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}(1+h)^{n+1} &= \underbrace{(1+h)}_{\geq 0}(1+h)^n \overset{(\star)}{\geq} \underbrace{(1+h)}_{\geq 0}(1+nh) = 1+nh+h+\underbrace{nh^2}_{>0} \\ &\geq 1+nh+h = 1+(n+1)h\end{aligned}$$

■

Aufgabe 26

Zeigen Sie mit der Methode der vollständigen Induktion: Die Anzahl $D(n)$ der Diagonalen in einem konvexen n-Eck kann für $n \geq 3$ nach der Formel

$$D(n) = \frac{n}{2}(n-3) \quad \text{berechnet werden.}$$

Lösung:

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = 3$, also einem Dreieck, denn ein Dreieck hat keine Diagonalen und es ist

$$D(3) = \frac{3}{2}(3-3) = 0.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ gilt:

$$D(n) = \frac{n}{2}(n-3) \quad (\star)$$

  Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

$$D(n+1) = \frac{n+1}{2}(n-2).$$

Betrachten Sie dazu ein beliebiges konvexes $(n+1)$ - Eck und zeichnen eine Diagonale von einem beliebigen Eckpunkt zu einem übernächsten Eckpunkt ein. Es entsteht dann ein Dreieck und ein konvexes n - Eck. Das Dreieck hat keine und das konvexe n - Eck hat wegen $(\star)$ $D(n)$ Diagonalen. Außerdem muss man noch die Diagonalen von der Ecke des Dreiecks, die nicht eine Ecke des n - Ecks ist, zu allen Ecken des n - Ecks, die nicht Eckpunkt des Dreiecks sind zählen. Nicht zu vergessen ist die Diagonale, mit der das Dreieck abgeteilt wurde. Dann folgt

$$\begin{aligned} D(n+1) &= D(n)+(n-2)+1 \overset{(\star)}{=} \frac{n}{2}(n-3)+(n-2)+1 = \frac{n}{2}(n-3)+n-1 \\ &= \frac{n(n-3)+2(n-1)}{2} = \frac{n^2-3n+2n-2}{2} = \frac{n^2-n-2}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n-2)}{2}. \end{aligned}$$

■

Aufgabe 27

Zeigen Sie mit der Methode der vollständigen Induktion: Wenn n Personen auf einer Party miteinander anstoßen, dann klingelt es $K(n) = \frac{n(n-1)}{2}$ mal.

Lösung:

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = 1$, denn eine Person kann mit niemandem anstoßen.

$$K(1) = \frac{1 \cdot (1-1)}{2} = 0$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt:

$$K(n) = \frac{n(n-1)}{2} \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

$$K(n+1) = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Wählt man von den $n+1$ - Personen eine beliebige Person x aus, dann bleiben noch n - Personen übrig, die nach $(\star)$ genau $K(n)$ - mal untereinander anstoßen können. Die Person x kann dann mit den n - Personen genau n - mal anstoßen. Damit ergibt sich

$$K(n+1) = K(n)+n \overset{(\star)}{=} \frac{n(n-1)}{2}+n = \frac{n(n-1)+2n}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{(n+1)n}{2}.$$

■

Aufgabe 28

Zeigen Sie mit der Methode der vollständigen Induktion: Für alle $m \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$ und $n > m$ gilt

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^m \binom{n-1}{m}.$$

Lösung:

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = 1$, denn

$$\sum_{k=0}^{0} (-1)^k \binom{1}{k} = (-1)^0 \binom{1}{0} = 1 = (-1)^0 \binom{1-1}{0} = 1 \cdot \binom{0}{0} = 1.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n > m$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^m \binom{n-1}{m} \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n+1}{k} = (-1)^m \binom{n}{m}.$$

Mit der Induktionsannahme $(\star)$ und der Identität (Satz 2.3)

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \quad (\star\star)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n+1}{k} &= (-1)^0 \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \binom{n+1}{k} \\
&\overset{(\star\star)}{=} 1 + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] = 1 + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \binom{n}{k-1} \\
&= (-1)^0 \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \binom{n}{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \binom{n}{k-1} \overset{(\star)}{=} (-1)^m \binom{n-1}{m} + \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \\
&= (-1)^m \binom{n-1}{m} + \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} + (-1)^{m+1} \binom{n}{m} - (-1)^{m+1} \binom{n}{m}
\end{aligned}$$

$$= (-1)^m \binom{n-1}{m} + \sum_{k=0}^{m} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} - (-1)(-1)^m \binom{n}{m}$$

$$= (-1)^m \binom{n-1}{m} + (-1) \cdot \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{k} + (-1)^m \binom{n}{m}$$

$$\overset{(\star)}{=} (-1)^m \binom{n-1}{m} - (-1)^m \binom{n-1}{m} + (-1)^m \binom{n}{k} = (-1)^m \binom{n}{k}.$$

■

Aufgabe 29

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \qquad \textbf{Hinweis:} \quad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Lösung:

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = 1$, denn

$$\sum_{k=0}^{1} (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^0 \binom{1}{0} + (-1)^1 \binom{1}{1} = 1 \frac{1!}{(1-0)!\,0!} - 1 \frac{1!}{(1-1)!\,1!} = 0.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} = 0.$$

Mit der Induktionsannahme $(\star)$ und dem in der Aufgabenstellung gegebenen Hinweis $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ $(\star\star)$ ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} = \underbrace{(-1)^0 \binom{n+1}{0}}_{=1} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k} + (-1)^{n+1} \underbrace{\binom{n+1}{n+1}}_{=1}$$

$$\overset{(\star\star)}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) + (-1)^{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k} = \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k-1} + (-1)^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k-1} + (-1)^{n+1}$$

$$\overset{(\star)}{=} 0 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k-1} + (-1)^{n+1}\underbrace{\binom{n}{n}}_{=1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\binom{n}{k} + (-1)^{n+1}\binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}$$

$$= (-1)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} \overset{(\star)}{=} (-1)\cdot 0 = 0.$$

■

Aufgabe 30

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1} \qquad \text{für alle} \qquad n, m \in \mathbb{N}, \quad m \le n.$$

Lösung:

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = m$, denn

$$\sum_{k=m}^{m}\binom{k}{m} = \binom{m}{m} = \frac{m!}{(m-m)!\,m!} = 1 = \binom{m+1}{m+1}$$

$$= \frac{(m+1)!}{(m+1-m-1)!\,(m+1)!} = 1.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge m$ gilt:

$$\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1} \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

$$\sum_{k=m}^{n+1}\binom{k}{m} = \binom{n+2}{m+1}.$$

Mit der Induktionsannahme $(\star)$ ergibt sich

$$\sum_{k=m}^{n+1}\binom{k}{m} = \sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m} + \binom{n+1}{m} \overset{(\star)}{=} \binom{n+1}{m+1} + \binom{n+1}{m}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n+1-m-1)!\,(m+1)!} + \frac{(n+1)!}{(n-m+1)!\,m!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n-m)!\,(m+1)!} + \frac{(n+1)!}{(n-m+1)!\,m!}$$

$$= \frac{(n+1)!\,(n-m+1)}{(n-m)!\,(n-m+1)\,(m+1)!} + \frac{(n+1)!\,(m+1)}{(n-m+1)!\,m!\,(m+1)}$$

$$= \frac{(n+1)!\,(n-m+1)}{(n-m+1)!\,(m+1)!} + \frac{(n+1)!\,(m+1)}{(n-m+1)!\,(m+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!\,(n-m+1+m+1)}{(n-m+1)!\,(m+1)!} = \frac{(n+1)!\,(n+2)}{(n-m+1)!\,(m+1)!}$$

$$= \frac{(n+2)!}{(n-m+1)!\,(m+1)!} = \frac{(n+2)!}{(n+2-m-1)!\,(m+1)!} = \binom{n+2}{m+1}.$$

■

Aufgabe 31

Zeigen Sie mithilfe der vollständigen Induktion, dass

$$\binom{n}{k} = \sum_{j=1}^{n}\binom{j-1}{k-1} \qquad \text{für alle } n \geq 1 \text{ und alle } k \in \mathbb{N} \text{ mit } 1 \leq k \leq n \text{ gilt.}$$

Hinweis: Es ist $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

Lösung:

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = 1$, denn

$$\binom{1}{1} = \frac{1!}{(1-1)!\,1!} = 1 = \sum_{j=1}^{1}\binom{j-1}{k-1} = \binom{1-1}{1-1} = \binom{0}{0} = \frac{0!}{(0-0)!\,0!} = \frac{1}{1} = 1.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \sum_{j=1}^{n}\binom{j-1}{k-1} \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

$$\binom{n+1}{k} = \sum_{j=1}^{n+1} \binom{j-1}{k-1}.$$

  Beachten Sie den in der Aufgabenstellung gegebenen Hinweis und ersetzen Sie dort n durch $n+1$. Dann ergibt sich die Identität $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ $(\star\star)$ und mit der Induktionsannahme $(\star)$ erhält man

$$\binom{n+1}{k} \overset{(\star\star)}{=} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \overset{(\star)}{=} \sum_{j=1}^{n} \binom{j-1}{k-1} + \binom{n}{k-1} = \sum_{j=1}^{n+1} \binom{j-1}{k-1}.$$

■

Aufgabe 32 a

Beweisen Sie für $x \leq 0$ die Gültigkeit der Ungleichung

$$(1+x)^n \leq 1 + nx + n(n-1)\frac{x^2}{2}$$

mit vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}_0$. Finden Sie die **kleinste** natürliche Zahl $n_0 \in \mathbb{N}_0$, für die die Ungleichung wahr ist.

Lösung:
Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq n_0 = 0$ gilt

$$(1+x)^n \leq 1 + nx + n(n-1)\frac{x^2}{2}, \quad \text{falls } x \leq 0.$$

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = 0$, denn

$$(1+x)^0 = 1 \leq 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot (0-1)\frac{x^2}{2} = 1.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 0$ gilt:

$$(1+x)^n \leq 1 + nx + n(n-1)\frac{x^2}{2} \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

$$(1+x)^{n+1} \leq 1 + (n+1)x + (n+1)n\frac{x^2}{2}.$$

  Mit der Induktionsannahme $(\star)$ ergibt sich

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \overset{(\star)}{\leq} (1+x)\left(1+nx+n(n-1)\frac{x^2}{2}\right) \\
&= 1+nx+n(n-1)\frac{x^2}{2}+x+nx^2+\underbrace{n(n-1)\frac{x^3}{2}}_{\leq 0 \text{ da } x\leq 0} \\
&\leq 1+nx+n(n-1)\frac{x^2}{2}+x+nx^2 \\
&= 1+(n+1)x+(n(n-1)+2n)\frac{x^2}{2} \\
&= 1+(n+1)x+(n^2-n+2n)\frac{x^2}{2} \\
&= 1+(n+1)x+(n^2+n)\frac{x^2}{2} = 1+(n+1)x+(n+1)n\frac{x^2}{2}.
\end{aligned}
$$

■

Aufgabe 32 b

Beweisen Sie die Gültigkeit der Ungleichung $2^n > n^2+6n-4$ mit vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}_0$. Finden Sie die **kleinste** natürliche Zahl $n_0 \in \mathbb{N}_0$, für die die Ungleichung wahr ist.

Lösung:

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0 = 7$ gilt $2^n > n^2+6n-4$.

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = 7$, denn

  $$2^7 = 128 > 7^2+6\cdot 7-4 = 49+42-4 = 87.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 7$ gilt:

  $$2^n > n^2+6n-4 \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

  $$2^{n+1} > (n+1)^2+6(n+1)-4.$$

  Mit der Induktionsannahme $(\star)$ ergibt sich

$$
\begin{aligned}
2^{n+1} &= 2\cdot 2^n \overset{(\star)}{>} 2(n^2+6n-4) = 2n^2+12n-8 \\
&= \underbrace{n^2+2n+1}_{(n+1)^2}+\underbrace{6n+6}_{6(n+1)}+\underbrace{n^2+4n-15}_{>-4 \text{ für } n\geq 7} > (n+1)^2+6(n+1)-4.
\end{aligned}
$$

■

Aufgabe 32 c

Beweisen Sie mithilfe der vollständigen Induktion $\prod_{k=0}^{n}(2^{2^k}+1)=2^{2^{n+1}}-1$.

Lösung:

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n=0$, denn

$$\prod_{k=0}^{0}(2^{2^k}+1)=2^{2^0}+1=2^1+1=2+1=3=2^{2^{0+1}}-1=2^2-1=4-1=3.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n\in\mathbb{N}_0$ mit $n\geq 0$ gilt:

$$\prod_{k=0}^{n}(2^{2^k}+1)=2^{2^{n+1}}-1 \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

$$\prod_{k=0}^{n+1}(2^{2^k}+1)=2^{2^{n+2}}-1.$$

  Mit der Induktionsannahme $(\star)$ und der dritten binomischen Formel ergibt sich

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n+1}(2^{2^k}+1)&=\left[\prod_{k=0}^{n}(2^{2^k}+1)\right](2^{2^{n+1}}+1)\overset{(\star)}{=}(2^{2^{n+1}}-1)(2^{2^{n+1}}+1)\\&=\left(2^{2^{n+1}}\right)^2-1^2=2^{2\cdot 2^{n+1}}-1=2^{2^{n+2}}-1.\end{aligned}$$

■

Aufgabe 32 d

Beweisen Sie die Gültigkeit der Ungleichung

$$\frac{1}{n!}+\frac{5}{(n+2)!}\geq\frac{5}{(n+1)!}$$

mit vollständiger Induktion für $n\in\mathbb{N}_0$. Finden Sie die **kleinste** natürliche Zahl $n_0\in\mathbb{N}_0$, für die die Ungleichung wahr ist.

Lösung:

Behauptung: Für alle $n\in\mathbb{N}$ mit $n\geq n_0=3$ gilt $\frac{1}{n!}+\frac{5}{(n+2)!}\geq\frac{5}{(n+1)!}$.

Wird diese Ungleichung auf beiden Seiten mit dem Term $(n+2)!$ multipliziert, dann erhält man die einfacher zu beweisende Ungleichung:

$$\begin{aligned}
&\frac{(n+2)!}{n!}+\frac{5(n+2)!}{(n+2)!}\geq\frac{5(n+2)!}{(n+1)!}\\
\Leftrightarrow\quad&\frac{n!(n+1)(n+2)}{n!}+\frac{5(n+2)!}{(n+2)!}\geq\frac{5(n+1)!(n+2)}{(n+1)!}\\
\Leftrightarrow\quad&(n+1)(n+2)+5\geq 5(n+2)\\
\Leftrightarrow\quad&n^2+3n+7\geq 5n+10\\
\Leftrightarrow\quad&n^2-2n-3\geq 0
\end{aligned}$$

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n=3$, denn

  $$3^2-2\cdot 3-3=9-6-3=0\geq 0.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n\in\mathbb{N}$ mit $n\geq 3$ gilt:

  $$n^2-2n-3\geq 0\quad(\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

  $$(n+1)^2-2(n+1)-3\geq 0.$$

  Mit der Induktionsannahme $(\star)$ ergibt sich

  $$(n+1)^2-2(n+1)-3=n^2+2n+1-2n-2-3\overset{(\star)}{\geq}2n-1\geq 0.$$

■

Aufgabe 33 a

Für **welche** $n\in\mathbb{N}$ gilt die Ungleichung $2^n<n!$? Beweisen Sie Ihre Behauptung mit vollständiger Induktion.

Lösung:
Behauptung: Für alle $n\in\mathbb{N}$ mit $n\geq 4$ gilt $2^n<n!$.

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n=4$, denn

  $$2^4=16<4!=24.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ gilt:

  $$2^n < n! \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

  $$2^{n+1} < (n+1)!.$$

  Mit der Induktionsannahme $(\star)$ ergibt sich

  $$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{(\star)}{<} 2 \cdot n! < \underbrace{(n+1)}_{>2} n! = (n+1)!.$$

■

Aufgabe 33 b

Für **welche** $n \in \mathbb{N}$ gilt die Ungleichung $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$? Beweisen Sie Ihre Behauptung mit vollständiger Induktion.

Lösung:

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$.

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = 2$, denn

  $$\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} > \sqrt{2}.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt:

  $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n} \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

  $$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n+1}.$$

  Mit der Induktionsannahme $(\star)$ ergibt sich

  $$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{(\star)}{>} \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{(\star\star)}{>} \sqrt{n+1}.$$

Die Gültigkeit der Ungleichung $(\star\star)$ ergibt sich aus der folgenden Überlegung. Es ist:

$$
\begin{aligned}
& n > 0 && | \, +n^2 \\
\Leftrightarrow \quad & n^2 + n > n^2 && \\
\Leftrightarrow \quad & n(n+1) > n^2 && | \, \sqrt{\ } \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{n}\sqrt{n+1} > n && | \, +1 \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{n}\sqrt{n+1} + 1 > n+1 && | : \sqrt{n+1} \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \frac{n+1}{\sqrt{n+1}} && \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1} &&
\end{aligned}
$$

■

Aufgabe 33 c

Für **welche** $n \in \mathbb{N}$ gilt die Ungleichung $2^n < 3n(n+1)$? Beweisen Sie Ihre Behauptung mit vollständiger Induktion.

Lösung :

Die Ungleichung $2^n < 3n(n+1)$ ist nur für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq 7$ richtig. Um das zu beweisen, wird mit vollständiger Induktion gezeigt, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 8$ die Behauptung $2^n > 3n(n+1)$ wahr ist.

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = 8$, denn

$$2^8 = 256 > 3 \cdot 8(8+1) = 24 \cdot 9 = 216.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 8$ gilt :

$$2^n > 3n(n+1) \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist ; also

$$2^{n+1} > 3(n+1)(n+2).$$

  Mit der Induktionsannahme $(\star)$ und der Tatsache, dass für $n \geq 8$ die Beziehung $n^2 > n+2$ $(\star\star)$ offensichtlich richtig ist, ergibt sich

$$
\begin{aligned}
2^{n+1} = 2 \cdot 2^n &\overset{(\star)}{>} 2 \cdot 3n(n+1) = 3(2n^2 + 2n) = 3(n^2 + 2n + n^2) \\
&\overset{(\star\star)}{>} 3(n^2 + 2n + n + 2) = 3(n^2 + 3n + 2) = 3(n+1)(n+2).
\end{aligned}
$$

■

Aufgabe 33 d

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$.

Lösung:

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n=2$, denn

$$\prod_{k=2}^{2}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=1-\frac{1}{2^2}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=\frac{2+1}{2\cdot 2}=\frac{3}{4}.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n\in\mathbb{N}$ mit $n\geq 2$ gilt:

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{n+1}{2n}\quad(\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

$$\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{n+2}{2(n+1)}.$$

  Mit der Induktionsannahme $(\star)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)&=\left[\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\right]\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\overset{(\star)}{=}\frac{n+1}{2n}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\&=\frac{n+1}{2n}\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}=\frac{n^2+2n+1-1}{2n(n+1)}=\frac{n(n+2)}{2n(n+1)}=\frac{n+2}{2(n+2)}.\end{aligned}$$

■

Aufgabe 33 e

Für **welche** $n\in\mathbb{N}$ gilt die Ungleichung $2^n>n^3$? Beweisen Sie Ihre Behauptung mit vollständiger Induktion.

Lösung:

Behauptung: Für alle $n\in\mathbb{N}$ mit $n\geq 10$ gilt $2^n>n^3$.

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n=10$, denn

$$2^{10}=1024>10^3=1000.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 10$ gilt:

  $$2^n > n^3 \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

  $$2^{n+1} > (n+1)^3.$$

  Mit der Induktionsannahme $(\star)$ ergibt sich

  $$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{(\star)}{>} 2 \cdot n^3 \overset{(\star\star)}{>} (n+1)^3.$$

Die Gültigkeit der Ungleichung $(\star\star)$ ergibt sich aus:

$$\begin{aligned}
& (\sqrt[3]{2} - 1)\, n > 1 && \mid \text{wegen } n \geq 10 \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt[3]{2}\, n - n > 1 && \mid +n \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt[3]{2}\, n > n + 1 && \mid (\ )^3 \\
\Leftrightarrow \quad & 2n^3 > (n+1)^3
\end{aligned}$$

■

Aufgabe 33 f

Für **welche** $n \in \mathbb{N}$ gilt die Ungleichung $e^n > n+1$? Beweisen Sie Ihre Behauptung mit vollständiger Induktion.

Lösung:
Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $e^n > n+1$.

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = 1$, denn

  $$e^1 = e > 1 + 1 = 2.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt:

  $$e^n > n + 1 \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

  $$e^{n+1} > n + 2.$$

  Mit der Induktionsannahme $(\star)$ ergibt sich

  $$e^{n+1} = e \cdot e^n \overset{(\star)}{>} e \cdot (n+1) = e \cdot n + e > n + e > n + 2.$$

■

Aufgabe 33 g

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion $\sum_{k=2}^{n} \frac{k}{2^{k-1}} = 3 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$.

Lösung:

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = 2$, denn

$$\sum_{k=2}^{2} \frac{k}{2^{k-1}} = \frac{2}{2^{2-1}} = \frac{2}{2} = 1 = 3 - \frac{2+2}{2^{2-1}} = 3 - \frac{4}{2} = 3 - 2 = 1.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{k}{2^{k-1}} = 3 - \frac{n+2}{2^{n-1}} \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{k}{2^{k-1}} = 3 - \frac{n+3}{2^{n}}.$$

  Mit der Induktionsannahme $(\star)$ ergibt sich

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{k}{2^{k-1}} = \sum_{k=2}^{n} \frac{k}{2^{k-1}} + \frac{n+1}{2^{n}} \overset{(\star)}{=} 3 - \frac{n+2}{2^{n-1}} + \frac{n+1}{2^{n}} = 3 - \frac{2(n+2) - n - 1}{2^{n}}$$
$$= 3 - \frac{2n + 4 - n - 1}{2^{n}} = 3 - \frac{n+3}{2^{n}}.$$

■

Aufgabe 33 h

Für **welche** $n \in \mathbb{N}$ gilt die Ungleichung $2^n > n^2$? Beweisen Sie Ihre Behauptung mit vollständiger Induktion.

Lösung:

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5$ gilt $2^n > n^2$.

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = 5$, denn

$$2^5 = 32 > 5^2 = 25.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5$ gilt:

$$2^n > n^2 \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

$$2^{n+1} > (n+1)^2.$$

  Mit der Induktionsannahme $(\star)$ ergibt sich

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{(\star)}{>} 2n^2 \overset{(\star\star)}{>} (n+1)^2.$$

Die Gültigkeit der Ungleichung $(\star\star)$ ergibt sich aus:

$$\begin{aligned} & n(\sqrt{2}-1) > 1 && \mid \text{wegen } n \geq 5 \\ \Leftrightarrow \quad & \sqrt{2}n - n > 1 && \mid +n \\ \Leftrightarrow \quad & \sqrt{2}n > n+1 && \mid (\,)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 2n^2 > (n+1)^2 \end{aligned}$$

■

Aufgabe 33 i

Für **welche** $n \in \mathbb{N}$ gilt die Ungleichung $2n+1 < 2^n$? Beweisen Sie Ihre Behauptung mit vollständiger Induktion.

Lösung:
Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ gilt $2n+1 < 2^n$.

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = 3$, denn

$$2 \cdot 3 + 1 = 7 < 2^3 = 8.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ gilt:

$$2n+1 < 2^n \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

$$2(n+1)+1 < 2^{n+1}.$$

  Mit der Induktionsannahme $(\star)$ ergibt sich

$$2(n+1)+1 = 2n+2+1 \overset{(\star)}{<} 2^n + 2 < 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

■

Aufgabe 34 a

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

Lösung:

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n=1$, denn

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1)=2\cdot 1-1=1=1^2=1.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n\in\mathbb{N}$ mit $n\geq 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2 \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)=(n+1)^2.$$

  Mit der Induktionsannahme $(\star)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)&=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)+2(n+1)-1\overset{(\star)}{=}n^2+2(n+1)-1\\&=n^2+2n+2-1=n^2+2n+1=(n+1)^2.\end{aligned}$$

■

Aufgabe 34 b

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n\geq 0$. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion

$$\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\geq 1+\sum_{k=1}^{n}x_k \quad \text{für alle } n\in\mathbb{N}.$$

Lösung:

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n=1$, denn

$$\prod_{k=1}^{1}(1+x_k)=1+x_1\geq 1+\sum_{k=1}^{1}x_k=1+x_1.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n\in\mathbb{N}$ mit $n\geq 1$ gilt:

$$\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\geq 1+\sum_{k=1}^{n}x_k \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

$$\prod_{k=1}^{n+1}(1+x_k) \geq 1+\sum_{k=1}^{n+1} x_k .$$

Mit der Induktionsannahme $(\star)$ ergibt sich

$$\prod_{k=1}^{n+1}(1+x_k) = \left[\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right](1+x_{n+1}) \overset{(\star)}{\geq} \left(1+\sum_{k=1}^{n} x_k\right)(1+x_{n+1})$$

$$= 1+\sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1} + x_{n+1}\cdot\sum_{k=1}^{n} x_k = 1+\sum_{k=1}^{n+1} x_k + \underbrace{x_{n+1}\cdot\sum_{k=1}^{n} x_k}_{\geq 0 \text{ da } x_i \geq 0}$$

$$\geq 1+\sum_{k=1}^{n+1} x_k .$$

■

Aufgabe 34 c

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \binom{n+1}{2}^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:
Der Binomialkoeffizient ist definiert als $\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$. Dann ergibt sich zunächst

$$\binom{n+1}{2}^2 = \left(\frac{(n+1)!}{(n+1-2)!\cdot 2!}\right)^2 = \left(\frac{(n-1)!\cdot n(n+1)}{(n-1)!\cdot 2}\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad (i) \qquad \text{und}$$

$$\binom{n+2}{2}^2 = \left(\frac{(n+2)!}{(n+2-2)!\cdot 2!}\right)^2 = \left(\frac{n!\cdot(n+1)(n+2)}{n!\cdot 2}\right)^2 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \quad (ii).$$

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n=1$, denn

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1 = \binom{1+1}{2}^2 = \binom{2}{2}^2 = \frac{2!}{(2-2)!\cdot 2!} = \frac{2!}{0!\cdot 2!} = 1.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \binom{n+1}{2}^2 \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \binom{n+2}{2}^2.$$

Mit der Induktionsannahme $(\star)$ und den beiden Formeln (i) und (ii) ergibt sich

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \overset{(\star)}{=} \binom{n+1}{2}^2 + (n+1)^3 \overset{(i)}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \overset{(ii)}{=} \binom{n+2}{2}^2.\end{aligned}$$

■

Aufgabe 34 d

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion $\sum_{k=0}^{n} \frac{4k}{3^{k+1}} = 1 - \frac{2n+3}{3^{n+1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = 1$, denn

$$\sum_{k=0}^{1} \frac{4k}{3^{k+1}} = \frac{4\cdot 0}{3^{0+1}} + \frac{4\cdot 1}{3^{1+1}} = 0 + \frac{4}{9} = \frac{4}{9} = 1 - \frac{2\cdot 1+3}{3^{1+1}} = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{4k}{3^{k+1}} = 1 - \frac{2n+3}{3^{n+1}} \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{4k}{3^{k+1}} = 1 - \frac{2(n+1)+3}{3^{n+2}}.$$

Mit der Induktionsannahme $(\star)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} \frac{4k}{3^{k+1}} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{4k}{3^{k+1}} + \frac{4(n+1)}{3^{n+2}} \overset{(\star)}{=} 1 - \frac{2n+3}{3^{n+1}} + \frac{4(n+1)}{3^{n+2}} \\ &= 1 - \frac{3(2n+3) - 4(n+1)}{3^{n+2}} = 1 - \frac{6n+9-4n-4}{3^{n+2}} \\ &= 1 - \frac{2n+5}{3^{n+2}} = 1 - \frac{2(n+1)+3}{3^{n+2}}.\end{aligned}$$

Aufgabe 34 e

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass $p^n > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $p \geq 2$ gilt.

Lösung:

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = 1$, denn

  $$p^1 = p > 1 \quad \text{nach Voraussetzung.}$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt:

  $$p^n > n \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

  $$p^{n+1} > n+1.$$

  Mit der Induktionsannahme $(\star)$ ergibt sich

  $$p^{n+1} = p \cdot p^n \overset{(\star)}{>} p \cdot n \geq 2n = n+n \geq n+1.$$

■

Aufgabe 34 f

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = 1$, denn

  $$\sum_{k=0}^{1} k^2 = 0^2 + 1^2 = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt:

  $$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

  $$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}.$$

Mit der Induktionsannahme $(\star)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 \overset{(\star)}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}.\end{aligned}$$

■

Aufgabe 35 a

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = 1$, denn

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

  Mit der Induktionsannahme $(\star)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \overset{(\star)}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2[n^2+4(n+1)]}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.\end{aligned}$$

■

Aufgabe 35 b

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = 1$, denn

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{1+1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+2}.$$

  Mit der Induktionsannahme $(\star)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \overset{(\star)}{=} 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= 1 - \frac{n+2-1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2}.\end{aligned}$$

■

Aufgabe 35 c

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion $\sum_{k=1}^{n} (3k^2 - 3k + 1) = n^3$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = 1$, denn

$$\sum_{k=1}^{1} (3k^2 - 3k + 1) = 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 1 = 1^3 = 1.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} (3k^2 - 3k + 1) = n^3 \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

$$\sum_{k=1}^{n+1}(3k^2-3k+1)=(n+1)^3.$$

Mit $(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1$ $(\star\star)$ und der Induktionsannahme $(\star)$ folgt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(3k^2-3k+1) &= \sum_{k=1}^{n}(3k^2-3k+1)+3(n+1)^2-3(n+1)+1\\ &\overset{(\star)}{=} n^3++3(n+1)^2-3(n+1)+1\\ &= n^3+3n^2+6n+3-3n-3+1=n^3+3n^2+3n+1\\ &\overset{(\star\star)}{=}(n+1)^3.\end{aligned}$$

■

Aufgabe 35 d

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)=n+1$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

Lösung:

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n=1$, denn

$$\prod_{k=1}^{1}\left(1+\frac{1}{k}\right)=1+\frac{1}{1}=2=1+1=2.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n\in\mathbb{N}$ gilt:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)=n+1\quad(\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

$$\prod_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{1}{k}\right)=n+2.$$

Mit der Induktionsannahme $(\star)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{1}{k}\right)&=\left[\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\overset{(\star)}{=}(n+1)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\\ &=n+1+1=n+2.\end{aligned}$$

■

Aufgabe 35 e

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = 1$, denn

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1)^2 = (2\cdot 1-1)^2 = 1^2 = 1 = \frac{1\cdot(4\cdot 1^2-1)}{3} = \frac{1\cdot 3}{3} = 1.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3} \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 = \frac{(n+1)(4(n+1)^2-1)}{3}.$$

  Mit der Induktionsannahme $(\star)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 + (2(n+1)-1)^2 \overset{(\star)}{=} \frac{n(4n^2-1)}{3} + (2n+1)^2\\ &= \frac{n(4n^2-1)+3(2n+1)^2}{3} = \frac{4n^3-n+12n^2+12n+3}{3}\\ &= \frac{4(n^3+3n^2+3n+1)-(n+1)}{3} = \frac{4(n+1)^3-(n+1)}{3}\\ &= \frac{(n+1)(4(n+1)^2-1)}{3}.\end{aligned}$$

■

Aufgabe 35 f

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion $\sum_{k=1}^{n} k = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:
Der Binomialkoeffizient ist definiert als $\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$. Dann gilt:

$$\binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{(n+1-2)\cdot 2!} = \frac{(n-1)!\,n(n+1)}{(n-1)!\cdot 2} = \frac{n(n+1)}{2} \quad (\star\star)$$

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = 1$, denn

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1 .$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \binom{n+1}{2} = \frac{n\,(n+1)}{2} \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \binom{n+2}{2} = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2} .$$

  Mit der Induktionsannahme $(\star)$ ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + n + 1 \overset{(\star)}{=} \frac{n\,(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n\,(n+1) + 2\,(n+1)}{2}$$
$$= \frac{(n+1)\,(n+2)}{2} \overset{(\star\star)}{=} \binom{n+2}{2} .$$

■

Aufgabe 35 g

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = 1$, denn

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} = 2 - \frac{1+2}{2^1} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} .$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}.$$

  Mit der Induktionsannahme $(\star)$ ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \overset{(\star)}{=} 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2(n+2) - n - 1}{2^{n+1}}$$
$$= 2 - \frac{2n+4-n-1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}.$$

■

Aufgabe 35 h

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

Lösung:

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = 1$, denn

$$\sum_{k=1}^{1} (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^2 1^2 = 1 = (-1)^2 \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2} \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+2} \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

  Mit der Induktionsannahme $(\star)$ ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2 + (-1)^{n+2} (n+1)^2$$
$$\overset{(\star)}{=} (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^{n+2} (n+1)^2$$
$$= (-1)^{n+2} \left(-\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)^2 \right)$$

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}k^2 = (-1)^{n+2}\frac{-n(n+1)+2(n+1)^2}{2}$$
$$= (-1)^{n+2}\frac{-n^2-n+2n^2+4n+2}{2} = (-1)^{n+2}\frac{n^2+3n+2}{2}$$
$$= (-1)^{n+2}\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

■

Aufgabe 35 i

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = 1$, denn

$$\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k} = \frac{1}{1} = 1 \leq 1.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leq n \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} \leq n+1.$$

  Mit der Induktionsannahme $(\star)$ ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{1+n} \overset{(\star)}{\leq} n + \underbrace{\frac{1}{1+n}}_{<1} \leq n+1.$$

■

Aufgabe 35 j

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{(3k-2)(3k+1)} = 1 - \frac{1}{3n+1}.$$

Lösung:

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = 1$, denn

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{3}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{3}{(3\cdot 1-2)(3\cdot 1+1)} = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{3\cdot 1+1} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{3}{(3k-2)(3k+1)} = 1 - \frac{1}{3n+1} \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{3}{(3k-2)(3k+1)} = 1 - \frac{1}{3(n+1)+1}.$$

  Mit der Induktionsannahme $(\star)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{3}{(3k-2)(3k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{(3k-2)(3k+1)} + \frac{3}{(3(n+1)-2)(3(n+1)+1)} \\ &\overset{(\star)}{=} 1 - \frac{1}{3n+1} + \frac{3}{(3n+1)(3n+4)} \\ &= 1 - \frac{3n+4-3}{(3n+1)(3n+4)} = 1 - \frac{1}{3n+4} = 1 - \frac{1}{3(n+1)+1}.\end{aligned}$$

■

Aufgabe 35 k

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2).$$

Lösung:

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = 1$, denn

$$\sum_{k=1}^{1} k(k+1) = 1\cdot(1+1) = 2 = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot(1+1)(1+2) = \frac{1}{3}\cdot 6 = 2.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3).$$

  Mit der Induktionsannahme $(\star)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1) + (n+1)(n+2)\\ &\overset{(\star)}{=} \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2) = (n+1)(n+2)(\frac{1}{3}n+1)\\ &= \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3).\end{aligned}$$

■

Aufgabe 35 I

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion $\sum_{k=0}^{n} \frac{9k}{4^{k+1}} = 1 - \frac{3n+4}{4^{n+1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = 1$, denn

$$\sum_{k=0}^{1} \frac{9k}{4^{k+1}} = \frac{9\cdot 1}{4^{1+1}} = \frac{9}{16} = 1 - \frac{3\cdot 1+4}{4^{1+1}} = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{9k}{4^{k+1}} = 1 - \frac{3n+4}{4^{n+1}} \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{9k}{4^{k+1}} = 1 - \frac{3(n+1)+4}{4^{n+2}}.$$

  Mit der Induktionsannahme $(\star)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} \frac{9k}{4^{k+1}} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{9k}{4^{k+1}} + \frac{9(n+1)}{4^{n+2}} \overset{(\star)}{=} 1 - \frac{3n+4}{4^{n+1}} + \frac{9(n+1)}{4^{n+2}}\\ &= 1 - \frac{4(3n+4) - 9(n+1)}{4^{n+2}} = 1 - \frac{12n+16-9n-9}{4^{n+2}} = 1 - \frac{3n+7}{4^{n+2}}\\ &= 1 - \frac{3(n+1)+4}{4^{n+2}}.\end{aligned}$$

Aufgabe 36 a

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2^k} = 6 - \frac{n^2+4n+6}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = 1$, denn

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{k^2}{2^k} = \frac{1^2}{2^1} = \frac{1}{2} = 6 - \frac{1^2+4\cdot 1+6}{2^1} = 6 - \frac{11}{2} = \frac{1}{2}.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2^k} = 6 - \frac{n^2+4n+6}{2^n} \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k^2}{2^k} = 6 - \frac{(n+1)^2+4(n+1)+6}{2^{n+1}}.$$

  Mit der Induktionsannahme $(\star)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k^2}{2^k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2^k} + \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \overset{(\star)}{=} 6 - \frac{n^2+4n+6}{2^n} + \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \\
&= 6 - \frac{2(n^2+4n+6) - (n+1)^2}{2^{n+1}} \\
&= 6 - \frac{2(n^2+2n+1+2n+5) - (n+1)^2}{2^{n+1}} \\
&= 6 - \frac{2(n+1)^2+4n+10-(n+1)^2}{2^{n+1}} = 6 - \frac{(n+1)^2+4n+4+6}{2^{n+1}} \\
&= 6 - \frac{(n+1)^2+4(n+1)+6}{2^{n+1}}.
\end{aligned}$$

■

Aufgabe 36 b

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = 1$, denn

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1 = \left(\sum_{k=1}^{1} k \right)^2 = (1)^2 = 1 .$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2 \qquad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k \right)^2 .$$

Mit der Induktionsannahme $(\star)$ und der Summenformel (vgl. Beispiel 12)

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \qquad (\star\star)$$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \overset{(\star)}{=} \left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2 + (n+1)^3 \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n+1} k - (n+1) \right)^2 + (n+1)^3 \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n+1} k \right)^2 - 2(n+1) \sum_{k=1}^{n+1} k + (n+1)^2 + (n+1)^3 \\
&\overset{(\star\star)}{=} \left(\sum_{k=1}^{n+1} k \right)^2 - 2(n+1) \frac{(n+1)(n+2)}{2} + (n+1)^2 + (n+1)^3 \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n+1} k \right)^2 - (n+1)^2 (n+2-1) + (n+1)^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k \right)^2 .
\end{aligned}$$

■

Aufgabe 36 c

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion $2n \leq 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = 1$, denn

$$2 \cdot 1 = 2 \leq 1 + \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 2.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$2n \leq 1 + \frac{n(n+1)}{2} \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

$$2(n+1) \leq 1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

  Mit der Induktionsannahme $(\star)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} 2(n+1) = 2n + 2 &\overset{(\star)}{\leq} 1 + \frac{n(n+1)}{2} + 2 = 1 + \frac{n(n+1)+4}{2} = 1 + \frac{n^2+n+4}{2} \\ &\leq 1 + \frac{n^2+3n+2}{2} = 1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

■

Aufgabe 36 d

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion $\sum_{k=1}^{n} (3k^2 - k) = n^2(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = 1$, denn

$$\sum_{k=1}^{1} (3k^2 - k) = 3 \cdot 1^2 - 1 = 2 = 1^2 \cdot (1+1) = 2.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} (3k^2 - k) = n^2(n+1) \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

$$\sum_{k=1}^{n+1}(3k^2-k)=(n+1)^2(n+2).$$

  Mit der Induktionsannahme $(\star)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(3k^2-k)&=\sum_{k=1}^{n}(3k^2-k)+3(n+1)^2-(n+1)\\&\overset{(\star)}{=}n^2(n+1)+3(n+1)^2-(n+1)\\&=(n^2-1)(n+1)+3(n+1)^2\\&=(n-1)(n+1)(n+1)+3(n+1)^2\\&=(n+1)^2(n-1+3)=(n+1)^2(n+2).\end{aligned}$$

■

Aufgabe 36 e

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion $\sum_{j=1}^{n} j\cdot j!=(n+1)!-1$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

Lösung:

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n=1$, denn

$$\sum_{j=1}^{1} j\cdot j!=1\cdot 1!=1=(1+1)!-1=2!-1=2-1=1.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n\in\mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} j\cdot j!=(n+1)!-1\quad(\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

$$\sum_{j=1}^{n+1} j\cdot j!=(n+2)!-1.$$

  Mit der Induktionsannahme $(\star)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n+1} j\cdot j!&=\sum_{j=1}^{n} j\cdot j!+(n+1)(n+1)!\overset{(\star)}{=}(n+1)!-1+(n+1)(n+1)!\\&=(n+1)!(n+1+1)-1=(n+1)!(n+2)-1=(n+2)!-1.\end{aligned}$$

■

Aufgabe 36 f

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion $\frac{n(n^2+5)}{3} \in \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = 1$, denn

$$\frac{1 \cdot (1^2+5)}{3} = \frac{6}{3} = 2 \in \mathbb{N}.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{n(n^2+5)}{3} \in \mathbb{N} \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

$$\frac{(n+1)((n+1)^2+5)}{3} \in \mathbb{N}.$$

  Mit der Induktionsannahme $(\star)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{(n+1)((n+1)^2+5)}{3} &= \frac{(n+1)(n^2+2n+1+5)}{3} \\
&= \frac{n(n^2+2n+1+5)+(n^2+2n+1+5)}{3} \\
&= \frac{n(n^2+5)+n(2n+1)+n^2+2n+6}{3} \\
&= \frac{n(n^2+5)+3n^2+3n+6}{3} \\
&\overset{(\star)}{=} \underbrace{\frac{n(n^2+5)}{3}}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{n^2+n+2}_{\in \mathbb{N}}.
\end{aligned}$$

∎

Aufgabe 36 g

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^{k-1}} = \frac{1}{4}\left(9 - \frac{2n+3}{3^{n-1}}\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = 1$, denn

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{k}{3^{k-1}} = \frac{1}{3^0} = 1 = \frac{1}{4}\left(9 - \frac{2 \cdot 1 + 3}{3^{1-1}}\right) = \frac{1}{4}\left(9 - \frac{5}{1}\right) = 1.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^{k-1}} = \frac{1}{4}\left(9 - \frac{2n+3}{3^{n-1}}\right) \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{3^{k-1}} = \frac{1}{4}\left(9 - \frac{2(n+1)+3}{3^{n}}\right).$$

  Mit der Induktionsannahme $(\star)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{3^{k-1}} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^{k-1}} + \frac{n+1}{3^n} \overset{(\star)}{=} \frac{1}{4}\left(9 - \frac{2n+3}{3^{n-1}}\right) + \frac{n+1}{3^n} \\ &= \frac{1}{4}\left(9 - \frac{2n+3}{3^{n-1}} + \frac{4(n+1)}{3^n}\right) = \frac{1}{4}\left(9 - \frac{3(2n+3) - 4(n+1)}{3^n}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(9 - \frac{6n+9-4n-4}{3^n}\right) = \frac{1}{4}\left(9 - \frac{2(n+1)+3}{3^n}\right).\end{aligned}$$

■

Aufgabe 36 h

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 \leq 2n^4$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

- Induktionsanfang
  Die Aussage ist wahr für $n = 1$, denn

$$\sum_{k=1}^{1} (2k-1)^3 = (2 \cdot 1 - 1)^3 = 1 \leq 2 \cdot 1^4 = 2.$$

- Induktionsannahme
  Für ein beliebig gewähltes, aber festes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 \leq 2n^4 \quad (\star)$$

- Induktionsschritt
  Zeige, dass die Aussage auch für $n+1$ wahr ist; also

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1)^3 \leq 2(n+1)^4.$$

Mit der Formel $(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$ $(\star\star)$ und der Induktionsannahme $(\star)$ folgt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^3 &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 + (2(n+1)-1)^3 \overset{(\star)}{\leq} 2n^4 + (2n+1)^3 \\ &= 2n^4 + (2n+1)^2(2n+1) = 2n^4 + (4n^2+4n+1)(2n+1) \\ &= 2n^4 + 8n^3 + 4n^2 + 8n^2 + 4n + 2n + 1 \\ &= 2n^4 + 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 \\ &\leq 2n^4 + 8n^3 + 12n^2 + 8n + 2 = 2(n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) \\ &\overset{(\star\star)}{=} 2(n+1)^4.\end{aligned}$$

■

7.3 Gleichungen und Ungleichungen

Aufgabe 37

Sie sind im Wohnzimmer von Prof. Ungleich. Der Kronleuchter ist mehr wert als der Ohrensessel und der Couchtisch zusammen. Zudem sind die Couch und der Couchtisch gemeinsam mehr wert als der Ohrensessel und der Kronleuchter. Der Ohrensessel und die Couch jedoch haben zusammen denselben Wert wie der Kronleuchter und der Couchtisch.

a) Ordnen Sie jedem Gegenstand das richtige Symbol zu, so dass folgende Ungleichungen erfüllt sind. Machen Sie sich selbst klar, dass der Text diese Ungleichungen beschreibt.

$$Z > X + W \qquad Y + X > W + Z \qquad Z + X = W + Y$$

b) Wie lassen sich diese vier Gegenstände gemäß ihrer Wertverhältnisse ordnen?

Lösung zu a):
Es sind Z der Wert des Kronleuchters, W der Wert des Ohrensessels, X der Wert des Couchtisches und Y der Wert der Couch.

Lösung zu b):
Aus $Z > W + X > X$ erhält man $Z > X$. Aus $W + Y = Z + X$ ergeben sich durch Umstellen die beiden Ungleichungen:

$$i)\ Z = W + Y - X \quad \text{und} \quad ii)\ X = W + Y - Z$$

Setzt man $i)$ und $ii)$ in die Ungleichung $Y + X > W + Z$ ein, dann erhält man jeweils:

$$Y + X > W + \underbrace{W + Y - X}_{(i)} \qquad Y + \underbrace{W + Y - Z}_{(ii)} > W + Z$$

$$\Leftrightarrow \quad 2X > 2W \qquad \Leftrightarrow \quad 2Y > 2Z$$

$$\Leftrightarrow \quad X > W \qquad \Leftrightarrow \quad Y > Z$$

Mit diesen Resultaten sehen die Wertverhältnisse dann wie folgt aus: $Y > Z > X > W$.

Aufgabe 38

Beurteilen Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Die Aussage ist jeweils wahr, wenn sie für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt. Geben Sie für eine falsche Aussage ein Gegenbeispiel an!

$a)\ a < b \wedge c \geq 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$

$b)\ a < b \Rightarrow |a| < |b|$

$c)\ a < b < 0 \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$

$d)\ a^2 < b^2 \wedge b > 0 \Rightarrow a < b$

$e)\ |a+1| \geq |a-1|$

$f)\ |a| \geq a - 1$

Lösung zu a):
Die Aussage ist **falsch**, da für $c = 0$ die Ungleichung $a \cdot 0 < b \cdot 0$ nicht erfüllt ist.

Lösung zu b):
Die Aussage ist **falsch**, da zum Beispiel für $a = -2$ und $b = 1$ zwar die Bedingung $a < b$ erfüllt ist, aber nicht die Ungleichung $|-2| < |1|$.

Lösung zu c):
Die Aussage ist **wahr**. Da a und b zwei negative Zahlen sind, ist das Produkt positiv und mit einer äquivalenten Umformung folgt

$$a < b < 0 \;\Big|\cdot \frac{1}{ab} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0.$$

Lösung zu d):
Die Aussage ist **wahr**, denn wenn man $a > b > 0$ annimmt, folgt aus

$$a^2 < b^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - b^2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a+b)(a-b) < 0$$

ein Widerspruch, weil dann beide Klammern positiv sind. Also muss $a < b$ sein.

Lösung zu e):
Die Aussage ist **falsch**, da zum Beispiel für $a = -1$ die Ungleichung $|-1+1| \geq |-2|$ nicht erfüllt ist.

Lösung zu f):
Die Aussage ist **wahr**, denn für $a \geq 0$ gilt $|a| = a \geq a - 1 \Leftrightarrow 0 > -1$ und für $a < 0$ gilt $|a| = -a \geq a - 1 \Leftrightarrow 1 \geq 2a$.

Aufgabe 39 a

Für welche **ganzen** Zahlen $n \in \mathbb{Z}$ gilt die Ungleichung $\frac{2}{n} + n \leq 2$?

Lösung:

Die Ungleichung ist nur für $D = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ definiert, weil der Nenner für $n = 0$ null wird.

1. Fall Wird die Ungleichung mit $n > 0$ multipliziert, dann dreht sich das Ungleichheitszeichen nicht um!

$$\begin{aligned} & \frac{2}{n} + n \leq 2 && | \cdot n \\ \Leftrightarrow \quad & 2 + n^2 \leq 2n && | -2n \\ \Leftrightarrow \quad & n^2 - 2n + 2 \leq 0 && | \text{ binomische Ergänzung} \\ \Leftrightarrow \quad & (n-1)^2 + 1 \leq 0 && | \text{ Widerspruch} \end{aligned}$$

Also ist die erste Lösungsmenge die leere Menge $L_1 := \{\ \}$.

2. Fall Wird die Ungleichung mit $n < 0$ multipliziert, dann dreht sich das Ungleichheitszeichen um!

$$\begin{aligned} & \frac{2}{n} + n \leq 2 && | \cdot n \\ \Leftrightarrow \quad & 2 + n^2 \geq 2n && | -2n \\ \Leftrightarrow \quad & n^2 - 2n + 2 \geq 0 && | \text{ binomische Ergänzung} \\ \Leftrightarrow \quad & (n-1)^2 + 1 \geq 0 && | \text{ wahre Aussage} \end{aligned}$$

Folglich ist die zweite Lösungsmenge $L_2 := \mathbb{Z}^-$. Die Vereinigung der beiden Mengen L_1 und L_2 ergibt die Lösungsmenge

$$L = L_1 \cup L_2 = \{\ \} \cup \mathbb{Z}^- = \mathbb{Z}^-.$$

Aufgabe 39 b

Für welche **ganzen** Zahlen $n \in \mathbb{Z}$ gilt die Ungleichung $\left| \frac{n-1}{n+3} \right| < 1$?

Lösung:

Die Ungleichung ist nur für $D = \mathbb{Z} \setminus \{-3\}$ definiert, weil der Nenner für $n = -3$ null wird.

$$\begin{aligned} & \frac{|n-1|}{|n+3|} < 1 && | \cdot |n+3| \\ \Leftrightarrow \quad & |n-1| < |n+3| \quad (\star) \end{aligned}$$

1. Fall Für $n < -3$ ist $|n-1| = -(n-1) = -n+1 \ \wedge\ |n+3| = -(n+3) = -n-3$. Aus der Ungleichung $(\star)$ folgt dann $-n+1 < -n-3 \Leftrightarrow 1 < -3$. Das ist ein Widerspruch und ergibt als erste Lösungsmenge nur die leere Menge $L_1 := \{\ \}$.

2. Fall Für $-3 < n < 1$ gilt $|n-1| = -(n-1) = -n+1 \ \wedge\ |n+3| = n+3$. Dann wird die Ungleichung $(\star)$ zu $-n+1 < n+3 \Leftrightarrow -1 < n$. Damit lautet die zweite Lösungsmenge $L_2 := \{n \in \mathbb{Z} \mid -3 < n < 1 \ \wedge\ n > -1\} = \{0\}$.

3. Fall Für $n \geq 1$ ist $|n-1| = n-1 \wedge |n+3| = n+3$. Damit wird die Ungleichung $(\star)$ zu $n-1 < n+3 \Leftrightarrow -1 < 3$ und für die dritte Lösungsmenge ergibt sich $L_3 = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 1\} = \mathbb{N}$.

Die Vereinigung der drei Mengen L_1, L_2 und L_3 ergibt schließlich die Lösungsmenge

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \{\} \cup \{0\} \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}_0.$$

Aufgabe 39 c

Für welche **ganzen** Zahlen $n \in \mathbb{Z}$ gilt die Ungleichung $|n| + n \geq 3$?

Lösung:

1. Fall Für $n < 0$ gilt $|n| = -n$ und die Ungleichung wird zu $-n + n \geq 3 \Leftrightarrow 0 \geq 3$. Das ist ein Widerspruch und die erste Lösungsmenge ist $L_1 := \{\}$.

2. Fall Für $n \geq 0$ ist $|n| = n$ und die Ungleichung wird zu $n + n \geq 3 \Leftrightarrow n \geq \frac{3}{2}$. Damit ist die zweite Lösungsmenge $L_2 := \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0 \wedge n \geq \frac{3}{2}\} = \{2, 3, 4, 5, \ldots\}$.

Die Vereinigung der beiden Mengen L_1 und L_2 ergibt die Lösungsmenge

$$L = L_1 \cup L_2 = \{\} \cup \{2, 3, 4, 5, \ldots\} = \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Aufgabe 39 d

Für welche **ganzen** Zahlen $n \in \mathbb{Z}$ gilt die Ungleichung $|n-3| \leq -2n + 5$?

Lösung:

1. Fall Für $n < 3$ ist $|n-3| = -(n-3) = -n+3$ und die Ungleichung wird zu $-n + 3 \leq -2n + 5 \Leftrightarrow n \leq 2$. Die erste Lösungsmenge ist also $L_1 = \{n \in \mathbb{Z} \mid n < 3 \wedge n \leq 2\} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2\}$.

2. Fall Für $n \geq 3$ ist $|n-3| = n-3$ und die Ungleichung wird zu $n - 3 \leq -2n + 5 \Leftrightarrow n \leq \frac{8}{3}$. Das ist ein Widerspruch und damit ist die zweite Lösungsmenge nur die leere Menge $L_2 = \{\}$.

Die Vereinigung der beiden Mengen L_1 und L_2 ergibt die Lösungsmenge

$$L = L_1 \cup L_2 = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2\} \cup \{\} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2\}.$$

Aufgabe 39 e

Für welche **ganzen** Zahlen $n \in \mathbb{Z}$ gilt die Ungleichung $|n-7| < n+7$?

Lösung:

1. Fall Für $n < 7$ ist $|n-7| = -(n-7) = -n+7$ und die Ungleichung wird zu $-n + 7 < n + 7 \Leftrightarrow n > 0$. Also lautet die erste Lösungsmenge $L_1 := \{n \in \mathbb{Z} \mid n < 7 \wedge n > 0\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

2. Fall Für $n \geq 7$ ist $|n-7| = n-7$ und die Ungleichung wird zu $n - 7 < n + 7 \Leftrightarrow 0 < 14$. Das ist eine wahre Aussage und damit ist die zweite Lösungsmenge $L_2 := \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 7\} = \{7, 8, 9, \ldots\}$.

Die Vereinigung der beiden Mengen L_1 und L_2 ergibt die Lösungsmenge

$$L = L_1 \cup L_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cup \{7, 8, 9, \ldots\} = \mathbb{N}.$$

Aufgabe 39 f

Für welche **ganzen** Zahlen $n \in \mathbb{Z}$ gilt die Ungleichung $|n-3| < n+1$?

Lösung:

1. Fall Für $n < 3$ ist $|n-3| = -(n-3) = -n+3$ und die Ungleichung wird zu $-n+3 < n+1 \Leftrightarrow n > 1$. Also lautet die erste Lösungsmenge $L_1 := \{n \in \mathbb{Z} \mid n < 3 \wedge n > 1\} = \{2\}$.

2. Fall Für $n \geq 3$ ist $|n-3| = n-3$ und die Ungleichung wird zu $n-3 < n+1 \Leftrightarrow 0 < 4$. Das ist eine wahre Aussage und die zweite Lösungsmenge ist $L_2 = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 3\} = \{3, 4, 5, \ldots\}$.

Die Vereinigung der beiden Mengen L_1 und L_2 ergibt die Lösungsmenge

$$L = L_1 \cup L_2 = \{2\} \cup \{3, 4, 5, \ldots\} = \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Aufgabe 40

Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq a \leq b$ gilt:

$$a \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq b$$

und dass genau dann Gleichheit gilt, wenn $a = b$ ist.

Lösung:

Der Beweis dieser Ungleichungskette wird in drei Schritten geführt.

$$a \overset{(i)}{\leq} \sqrt{ab} \overset{(ii)}{\leq} \frac{a+b}{2} \overset{(iii)}{\leq} b$$

Für $a = b = 0$ ist die Ungleichungskette trivialerweise erfüllt und für den Fall $a = b > 0$ gilt offensichtlich die Gleichheit. Denn genau dann gilt $a = \sqrt{a^2} = \frac{2a}{a} = a$. Bleibt jetzt noch der Fall $0 < a < b$ zu untersuchen. Es gilt:

zu (i)

$$\begin{aligned} & a < b && | -a \\ \Leftrightarrow\ & 0 < b-a && | \cdot a \\ \Leftrightarrow\ & 0 < ab - a^2 && | +a^2 \\ \Leftrightarrow\ & a^2 < ab && | \sqrt{\ } \\ \Leftrightarrow\ & a < \sqrt{ab} \end{aligned}$$

zu (ii)

$$\begin{aligned} & 0 < (a-b)^2 \\ \Leftrightarrow\ & 0 < a^2 - 2ab + b^2 && | +4ab \\ \Leftrightarrow\ & 4ab < a^2 + 2ab + b^2 \\ \Leftrightarrow\ & 4ab < (a+b)^2 && | \sqrt{\ } \\ \Leftrightarrow\ & 2\sqrt{ab} < a+b && | :2 \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

zu (iii)

$$\begin{aligned} & a < b && | +b \\ \Leftrightarrow\ & a+b < 2b && | :2 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{a+b}{2} < b \end{aligned}$$

Aufgabe 41

Seien a und b zwei beliebige positive reelle Zahlen. Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Ungleichung.

$$\sqrt{|a|+|b|} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$$

Lösung:

Nach Voraussetzung sind $a, b > 0$ und somit ist auch das Produkt $ab > 0$. Dann ist:

$$\begin{aligned}
& 0 < ab && | \sqrt{\ } \\
\Leftrightarrow \quad & 0 < \sqrt{ab} && | \cdot 2 \\
\Leftrightarrow \quad & 0 < 2\sqrt{ab} && | +a+b \\
\Leftrightarrow \quad & a+b < a+2\sqrt{ab}+b && | \text{ anwenden der ersten binomischen Formel} \\
\Leftrightarrow \quad & a+b < \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 && | \sqrt{\ } \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{a+b} < \sqrt{a}+\sqrt{b} && | \text{ da } a, b > 0 \text{ ist } |a| = a \text{ und } |b| = b \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{|a|+|b|} < \sqrt{a}+\sqrt{b}
\end{aligned}$$

Aufgabe 42

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $0 < a < b$. Zeigen Sie, dass

$$\left|1-\frac{a}{b}\right| < \left|1-\frac{b}{a}\right| \qquad \text{d.h., } \frac{a}{b} \text{ liegt näher an } 1 \text{ als } \frac{b}{a}.$$

Lösung:

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
& 0 < (b-a)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & 0 < b^2 - 2ab + a^2 && | +2ab \\
\Leftrightarrow \quad & 2ab < b^2 + a^2 && | \cdot \frac{1}{ab} \\
\Leftrightarrow \quad & 2 < \frac{b}{a} + \frac{a}{b} && | -1-\frac{a}{b} \\
\Leftrightarrow \quad & 1-\frac{a}{b} < \frac{b}{a} - 1 && | \text{ wegen } 0 < a < b \text{ ist } 1-\frac{a}{b} > 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \underbrace{1-\frac{a}{b}}_{\text{positiv}} < -\underbrace{\left(1-\frac{b}{a}\right)}_{\text{negativ}} && | \text{ beachten Sie: } |x| = -x \text{ für } x < 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \left|1-\frac{a}{b}\right| < \left|1-\frac{b}{a}\right|
\end{aligned}$$

Aufgabe 43

Für zwei beliebige positive reelle Zahlen a und b wird definiert:

Das harmonische Mittel als: $\dfrac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ und das arithmetische Mittel als: $\dfrac{1}{2}(a+b)$.

Ist das harmonische Mittel größer, kleiner oder gleich dem arithmetischen Mittel?

Lösung:

Es wird jetzt gezeigt, dass das harmonische Mittel für alle $a, b \in \mathbb{R}^+$ kleiner als das arithmetische Mittel ist.

$$\begin{aligned}
& 0 < a^2 + b^2 && | +2ab \\
\Leftrightarrow \quad & 2ab < a^2 + 2ab + b^2 && | \text{ anwenden der ersten binomischen Formel} \\
\Leftrightarrow \quad & 2ab < (a+b)^2 && | : (a+b) > 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{2ab}{a+b} < a+b && | : 2 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} < \frac{a+b}{2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 44 a

Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$. Ermitteln Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die $1 + x > a\,|\,1 - x\,|$ gilt.

Lösung:

Nach Voraussetzung ist $a > 1$ und damit sind die Terme $a - 1$ und $a + 1$ positiv. Bei der Division der Ungleichung durch einen der beiden Terme dreht sich das Ungleichheitszeichen daher nicht um!

1. Fall Für $x > 1$ ist $|\,1 - x\,| = -(1 - x) = -1 + x$ und damit wird die Ungleichung zu:

$$\begin{aligned}
& 1 + x > a(-1 + x) && \\
\Leftrightarrow \quad & 1 + x > -a + ax && | +a - x \\
\Leftrightarrow \quad & a + 1 > ax - x && | \ x \text{ ausklammern} \\
\Leftrightarrow \quad & a + 1 > x(a - 1) && | : (a-1) \text{ ist positiv} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{a+1}{a-1} > x &&
\end{aligned}$$

Für $a > 1$ ist der Bruch $\frac{a+1}{a-1}$ größer als 1 und die erste Lösungsmenge lautet

$$L_1 := \left\{ x \mid x > 1 \ \wedge \ x < \frac{a+1}{a-1} \right\} = \left] 1, \frac{a+1}{a-1} \right[.$$

2. Fall Für $x \leq 1$ ist $|\,1 - x\,| = 1 - x$ und damit wird die Ungleichung zu:

$$\begin{aligned} & 1+x > a(1-x) \\ \Leftrightarrow \quad & 1+x > a-ax & | +ax-1 \\ \Leftrightarrow \quad & ax+x > a-1 & | \ x \text{ ausklammern} \\ \Leftrightarrow \quad & x(a+1) > a-1 & | : (a+1) \text{ ist positiv} \\ \Leftrightarrow \quad & x > \frac{a-1}{a+1} \end{aligned}$$

Für $a > 1$ ist der Bruch $\frac{a-1}{a+1}$ kleiner als 1 und damit lautet die zweite Lösungsmenge

$$L_2 := \left\{ x \mid x \leq 1 \ \wedge \ x > \frac{a-1}{a+1} \right\} = \left] \frac{a-1}{a+1}, 1 \right] .$$

Die Vereinigung der beiden Lösungsmengen L_1 und L_2 ergibt schließlich für die Ungleichung die Lösungsmenge

$$L = L_1 \cup L_2 = \left] 1, \frac{a+1}{a-1} \right[\ \cup \ \left] \frac{a-1}{a+1}, 1 \right] = \left] \frac{a-1}{a+1}, \frac{a+1}{a-1} \right[.$$

Aufgabe 44 b

Sei $a \in \mathbb{R}$. Ermitteln Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die $\frac{1}{x} < \frac{1}{x+a}$ gilt.

Lösung:

Die Ungleichung ist nur für $x \in \mathbb{R} \setminus \{ -a, 0 \}$ definiert.

1. Fall

Für $a = 0$ liefert die Ungleichung $\frac{1}{x} < \frac{1}{x}$ einen Widerspruch. Dann ist die erste Lösungsmenge die leere Menge $L_1 := \{ \ \}$.

2. Fall

Sei nun $a < 0$.

(i) Für $x < 0$ ist auch $x + a < 0$ und bei Multiplikation der Ungleichung mit $x(x+a) > 0$ dreht sich das Ungleichheitszeichen nicht um!

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x} < \frac{1}{x+a} & | \cdot x(x+a) \\ \Leftrightarrow \quad & x+a < x & | -x \\ \Leftrightarrow \quad & a < 0 & | \text{ wahre Aussage} \end{aligned}$$

Also lautet die zweite Lösungsmenge $L_2 := \{ x \mid x < 0 \} =]-\infty, 0[$.

(ii) Für $0 < x < -a$ ist $x + a < 0$. Dann dreht sich das Ungleichheitszeichen bei Multiplikation der Ungleichung mit $x(x+a) < 0$ um!

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x} < \frac{1}{x+a} & | \cdot x(x+a) \\ \Leftrightarrow \quad & x+a > x & | -x \\ \Leftrightarrow \quad & a > 0 & | \text{ Widerspruch zur Annahme!} \end{aligned}$$

Damit ist die dritte Lösungsmenge die leere Menge $L_3 := \{ \ \}$.

(iii) Für $x > -a$ ist $x > 0$ und $x + a > 0$. Wird die Ungleichung mit $x(x+a) > 0$ multipliziert, dann dreht sich das Ungleichheitszeichen nicht um!

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x} < \frac{1}{x+a} && \mid \cdot x(x+a) \\ \Leftrightarrow \quad & x + a < x && \mid -x \\ \Leftrightarrow \quad & a < 0 && \mid \text{wahre Aussage} \end{aligned}$$

Die vierte Lösungsmenge lautet damit $L_4 := \{ x \mid x > -a \} =]-a, \infty[$.

3. Fall
Sei nun $a > 0$.

(i) Für $x < -a$ ist $x + a < 0$ und $x < 0$. Wird die Ungleichung mit $x(x+a) < 0$ multipliziert, dann dreht sich das Ungleichheitszeichen nicht um!

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x} < \frac{1}{x+a} && \mid \cdot x(x+a) \\ \Leftrightarrow \quad & x + a < x && \mid -x \\ \Leftrightarrow \quad & a < 0 && \mid \text{Widerspruch zur Annahme!} \end{aligned}$$

Die fünfte Lösungsmenge ist wieder die leere Menge $L_5 := \{\ \}$.

(ii) Für $-a < x < 0$ ist $x + a > 0$ und $x < 0$. Wird die Ungleichung mit $x(x+a) < 0$ multipliziert, dann dreht sich das Ungleichheitszeichen um!

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x} < \frac{1}{x+a} && \mid \cdot x(x+a) \\ \Leftrightarrow \quad & x + a > x && \mid -x \\ \Leftrightarrow \quad & a > 0 && \mid \text{wahre Aussage} \end{aligned}$$

Die sechste Lösungsmenge lautet also $L_6 := \{ x \mid -a < x < 0 \} =]-a, 0[$.

(iii) Für $x > 0$ ist $x + a > 0$. Wird die Ungleichung mit $x(x+a) < 0$ multipliziert, dann dreht sich das Ungleichheitszeichen nicht um!

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x} < \frac{1}{x+a} && \mid \cdot x(x+a) \\ \Leftrightarrow \quad & x + a < x && \mid -x \\ \Leftrightarrow \quad & a < 0 && \mid \text{Widerspruch zur Annahme!} \end{aligned}$$

Die siebente Lösungsmenge ist auch hier wieder nur die leere Menge $L_7 := \{\ \}$.

In Abhängigkeit des Parameters a erhält man schließlich die Lösungsmenge der Ungleichung zu

$a = 0 : L = \{\ \}$,
$a < 0 : L = L_2 \cup L_3 \cup L_4 = \{\ \} \cup]-\infty, 0[\cup]-a, \infty[=]-\infty, 0[\cup]-a, \infty[$,
$a > 0 : L = L_5 \cup L_6 \cup L_7 = \{\ \} \cup]-a, 0[\cup \{\ \} =]-a, 0[$.

Aufgabe 44 c

Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$. Ermitteln Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die $\frac{1}{|x|} < \frac{1}{|x+a|}$ gilt.

Lösung:
Da die Ungleichung nur für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-a, 0\}$ definiert ist, ist hier eine Fallunterscheidung notwendig.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|x|} < \frac{1}{|x+a|} \quad | \cdot |x||x+a| \\ \Leftrightarrow \quad & |x+a| < |x| \quad (\star) \end{aligned}$$

1. Fall Für $x > 0$ ist $|x+a| = x+a \wedge |x| = x$. Dann wird die Ungleichung $(\star)$ zu $x+a < x \Leftrightarrow a < 0$. Das ist ein Widerspruch zur Annahme $a > 0$ und somit ist die erste Lösungsmenge die leere Menge $L_1 := \{\}$.

2. Fall Für $-a < x < 0$ ist $|x+a| = x+a \wedge |x| = -x$. Dann wird die Ungleichung $(\star)$ zu $x+a < -x \Leftrightarrow x < -\frac{a}{2}$. Damit lautet die zweite Lösungsmenge

$$L_2 := \left\{ x \mid -a < x < 0 \wedge x < -\frac{a}{2} \right\} = \left] -a, -\frac{a}{2} \right[.$$

3. Fall Für $x < -a$ gilt $|x+a| = -(x+a) = -x-a \wedge |x| = -x$. Dann wird die Ungleichung $(\star)$ zu $-x-a < -x \Leftrightarrow a > 0$. Das ist eine wahre Aussage und die dritte Lösungsmenge ist $L_3 := \{x \mid x < -a\} =]-\infty, -a[$.

Die Vereinigung der drei Lösungsmengen L_1, L_2, L_3 ergibt die Gesamtlösungsmenge

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \{\} \cup \left] -a, -\frac{a}{2} \right[\cup]-\infty, -a[=]-\infty, -\frac{a}{2}[\setminus \{-a\}.$$

Aufgabe 45

Welche Zahl $c \in \mathbb{R}$ ergibt für die Ungleichung $x^2 - 6x + c \leq 0$

a) genau eine Zahl als Lösung,

b) eine leere Lösungsmenge.

Lösung zu a):

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & x^2 - 6x + c \leq 0 && | \text{ binomische Ergänzung} \\ \Leftrightarrow \quad & (x-3)^2 - 9 + c \leq 0 && | +9-c \\ \Leftrightarrow \quad & (x-3)^2 \leq 9 - c \quad (\star) \end{aligned}$$

Für $c = 9$ ist die Ungleichung nur für $x = 3$ erfüllbar. Es gibt in diesem Fall also genau nur eine Lösung.

Lösung zu b):
Für $c > 9$ ist $9 - c < 0$ und führt damit zu einem Widerspruch in der Ungleichung $(\star)$, da $(x-3)^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Folglich ist die Lösungsmenge die leere Menge.

Aufgabe 46

Bestimmen Sie $N \cap M$ sowie $N \cup M$ für

$$N = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \left| x - \frac{1}{3} \right| < \frac{3}{2} \right\} \quad \text{und} \quad M = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |x+1| < \frac{1}{2} \right\}.$$

Lösung:

Für die Menge N gilt:

Für $x \geq \frac{1}{3}$ ist $\left| x - \frac{1}{3} \right| = x - \frac{1}{3} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow x < \frac{11}{6}$. Also lautet die erste Lösungsmenge

$$L_1 := \left\{ x \,\middle|\, x \geq \frac{1}{3} \wedge x < \frac{11}{6} \right\} = \left[\frac{1}{3}, \frac{11}{6} \right[.$$

Für $x < \frac{1}{3}$ ist $\left| x - \frac{1}{3} \right| = -\left(x - \frac{1}{3} \right) = -x + \frac{1}{3} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{7}{6} < x$. Damit ergibt sich die zweite Lösungsmenge

$$L_2 := \left\{ x \,\middle|\, x < \frac{1}{3} \wedge x > -\frac{7}{6} \right\} = \left] -\frac{7}{6}, \frac{1}{3} \right[.$$

Die Menge N ist die Vereinigung der Mengen L_1 und L_2. Also

$$N = L_1 \cup L_2 = \left[\frac{1}{3}, \frac{11}{6} \right[\cup \left] -\frac{7}{6}, \frac{1}{3} \right[= \left] -\frac{7}{6}, \frac{11}{6} \right[.$$

Für die Menge M gilt:

Für $x \geq -1$ ist $|x+1| = x+1 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$. Also ist die erste Lösungsmenge

$$L_3 := \left\{ x \,\middle|\, x \geq -1 \wedge x < -\frac{1}{2} \right\} = \left[-1, -\frac{1}{2} \right[.$$

Für $x < -1$ ist $|x+1| = -(x+1) = -x - 1 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x$. Damit ergibt sich die zweite Lösungsmenge

$$L_4 := \left\{ x \,\middle|\, x < -1 \wedge -\frac{3}{2} < x \right\} = \left] -\frac{3}{2}, -1 \right[.$$

Die Menge M ist wieder die Vereinigung der Mengen L_3 und L_4. Also

$$M = L_3 \cup L_4 = \left[-1, -\frac{1}{2} \right[\cup \left] -\frac{3}{2}, -1 \right[= \left] -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right[.$$

Für den Durchschnitt beziehungsweise der Vereinigung der Mengen M und N erhält man

$$N \cap M = \left] -\frac{7}{6}, \frac{11}{6} \right[\cap \left] -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right[= \left] -\frac{7}{6}, -\frac{1}{2} \right[,$$

$$N \cup M = \left] -\frac{7}{6}, \frac{11}{6} \right[\cup \left] -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right[= \left] -\frac{3}{2}, \frac{11}{6} \right[.$$

Aufgabe 47

Für welche reellen Zahlen ist sowohl die Ungleichung

$$x^2+5 > \frac{5-3x^2}{2x+1}, \quad \text{als auch} \quad x^2 \geq 6x-5 \quad \text{erfüllt?}$$

Geben Sie die Lösungsmenge auch zeichnerisch wieder.

Lösung:

Die erste Ungleichung ist für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ definiert, da an der Stelle $x=-\frac{1}{2}$ der Nenner null wird. Sei nun $x > -\frac{1}{2}$, dann ist der Nenner positiv und man kann die Ungleichung mit dem Nenner multiplizieren, wobei das Ungleichheitszeichen erhalten bleibt.

$$\begin{aligned}
& x^2+5 > \frac{5-3x^2}{2x+1} && \Big| \cdot (2x+1) > 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (x^2+5)(2x+1) > 5-3x^2 && \\
\Leftrightarrow \quad & 2x^3+x^2+10x+5 > 5-3x^2 && \Big| +3x^2-5 \\
\Leftrightarrow \quad & 2x^3+4x^2+10x > 0 && \Big| \text{ faktorisieren} \\
\Leftrightarrow \quad & 2x(x^2+2x+5) > 0 && \Big| \text{ binomische Ergänzung} \\
\Leftrightarrow \quad & 2x[(x+1)^2+4] > 0 && \Big| :2[(x+1)^2+4] > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow \quad & x > 0 &&
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich $L_1 := \{x \mid x > -\frac{1}{2} \wedge x > 0\} =]0, \infty[$.

Für den Fall $x < -\frac{1}{2}$ dreht sich nur das Ungleichheitszeichen in obiger Rechnung um, da dann der Term $2x+1$ negativ ist. Die einzelnen Umformungen bleiben aber die gleichen und führen auf $x < 0$. Also ergibt sich $L_2 := \{x \mid x < -\frac{1}{2} \wedge x < 0\} =]-\infty, -\frac{1}{2}[$. Als Lösungsmenge L_3 der ersten Ungleichung erhält man also

$$L_3 := L_1 \cup L_2 =]0, \infty[\cup \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[= \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{1}{2}, 0\right].$$

Für die zweite Ungleichung folgt:

$$\begin{aligned}
& x^2 \geq 6x-5 && \Big| -6x+5 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2-6x+5 \geq 0 && \Big| \text{ faktorisieren} \\
\Leftrightarrow \quad & (x-1)(x-5) \geq 0 &&
\end{aligned}$$

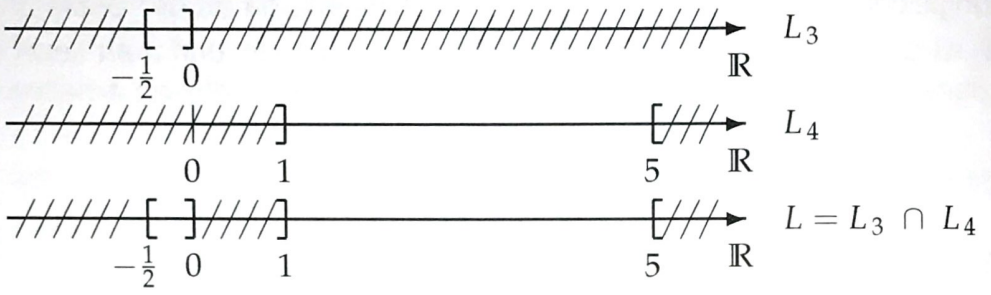
- Für $x \leq 1$ ist $x-1 \leq 0 \wedge x-5 < 0$ und damit $(x-1)(x-5) \geq 0$.
- Für $1 < x < 5$ ist $x-1 > 0 \wedge x-5 < 0$ und damit $(x-1)(x-5) < 0$.
- Für $x \geq 5$ ist $x-1 > 0 \wedge x-5 \geq 0$ und damit $(x-1)(x-5) \geq 0$.

Daraus ergibt sich die Lösungsmenge der zweiten Ungleichung zu $L_4 := \mathbb{R} \setminus]1, 5[$.

Um die gesamte Lösungsmenge L dieser Aufgabe zu erhalten, muss jetzt noch die Schnittmenge von L_3 und L_4 gebildet werden. Sie ergibt sich zu

$$L = L_3 \cap L_4 = \mathbb{R} \setminus \left(\left[-\frac{1}{2}, 0 \right] \cup]1, 5[\right).$$

Die grafische Darstellung der Lösungsmengen L_3, L_4 sowie L zeigt die folgende Abbildung.



Aufgabe 48

Bestimmen Sie die reelle Lösungsmenge der Ungleichung in Intervallschreibweise.

a) $2 - x > |2x + 1|$

b) $\frac{2x-1}{|2x^2+1|} < 1$

c) Bilden Sie $M \cup N$ und $M \cap N$, wobei M für die Lösungsmenge von a) und N für die Lösungsmenge von b) steht.

Lösung zu a):

Für $x \geq -\frac{1}{2}$ ist $|2x + 1| = 2x + 1$ und somit $2 - x > 2x + 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$. Dann ist die erste mögliche Lösungsmenge

$$L_1 := \left\{ x \,\middle|\, x \geq -\frac{1}{2} \wedge x < \frac{1}{3} \right\} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right[.$$

Für $x < -\frac{1}{2}$ ist $|2x + 1| = -(2x + 1) = -2x - 1$ also gilt $2 - x > -2x - 1 \Leftrightarrow x > -3$. Dann ist die zweite mögliche Lösungsmenge

$$L_2 = \left\{ x \,\middle|\, x < -\frac{1}{2} \wedge x > -3 \right\} = \left] -3, -\frac{1}{2} \right[.$$

Die Lösungsmenge der Ungleichung ergibt sich dann aus der Vereinigung der beiden Mengen L_1 und L_2 zu

$$M = L_1 \cup L_2 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right[\cup \left] -3, -\frac{1}{2} \right[= \left] -3, \frac{1}{3} \right[.$$

Lösung zu b):
$2x^2+1$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ positiv und somit gilt $|2x^2+1| = 2x^2+1$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
& \frac{2x-1}{2x^2+1} < 1 && | \cdot (2x^2+1) \\
\Leftrightarrow \quad & 2x-1 < 2x^2+1 && | -2x+1 \\
\Leftrightarrow \quad & 0 < 2x^2-2x+2 && | : 2 \\
\Leftrightarrow \quad & 0 < x^2-x+1 && | \text{ binomische Ergänzung} \\
\Leftrightarrow \quad & 0 < \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Weil diese Ungleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, ergibt sich hier die Lösungsmenge $N = \mathbb{R}$.

Lösung zu c):
Es ist $M \cup N =]-3, \frac{1}{3}[\cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$ und $M \cap N =]-3, \frac{1}{3}[\cap \mathbb{R} =]-3, \frac{1}{3}[$.

Aufgabe 49 a

Ermitteln Sie sämtliche reellen Lösungen x der Gleichung $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x-1} = 1$.

Lösung:

$$\begin{aligned}
& \sqrt{2x-4} - \sqrt{x-1} = 1 && | \ (\ )^2 \\
\Rightarrow \quad & 2x-4-2\sqrt{2x-4}\sqrt{x-1}+x-1 = 1 && | -3x+5 \\
\Rightarrow \quad & -2\sqrt{2x-4}\sqrt{x-1} = -3x+6 && | \ (\ )^2 \\
\Rightarrow \quad & 4(2x-4)(x-1) = (-3x+6)^2 \\
\Rightarrow \quad & 8x^2-24x+16 = 9x^2-36x+36 && | -8x^2+24x-16 \\
\Rightarrow \quad & 0 = x^2-12x+20 && | \ p, q - \text{ Formel} \\
\Rightarrow \quad & x_{1,2} = 6 \pm \sqrt{36-20} \\
\Rightarrow \quad & x_{1,2} = 6 \pm 4
\end{aligned}$$

Also ist $x_1 = 10$ und $x_2 = 2$. Bei dem Lösen von Wurzelgleichungen muss immer eine Probe gemacht werden, da nicht unbedingt jede Lösung auch eine Lösung der Gleichung ist. Setzt man $x_1 = 10$ in die Ausgangsgleichung ein, ergibt sich eine wahre Aussage. Denn es gilt

$$\sqrt{2 \cdot 10 - 4} - \sqrt{10-1} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 1.$$

Für $x_2 = 2$ ergibt sich ein Widerspruch. Denn es ist

$$\sqrt{2 \cdot 2 - 4} - \sqrt{2-1} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 = 1.$$

Somit ist die einzige mögliche Lösung dieser Gleichung $x = 10$.

Aufgabe 49 b

Ermitteln Sie sämtliche reellen Lösungen x der Ungleichung $3-x<4-2x$.

Lösung:

Es ist $3-x<4-2x \Leftrightarrow x<1$. Also lautet die Lösungsmenge $L=]-\infty,1[$.

Aufgabe 49 c

Ermitteln Sie sämtliche reellen Lösungen x der Ungleichung $x^3-x^2<2x-2$.

Lösung:

$$\begin{aligned} & x^3-x^2<2x-2 && \mid -2x+2 \\ \Leftrightarrow \quad & x^3-x^2-2x+2<0 && \mid \text{faktorisieren} \\ \Leftrightarrow \quad & (x-1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})<0 \end{aligned}$$

Die Faktorisierung wird einsichtig, indem man das Polynom $g(x):=x^3-x^2-2x+2$ betrachtet und dessen Nullstellen bestimmt. Durch Raten findet man eine erste Nullstelle $x_1=1$. Die weiteren Nullstellen erhält man durch Polynomdivision mit dem Linearfaktor $(x-1)$. Dann folgt:

$$\begin{array}{l} (x^3-x^2-2x+2):(x-1)=x^2-2 \\ \underline{-(x^3-x^2)} \\ \quad 0 \quad 0 \quad -2x+2 \\ \qquad \underline{-(-2x+2)} \\ \qquad\quad 0 \quad 0 \end{array}$$

Setzt man jetzt das Ergebnis der Polynomdivision Null, dann ergeben sich die weiteren Nullstellen zu $x^2-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2=-\sqrt{2} \vee x_3=\sqrt{2}$.

- Für $x<-\sqrt{2}$ ist $(x-1)<0 \wedge (x-\sqrt{2})<0 \wedge (x+\sqrt{2})<0$ also $g(x)<0$.
- Für $-\sqrt{2}<x<1$ ist $(x-1)<0 \wedge (x-\sqrt{2})<0 \wedge (x+\sqrt{2})>0$ also $g(x)>0$.
- Für $1<x<\sqrt{2}$ ist $(x-1)>0 \wedge (x-\sqrt{2})<0 \wedge (x+\sqrt{2})>0$ also $g(x)<0$.
- Für $\sqrt{2}<x$ ist $(x-1)>0 \wedge (x-\sqrt{2})>0 \wedge (x+\sqrt{2})>0$ also $g(x)>0$.

Daraus lässt sich jetzt die Lösungsmenge $L=]-\infty,-\sqrt{2}[\ \cup\ ]1,\sqrt{2}[$ ablesen.

Aufgabe 49 d

Ermitteln Sie sämtliche reellen Lösungen x der Ungleichung $||x|-|-5||<1$.

Lösung:

Zunächst gilt:

$$||x|-|-5||<1 \quad \Leftrightarrow \quad ||x|-5|<1$$

1. Fall
Für $x \geq 5$ ist $|x| = x \wedge |x-5| = x-5$. Dann folgt aus

$$||x|-5| = |x-5| = x-5 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x < 6$$

die erste Lösungsmenge $L_1 = [5, 6[$.

2. Fall
Für $0 \leq x < 5$ ist $|x| = x \wedge |x-5| = -(x-5) = -x+5$. Dann folgt aus

$$||x|-5| = |x-5| = -x+5 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4 < x$$

die zweite Lösungsmenge $L_2 =]4, 5[$.

3. Fall
Für $-5 < x < 0$ ist $|x| = -x \wedge |-x-5| = -(-x-5) = x+5$. Dann folgt aus

$$||x|-5| = |-x-5| = x+5 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x < -4$$

die dritte Lösungsmenge $L_3 =]-5, -4[$.

4. Fall
Für $x \leq -5$ ist $|x| = -x \wedge |-x-5| = -x-5$. Dann folgt aus

$$||x|-5| = |-x-5| = -x-5 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -6 < x$$

die vierte Lösungsmenge $L_4 =]-6, 5]$.

Die Vereinigung der Mengen L_1 bis L_4 ergibt dann die Lösungsmenge L der Ungleichung. Sie lautet

$$\begin{aligned} L &= L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 \\ &= [5,6[\cup]4,5[\cup]-6,-5] \cup]-5,-4[=]-6,-4[\cup]4,6[. \end{aligned}$$

Aufgabe 49 e

Ermitteln Sie sämtliche reellen Lösungen x der Ungleichung $1 \leq |x| < 3$.

Lösung:

1. Fall Für $x \geq 0$ ist $|x| = x$ und die Ungleichung lautet dann $1 \leq x < 3$. Damit lautet die erste Lösungsmenge $L_1 = [1, 3[$.

2. Fall Für $x < 0$ ist $|x| = -x$ und die Ungleichung lautet jetzt $1 \leq -x < 3$. Wird diese Ungleichung mit -1 multipliziert, dann wird daraus $-1 \geq x > -3$. Die zweite Lösungsmenge ist also $L_2 =]-3, -1]$.

Die Lösungsmenge der Ungleichung erhält man aus der Vereinigung der beiden Mengen L_1 und L_2. Sie lautet $L = L_1 \cup L_2 =]-3, -1] \cup [1, 3[$.

Aufgabe 49 f

Ermitteln Sie sämtliche reellen Lösungen x der Menge $\{x \,||x-3| = |x+1|\} \cap [0, 3]$.

Lösung:
Zunächst wird die Gleichung $|x-3|=|x+1|$ betrachtet.

1. Fall Für $x \geq 3$ ist $|x-3|=x-3 \wedge |x+1|=x+1$. Dann wird aus der Gleichung $x-3=x+1 \Leftrightarrow -3=1$. Dieser Widerspruch führt auf $L_1=\{\}$.

2. Fall Für $-1 \leq x < 3$ ist $|x-3|=-(x-3)=-x+3 \wedge |x+1|=x+1$. Dann wird aus der Gleichung $-x+3=x+1 \Leftrightarrow 1=x$. Also ist $L_2=\{1\}$.

3. Fall Für $x < -1$ ist $|x-3|=-(x-3)=-x+3 \wedge |x+1|=-(x+1)=-x-1$. Dann wird aus der Gleichung $-x+3=-x-1 \Leftrightarrow 3=-1$. Dieser Widerspruch führt ebenfalls auf $L_3=\{\}$.

Die Gleichung hat offensichtlich nur die Lösung $x=1$, womit die gesamte Lösungsmenge $L=\{1\} \cap [0,3]=\{1\}$ ist.

Aufgabe 49 g

Ermitteln Sie sämtliche reellen Lösungen x der Gleichung $|x+1|-|x-1|=1$.

Lösung:

1. Fall Für $x \geq 1$ ist $|x+1|=x+1 \wedge |x-1|=x-1$. Dann wird aus der Gleichung $x+1-(x-1)=1 \Leftrightarrow 2=1$. Dieser Widerspruch führt auf $L_1=\{\}$.

2. Fall Für $-1 \leq x < 1$ ist $|x+1|=x+1 \wedge |x-1|=-(x-1)=-x+1$. Dann wird aus der Gleichung $x+1-(-x+1)=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$. Also ist $L_2=\{\frac{1}{2}\}$.

3. Fall Für $x < -1$ ist $|x+1|=-(x+1)=-x-1 \wedge |x-1|=-(x-1)=-x+1$. Dann wird aus der Gleichung $-x-1-(-x+1)=1 \Leftrightarrow -2=1$. Dieser Widerspruch führt ebenfalls auf $L_3=\{\}$.

Die einzige Lösung der Gleichung ist somit nur die Zahl $x=\frac{1}{2}$.

Aufgabe 49 h

Ermitteln Sie sämtliche reellen Lösungen x der Ungleichung $\frac{1}{x} < \frac{1}{x+1}$.

Lösung:
Zunächst ist der Definitionsbereich der Ungleichung $D=\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. Für $x < -1$ oder $x > 0$ ist das Produkt $x(x+1)$ positiv und man kann die Ungleichung mit diesem Produkt multiplizieren, ohne das sich das Ungleichheitszeichen umdreht.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x} < \frac{1}{x+1} && \mid \cdot x(x+1) \\ \Leftrightarrow \quad & x+1 < x && \mid -x \\ \Leftrightarrow \quad & 1 < 0 && \mid \text{Widerspruch} \end{aligned}$$

Also ist die erste Lösungsmenge nur die leere Menge $L_1=\{\}$.

Für $-1 < x < 0$ ist das Produkt $x(x+1)$ negativ und wenn man die Ungleichung mit diesem Produkt multipliziert, dann dreht sich das Ungleichheitszeichen um!

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x} < \frac{1}{x+1} && \mid \cdot x(x+1) \\ \Leftrightarrow \quad & x+1 > x && \mid -x \\ \Leftrightarrow \quad & 1 > 0 && \mid \text{wahre Aussage} \end{aligned}$$

In diesem Fall erhält man die Lösungsmenge $L_2 =]-1, 0[$. Die Vereinigung der beiden Mengen L_1 und L_2 ergibt dann die Lösungsmenge der Ungleichung. Sie lautet

$$L = L_1 \cup L_2 = \{\ \} \cup]-1, 0[=]-1, 0[.$$

Aufgabe 49 i

Ermitteln Sie sämtliche reellen Lösungen x der Ungleichung $6x^2 - 13x + 6 < 0$.

Lösung:
Zunächst wird das Polynom $f(x) := x^2 - \frac{13}{6}x + 1$ definiert. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & 6x^2 - 13x + 6 < 0 && \mid : 6 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - \frac{13}{6}x + 1 < 0 \\ \Leftrightarrow \quad & f(x) < 0 && \mid \text{faktorisieren} \\ \Leftrightarrow \quad & \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) < 0 \end{aligned}$$

Um diese Faktorisierung zu erhalten, kann man die Nullstellen x_1, x_2 von f bestimmen und gelangt dann zur Linearfaktordarstellung $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)$.

$$\begin{aligned} & f(x) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - \frac{13}{6}x + 1 = 0 && \mid p, q - \text{Formel} \\ \Leftrightarrow \quad & x_{0_{1,2}} = \frac{13}{12} \pm \sqrt{\frac{169}{144} - \frac{144}{144}} \\ \Leftrightarrow \quad & x_{0_{1,2}} = \frac{13}{12} \pm \frac{5}{12} \end{aligned}$$

Die Nullstellen lauten also $x_{0_1} = \frac{3}{2}$ und $x_{0_2} = \frac{2}{3}$.

- Für $x < \frac{2}{3}$ sind beide Linearfaktoren negativ und damit ist $f(x) > 0$.
- Für $\frac{2}{3} < x < \frac{3}{2}$ ist der erste Linearfaktor positiv und der zweite negativ. Dann ist $f(x) < 0$.
- Für $x > \frac{3}{2}$ sind beide Linearfaktoren positiv und damit ist $f(x) > 0$.

Die Lösungsmenge ist also das offene Intervall $L =]\frac{2}{3}, \frac{3}{2}[$.

Aufgabe 49 j

Ermitteln Sie sämtliche reellen Lösungen x der Gleichung $2 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{x\sqrt{2x}}}}$.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
& 2 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{x\sqrt{2x}}}} && \left| \,(\,)^2 \right. \\
\Rightarrow \quad & 2^2 = \sqrt{\sqrt{x\sqrt{2x}}} && \left| \,(\,)^2 \right. \\
\Rightarrow \quad & 2^4 = \sqrt{x\sqrt{2x}} && \left| \,(\,)^2 \right. \\
\Rightarrow \quad & 2^8 = x\sqrt{2x} && \left| \,(\,)^2 \right. \\
\Rightarrow \quad & 2^{16} = x^2 2x && \left| \,:2 \right. \\
\Rightarrow \quad & 2^{15} = x^3 && \left| \,\sqrt[3]{\ } \right. \\
\Rightarrow \quad & 2^5 = x
\end{aligned}
$$

Die Lösung dieser Gleichung ist $x = 2^5 = 32$.

Aufgabe 49 k

Ermitteln Sie sämtliche reellen Lösungen x der Gleichung $(2^x - 5)^2 = 100$.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
& (2^x - 5)^2 = 100 && \left| \,\sqrt{\ } \right. \\
\Rightarrow \quad & 2^x - 5 = \pm 10 && \left| \,+5 \right. \\
\Rightarrow \quad & 2^x = 5 \pm 10
\end{aligned}
$$

Nur die Gleichung $2^x = 15$ liefert eine reelle Lösung. Durch Logarithmieren ergibt sich $x = \log_2 15$. Die Gleichung $2^x = -5$ hat dagegen keine reelle Lösung.

Aufgabe 49 l

Ermitteln Sie sämtliche reellen Lösungen x der Gleichung $\sqrt{x+5} = x - 1$.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
& \sqrt{x+5} = x - 1 && \left| \,(\,)^2 \right. \\
\Rightarrow \quad & x + 5 = x^2 - 2x + 1 && \left| \,-x - 5 \right. \\
\Rightarrow \quad & 0 = x^2 - 3x - 4 && \left| \,p, q - \text{Formel} \right. \\
\Rightarrow \quad & x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}} \\
\Rightarrow \quad & x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

Das liefert die beiden Lösungen $x_1 = 4$ und $x_2 = -1$. Hier muss eine Probe gemacht werden, da nicht alle Lösungen unbedingt auch die Gleichung erfüllen müssen. Für $x_1 = 4$ erhält man durch Einsetzen die wahre Aussage $\sqrt{4+5} = 4-1$. Für $x_2 = -1$ erhält man durch Einsetzen den Widerspruch $\sqrt{-1+5} = -1-1$. Also ist nur $x = 4$ eine Lösung.

Aufgabe 49 m

Ermitteln Sie sämtliche reellen Lösungen x der Ungleichung $-(x+3)^2 \geq -6x$.

Lösung:

$$\begin{aligned} & -(x+3)^2 \geq -6x && \mid \text{ausmultiplizieren} \\ \Leftrightarrow \quad & -x^2 - 6x - 9 \geq -6x && \mid +x^2 + 6x + 9 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 \geq x^2 + 9 && \mid \text{Widerspruch} \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge der Ungleichung ist die leere Menge $L = \{\ \}$.

Aufgabe 49 n

Ermitteln Sie sämtliche reellen Lösungen x der Ungleichung $|x+2| > 5$.

Lösung:

1. Fall Für $x \geq -2$ ist $|x+2| = x+2 > 5 \Leftrightarrow x > 3$. Also lautet die erste Lösungsmenge $L_1 =]3, \infty[$.

2. Fall Für $x < -2$ ist $|x+2| = -(x+2) = -x-2 > 5 \Leftrightarrow x < -7$. Dann lautet die zweite Lösungsmenge $L_2 =]-\infty, -7[$.

Die Lösungsmenge der Ungleichung ergibt sich aus der Vereinigung der beiden Mengen L_1 und L_2. Sie lautet

$$L = L_1 \cup L_2 =]3, \infty[\cup]-\infty, -7[= \mathbb{R} \setminus [-7, 3].$$

Aufgabe 49 o

Ermitteln Sie sämtliche reellen Lösungen x der Ungleichung $x^2 + 4x + 2 < 2$.

Lösung:

$$\begin{aligned} & x^2 + 4x + 2 < 2 && \mid -2 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + 4x < 0 && \mid \text{faktorisieren} \\ \Leftrightarrow \quad & x(x+4) < 0 \end{aligned}$$

- Für $x < -4$ sind beide Faktoren negativ und somit das Produkt $x(x+4) > 0$.
- Für $-4 < x < 0$ ist der erste Faktor negativ und der zweite positiv und damit das Produkt $x(x+4) < 0$.
- Für $x > 0$ sind beide Faktoren positiv und somit das Produkt $x(x+4) > 0$.

Die Ungleichung hat damit die Lösungsmenge $L =]-4, 0[$.

Aufgabe 50 a

Bestimmen Sie von der Ungleichung $\frac{x}{|x+3|} < \frac{1}{|x-1|}$ den Definitionsbereich für reelle Zahlen x. Beschreiben Sie ihre Lösungsmenge in Intervallschreibweise und skizzieren Sie sie auf dem Zahlenstrahl.

Lösung:

Der Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$, weil an den Stellen $x = -3$ und $x = 1$ die Nenner null werden.

$$\begin{aligned} & \frac{x}{|x+3|} < \frac{1}{|x-1|} && | \cdot |x+3||x-1| \\ \Leftrightarrow \quad & x|x-1| < |x+3| && (\star) \end{aligned}$$

1. Fall

Für $x < -3$ ist $|x-1| = -(x-1) = -x+1 \wedge |x+3| = -(x+3) = -x-3$. Dann wird aus der Ungleichung $(\star)$:

$$\begin{aligned} & x(-x+1) < -x-3 \\ \Leftrightarrow \quad & -x^2+x < -x-3 && | +x^2 - x \\ \Leftrightarrow \quad & 0 < x^2 - 2x - 3 && | \text{ faktorisieren} \\ \Leftrightarrow \quad & 0 < (x-3)(x+1) \end{aligned}$$

Für $x < -3$ ist $x-3 < 0 \wedge x+1 < 0$ und damit gilt $(x-3)(x+1) > 0$. Daraus folgt die erste Lösungsmenge $L_1 =]-\infty, -3[$.

2. Fall

Für $-3 < x < 1$ ist $|x-1| = -(x-1) = -x+1 \wedge |x+3| = x+3$. Dann wird aus der Ungleichung $(\star)$:

$$\begin{aligned} & x(-x+1) < x+3 \\ \Leftrightarrow \quad & -x^2+x < x+3 && | +x^2 - x \\ \Leftrightarrow \quad & 0 < x^2+3 && | \text{ wahre Aussage für alle } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Daher ist die zweite Lösungsmenge $L_2 :=]-3, 1[$.

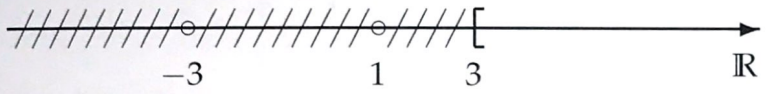
3. Fall

Für $x > 1$ ist $|x-1| = x-1 \wedge |x+3| = x+3$. Dann wird aus der Ungleichung $(\star)$:

$$\begin{aligned} & x(x-1) < x+3 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2-x < x+3 && | -x-3 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2-2x-3 < 0 && | \text{ faktorisieren} \\ \Leftrightarrow \quad & (x-3)(x+1) < 0 \end{aligned}$$

Da für $x > 1$ der Faktor $x + 1 > 0$ ist, muss der Faktor $x - 3 < 0$ sein, damit das Produkt negativ wird. Das ist offensichtlich nur für $1 < x < 3$ der Fall. Also ist die dritte Lösungsmenge $L_3 :=]1, 3[$. Die Vereinigung der drei Mengen L_1, L_2, L_3 ergibt schließlich die Lösungsmenge der Ungleichung. Sie lautet

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 =]-\infty, -3[\cup]-3, 1[\cup]1, 3[.$$



Grafische Darstellung von L.

Aufgabe 50 b

Bestimmen Sie von der Ungleichung $\frac{|x-2|}{x+2} \leq 4$ den Definitionsbereich für reelle Zahlen x. Beschreiben Sie ihre Lösungsmenge in Intervallschreibweise und skizzieren Sie sie auf dem Zahlenstrahl.

Lösung:

Der Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, da an der Stelle $x = -2$ der Nenner null wird.

1. Fall

Für $x < -2$ ist der Nenner $x + 2 < 0$ und bei der Multiplikation der Ungleichung mit dem Nenner dreht sich das Ungleichheitszeichen um!

$$\begin{aligned}
& \frac{|x-2|}{x+2} \leq 4 && | \cdot (x+2) \\
\Leftrightarrow\ & |x-2| \geq 4(x+2) && \\
\Leftrightarrow\ & |x-2| \geq 4x+8 && | \text{ da } x < -2 \text{ ist } |x-2| = -(x-2) = -x+2 \\
\Leftrightarrow\ & -x+2 \geq 4x+8 && | +x-8 \\
\Leftrightarrow\ & -6 \geq 5x && | :5 \\
\Leftrightarrow\ & -\frac{6}{5} \geq x &&
\end{aligned}$$

Also lautet die erste Lösungsmenge $L_1 := \{x \mid x < -2 \wedge x \leq -\frac{6}{5}\} =]-\infty, -2[$.

2. Fall

Für $x > -2$ ist der Nenner $x + 2 > 0$ und bei der Multiplikation der Ungleichung mit dem Nenner dreht sich das Ungleichheitszeichen nicht um!

$$\begin{aligned}
& \frac{|x-2|}{x+2} \leq 4 && | \cdot (x+2) \\
\Leftrightarrow\ & |x-2| \leq 4(x+2) && \\
\Leftrightarrow\ & |x-2| \leq 4x+8 && (\star)
\end{aligned}$$

Für $-2 < x < 2$ ist $|x-2| = -(x-2) = -x+2$ und für $x \geq 2$ ist $|x-2| = x-2$. Für diese beiden Fälle wird die Ungleichung $(\star)$ zu:

$$\begin{array}{rll} & -x+2 \le 4x+8 & \mid +x-8 \\ \Leftrightarrow & -6 \le 5x & \mid :5 \\ \Leftrightarrow & -\frac{6}{5} \le x & \end{array} \qquad \begin{array}{rll} & x-2 \le 4x+8 & \mid -x-8 \\ \Leftrightarrow & -10 \le 3x & \mid :3 \\ \Leftrightarrow & -\frac{10}{3} \le x & \end{array}$$

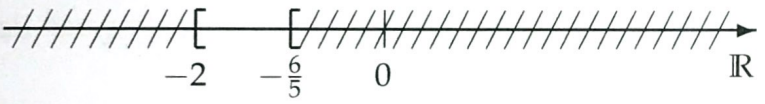
Die zweite und dritte Lösungsmenge ist damit

$$L_2 := \left\{ x \,\middle|\, -2 < x < 2 \ \wedge\ x \ge -\frac{6}{5} \right\} = \left[-\frac{6}{5}, 2 \right[,$$

$$L_3 := \left\{ x \,\middle|\, x \ge 2 \ \wedge\ x \ge -\frac{10}{3} \right\} = [2, \infty[.$$

Die Vereinigung der drei Mengen L_1, L_2, L_3 ergibt schließlich die Lösungsmenge der Ungleichung. Sie lautet

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 =]-\infty, -2[\cup \left[-\frac{6}{5}, 2 \right[\cup [2, \infty[=]-\infty, -2[\cup \left[-\frac{6}{5}, \infty \right[.$$



Grafische Darstellung von L.

Aufgabe 50 c

Bestimmen Sie von der Ungleichung $\frac{1}{|2x-3|} > 4$ den Definitionsbereich für reelle Zahlen x. Beschreiben Sie ihre Lösungsmenge in Intervallschreibweise und skizzieren Sie sie auf dem Zahlenstrahl.

Lösung:

Der Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R} \setminus \{ \frac{3}{2} \}$, da an der Stelle $x = \frac{3}{2}$ der Nenner null wird.

$$\begin{array}{rll} & \dfrac{1}{|\,2x-3\,|} > 4 & \mid \cdot \,|\,2x-3\,| \\ \Leftrightarrow & 1 > 4\,|\,2x-3\,| \quad (\star) & \end{array}$$

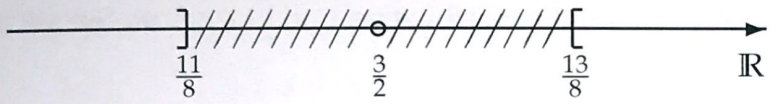
Für $x < \frac{3}{2}$ ist $|\,2x-3\,| = -(2x-3) = -2x+3$ und für $x > \frac{3}{2}$ ist $|\,2x-3\,| = 2x-3$. Für diese beiden Fälle wird die Ungleichung $(\star)$ zu:

$$\begin{array}{rll} & 1 > 4(-2x+3) & \\ \Leftrightarrow & 1 > -8x+12 & \mid +8x-1 \\ \Leftrightarrow & 8x > 11 & \mid :8 \\ \Leftrightarrow & x > \frac{11}{8} & \end{array} \qquad \begin{array}{rll} & 1 > 4(2x-3) & \\ \Leftrightarrow & 1 > 8x-12 & \mid +12 \\ \Leftrightarrow & 13 > 8x & \mid :8 \\ \Leftrightarrow & \frac{13}{8} > x & \end{array}$$

Daraus erhält man für die erste Lösungsmenge $L_1 := \{ x \mid x < \frac{3}{2} \ \wedge\ x > \frac{11}{8} \} =]\frac{11}{8}, \frac{3}{2}[$ und für die zweite Lösungsmenge $L_2 := \{ x \mid x > \frac{3}{2} \ \wedge\ x < \frac{13}{8} \} =]\frac{3}{2}, \frac{13}{8}[$.

Die Vereinigung der beiden Mengen L_1 und L_3 ergibt die Lösungsmenge der Ungleichung. Sie lautet

$$L = L_1 \cup L_2 = \left]\frac{11}{8}, \frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2}, \frac{13}{8}\right[= \left]\frac{11}{8}, \frac{13}{8}\right[\setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}.$$



Grafische Darstellung von L.

Aufgabe 50 d

Bestimmen Sie von der Ungleichung $|x+4| < |x-1| + |x-2|$ den Definitionsbereich für reelle Zahlen x. Beschreiben Sie ihre Lösungsmenge in Intervallschreibweise und skizzieren Sie sie auf dem Zahlenstrahl.

Lösung:

Der Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R}$, da in dieser Aufgabe keine Brüche vorhanden sind.

1. Fall

Für $x < -4$ ist $|x+4| = -(x+4) = -x-4$ und $|x-1| = -(x-1) = -x+1$ und $|x-2| = -(x-2) = -x+2$. Damit wird die Ungleichung zu $-x-4 < -x+1-x+2 \Leftrightarrow x < 7$. Die erste Lösungsmenge ist $L_1 := \{x \mid x < -4 \wedge x < 7\} =]-\infty, -4[$.

2. Fall

Für $-4 \leq x < 1$ ist $|x+4| = x+4$ und $|x-1| = -(x-1) = -x+1$ und $|x-2| = -(x-2) = -x+2$. Damit wird die Ungleichung zu $x+4 < -x+1-x+2 \Leftrightarrow 3x < -1 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{3}$. Die zweite Lösungsmenge ist also

$$L_2 := \left\{x \,\middle|\, -4 \leq x < 1 \wedge x < -\frac{1}{3}\right\} = \left[-4, -\frac{1}{3}\right[.$$

3. Fall

Für $1 \leq x < 2$ ist $|x+4| = x+4$ und $|x-1| = x-1$ und $|x-2| = -(x-2) = -x+2$. Damit wird die Ungleichung zu $x+4 < x-1-x+2 \Leftrightarrow x < -3$. Die dritte Lösungsmenge ergibt sich zu $L_3 := \{x \mid 1 \leq x < 2 \wedge x < -3\} = \{\}$.

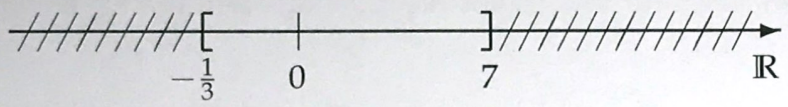
4. Fall

Für $x \geq 2$ ist $|x+4| = x+4$ und $|x-1| = x-1$ und $|x-2| = x-2$. Damit wird die Ungleichung zu $x+4 < x-1+x-2 \Leftrightarrow 7 < x$. Die vierte Lösungsmenge ergibt sich schließlich zu $L_4 := \{x \mid x \geq 2 \wedge x > 7\} =]7, \infty[$.

Die Vereinigung der vier Mengen $L_1, \ldots, L_4$ liefert die Lösungsmenge der Ungleichung. Sie lautet

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 =]-\infty, -4[\cup \left[-4, -\frac{1}{3}\right[\cup \{\} \cup]7, \infty[$$

$$= \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[\cup]7, \infty[.$$



Grafische Darstellung von L.

Aufgabe 50 e

Bestimmen Sie von der Ungleichung $\left|\frac{1}{x-6}\right| < 2$ den Definitionsbereich für reelle Zahlen x. Beschreiben Sie ihre Lösungsmenge in Intervallschreibweise und skizzieren Sie sie auf dem Zahlenstrahl.

Lösung:

Der Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R} \setminus \{6\}$, da an der Stelle $x = 6$ der Nenner null wird.

$$\begin{aligned} & \left|\frac{1}{x-6}\right| < 2 && \Big| \text{ es gilt } \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{|x-6|} < 2 && \Big| \cdot |x-6| \\ \Leftrightarrow \quad & 1 < 2|x-6| \quad (\star) \end{aligned}$$

1. Fall Für $x < 6$ ist $|x-6| = -(x-6) = -x+6$ und die Ungleichung $(\star)$ wird zu $1 < 2(-x+6) \Leftrightarrow x < \frac{11}{2}$. Dann ist die erste Lösungsmenge

$$L_1 := \left\{ x \,\middle|\, x < 6 \wedge x < \frac{11}{2} \right\} = \left]-\infty, \frac{11}{2}\right[.$$

2. Fall Für $x > 6$ ist $|x-6| = x-6$ und die Ungleichung $(\star)$ wird zu $1 < 2(x-6) \Leftrightarrow \frac{13}{2} < x$. Damit lautet die zweite Lösungsmenge

$$L_2 := \left\{ x \,\middle|\, x > 6 \wedge x > \frac{13}{2} \right\} = \left]\frac{13}{2}, \infty\right[.$$

Die Vereinigung der Mengen L_1 und L_2 ergibt schließlich die Lösungsmenge der Ungleichung. Sie lautet

$$L = L_1 \cup L_2 = \left]-\infty, \frac{11}{2}\right[\cup \left]\frac{13}{2}, \infty\right[.$$



Grafische Darstellung von L.

Aufgabe 50 f

Bestimmen Sie von der Ungleichung $\frac{|x-4|}{3-x} > x$ den Definitionsbereich für reelle Zahlen x. Beschreiben Sie ihre Lösungsmenge in Intervallschreibweise und skizzieren Sie sie auf dem Zahlenstrahl.

Lösung:

Der Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, da an der Stelle $x = 3$ der Nenner null wird.

1. Fall

Für $x < 3$ ist $3 - x > 0$ und die Ungleichung kann mit dem Nenner $x - 3$ multipliziert werden, ohne das sich das Ungleichheitszeichen umdreht.

$$\begin{aligned}
& \frac{|x-4|}{3-x} > x && | \cdot (3-x) \\
\Leftrightarrow \quad & |x-4| > x(3-x) && | \text{ für } x<3 \text{ ist } |x-4| = -(x-4) = -x+4 \\
\Leftrightarrow \quad & -x+4 > 3x - x^2 && | +x^2 - 3x \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 - 4x + 4 > 0 && | \text{ zweite binomische Formel} \\
\Leftrightarrow \quad & (x-2)^2 > 0 && | \text{ wahr für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}
\end{aligned}$$

Dann ist die erste Lösungsmenge $L_1 := \{ x \mid x < 3 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \} =]-\infty, 3[\setminus \{2\}$.

2. Fall

Für $x > 3$ ist $3 - x < 0$ und die Ungleichung kann mit dem Nenner $x - 3$ multipliziert werden, wobei sich jetzt das Ungleichheitszeichen umdreht!

$$\begin{aligned}
& \frac{|x-4|}{3-x} > x && | \cdot (3-x) \\
\Leftrightarrow \quad & |x-4| < x(3-x) \quad (\star)
\end{aligned}$$

Für $3 < x < 4$ ist $|x-4| = -(x-4) = -x+4$ und damit wird die Ungleichung $(\star)$ zu:

$$\begin{aligned}
& -x+4 < 3x - x^2 && | +x^2 - 3x \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 - 4x + 4 < 0 && | \text{ zweite binomische Formel} \\
\Leftrightarrow \quad & (x-2)^2 < 0 && | \text{ Widerspruch !}
\end{aligned}$$

Die zweite Lösungsmenge ist also die leere Menge $L_2 = \{\ \}$.

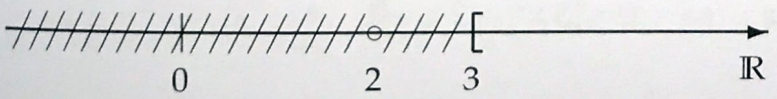
Für $x \geq 4$ ist $|x-4| = x - 4$ und damit wird die Ungleichung $(\star)$ zu:

$$\begin{aligned}
& x-4 < 3x - x^2 && | +x^2 - 3x \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 - 2x - 4 < 0 && | \text{ binomische Ergänzung} \\
\Leftrightarrow \quad & (x-1)^2 - 5 < 0 && | \text{ Widerspruch für } x \geq 4
\end{aligned}$$

Damit ist auch die dritte Lösungsmenge nur die leere Menge $L_3 = \{\ \}$.

Die Vereinigung der drei Mengen L_1, L_2, L_3 ergibt für die Ungleichung schließlich die Lösungsmenge

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 =]-\infty, 3[\setminus \{2\} \cup \{\ \} \cup \{\ \} =]-\infty, 3[\setminus \{2\}.$$



Grafische Darstellung von L.

Aufgabe 50 g

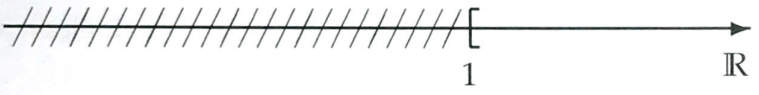
Bestimmen Sie von der Ungleichung $(x-3)(x-1) > (x-1)(x+5)$ den Definitionsbereich für reelle Zahlen x. Beschreiben Sie ihre Lösungsmenge in Intervallschreibweise und skizzieren Sie sie auf dem Zahlenstrahl.

Lösung:

Der Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R}$, da in dieser Aufgabe keine Brüche vorhanden sind.

$$\begin{aligned} & (x-3)(x-1) > (x-1)(x+5) && \mid \text{ausmultiplizieren} \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - 4x + 3 > x^2 + 4x - 5 && \mid -x^2 + 4x + 5 \\ \Leftrightarrow \quad & 8 > 8x && \mid :8 \\ \Leftrightarrow \quad & 1 > x \end{aligned}$$

Also ist die Lösungsmenge der Ungleichung das offene Intervall $L =]-\infty, 1[$.



Grafische Darstellung von L.

Aufgabe 50 h

Bestimmen Sie von der Ungleichung $\frac{1}{x-\frac{2}{3}} \geq 3x$ den Definitionsbereich für reelle Zahlen x. Beschreiben Sie ihre Lösungsmenge in Intervallschreibweise und skizzieren Sie sie auf dem Zahlenstrahl.

Lösung:

Der Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}$, da an der Stelle $x = \frac{2}{3}$ der Nenner null wird. In dieser Aufgabe wird die Linearfaktordarstellung des Polynoms $f(x) := x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ benötigt. Dazu werden die Nullstellen von f bestimmt, womit sich f dann schreiben lässt als $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)$.

$$\begin{aligned} & x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0 && \mid pq - \text{Formel anwenden} \\ \Leftrightarrow \quad & x_{1,2} = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{3}{9}} \\ \Leftrightarrow \quad & = \frac{1}{3} \pm \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Die beiden Nullstellen sind $x_1 = 1$ und $x_2 = -\frac{1}{3}$, womit sich für f die folgende Linearfaktordarstellung $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = (x-1)(x+\frac{1}{3})$ $(\star)$ ergibt.

1. Fall

Für $x < \frac{2}{3}$ ist der Nenner $x - \frac{2}{3}$ der Ungleichung negativ und bei Multiplikation der Ungleichung mit diesem dreht sich das Ungleichheitszeichen um! Dann folgt:

$$\frac{1}{x-\frac{2}{3}} \geq 3x \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq 3x^2 - 2x \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq 3x^2 - 2x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

Mit der Linearfaktordarstellung $(\star)$ ergibt sich die Ungleichung

$$(x-1)\left(x+\frac{1}{3}\right) \geq 0\,.$$

Für $x < \frac{2}{3}$ ist der erste Faktor $x-1<0$. Daher muss der zweite Faktor $x+\frac{1}{3}$ ebenfalls kleiner oder höchstens gleich null sein, damit das Produkt positiv oder null wird. Das ist für $x \leq -\frac{1}{3}$ der Fall. Damit erhält man die erste Lösungsmenge

$$L_1 = \left\{ x \,\middle|\, x < \frac{2}{3} \wedge x \leq -\frac{1}{3} \right\} = \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right]\,.$$

2. Fall

Für $x > \frac{2}{3}$ ist der Nenner $x-\frac{2}{3}$ positiv und bei Multiplikation der Ungleichung mit diesem dreht sich das Ungleichheitszeichen nicht um! In diesem Fall gilt:

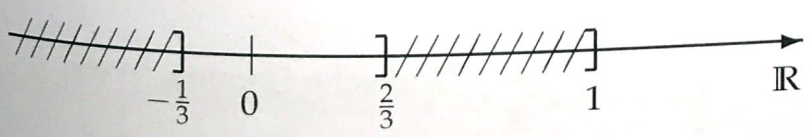
$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x-\frac{2}{3}} \geq 3x && \left| \cdot \left(x-\frac{2}{3}\right)\right. \\
\Leftrightarrow\quad & 1 \geq 3x\left(x-\frac{2}{3}\right) && \\
\Leftrightarrow\quad & 1 \geq 3x^2 - 2x && \left| -1 \right. \\
\Leftrightarrow\quad & 0 \geq 3x^2 - 2x - 1 && \left| :3 \right. \\
\Leftrightarrow\quad & 0 \geq x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} && \left| \text{ Linearfaktorzerlegung } (\star) \right. \\
\Leftrightarrow\quad & 0 \geq (x-1)\left(x+\frac{1}{3}\right) &&
\end{aligned}$$

Wegen $x > \frac{2}{3}$ ist der zweite Faktor $x+\frac{1}{3} > 0$. Daher muss der erste Faktor $x-1$ negativ oder höchstens gleich null sein, damit das Produkt negativ oder null wird. Das ist für $x \leq 1$ der Fall. Als zweite Lösungsmenge ergibt sich dann

$$L_2 = \left\{ x \,\middle|\, x > \frac{2}{3} \wedge x \leq 1 \right\} = \left]\frac{2}{3}, 1\right]\,.$$

Die Vereinigung der beiden Mengen L_1 und L_2 liefert die Lösungsmenge der Ungleichung. Sie lautet

$$L = L_1 \cup L_2 = \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup \left]\frac{2}{3}, 1\right]\,.$$



Grafische Darstellung von L.

Aufgabe 50 i

Bestimmen Sie von der Ungleichung $\frac{|x-2|}{x+6} \leq 1$ den Definitionsbereich für reelle Zahlen x. Beschreiben Sie ihre Lösungsmenge in Intervallschreibweise und skizzieren Sie sie auf dem Zahlenstrahl.

Lösung:

Der Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R} \setminus \{-6\}$, da an der Stelle $x = -6$ der Nenner null wird.

1. Fall

Für $x < -6$ ist der Nenner $x+6$ negativ und bei Multiplikation der Ungleichung mit diesem dreht sich das Ungleichheitszeichen um!

$$\begin{aligned} & \frac{|x-2|}{x+6} \leq 1 && | \cdot (x+6) \\ \Leftrightarrow \quad & |x-2| \geq x+6 && | \text{ für } x < -6 \text{ ist } |x-2| = -(x-2) = -x+2 \\ \Leftrightarrow \quad & -x+2 \geq x+6 && | -6+x \\ \Leftrightarrow \quad & -4 \geq 2x && | :2 \\ \Leftrightarrow \quad & -2 \geq x \end{aligned}$$

Die erste Lösungsmenge lautet also $L_1 := \{x \mid x < -6 \wedge x \leq -2\} =]-\infty, -6[$.

2. Fall

Für $x > -6$ ist der Nenner $x+6$ positiv und bei Multiplikation der Ungleichung mit diesem dreht sich das Ungleichheitszeichen nicht um!

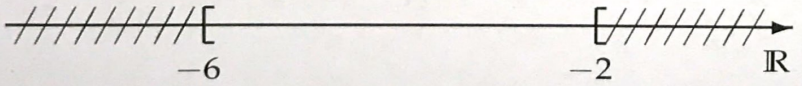
$$\begin{aligned} & \frac{|x-2|}{x+6} \leq 1 && | \cdot (x+6) \\ \Leftrightarrow \quad & |x-2| \leq x+6 \quad (\star) \end{aligned}$$

Für $-6 < x < 2$ ist $|x-2| = -(x-2) = -x+2$ und für $x \geq 2$ ist $|x-2| = x-2$. Damit wird die Ungleichung $(\star)$ zu:

$$\begin{aligned} & -x+2 \leq x+6 && | +x-6 \\ \Leftrightarrow \quad & -4 \leq 2x && | :2 \\ \Leftrightarrow \quad & -2 \leq x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & x-2 \leq x+6 && | -x \\ \Leftrightarrow \quad & -2 \leq 6 && | \text{ wahre Aussage} \end{aligned}$$

Dann ist die zweite Lösungsmenge $L_2 := \{x \mid -6 < x < 2 \wedge x \geq -2\} = [-2, 2[$ und die dritte Lösungsmenge $L_3 := \{x \mid x \geq 2 \wedge x \in \mathbb{R}\} = [2, \infty[$. Die Vereinigung der drei Mengen L_1, L_2, L_3 ergibt die Lösungsmenge der Ungleichung. Sie lautet

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 =]-\infty, -6[\cup [-2, 2[\cup [2, \infty[=]-\infty, -6[\cup [-2, \infty[.$$



Grafische Darstellung von L.

Aufgabe 50 j

Bestimmen Sie von der Ungleichung $|x-1|(x+4) \leq 0$ den Definitionsbereich für reelle Zahlen x. Beschreiben Sie ihre Lösungsmenge in Intervallschreibweise und skizzieren Sie sie auf dem Zahlenstrahl.

Lösung:

Der Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R}$, da in dieser Aufgabe keine Brüche vorhanden sind.

Die Gleichung $|x-1|(x+4) = 0$ wird erfüllt für $x = 1$ oder $x = -4$. Dann ist die erste Lösungsmenge $L_1 := \{-4, 1\}$.

Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ist $|x-1| > 0$. Daher muss der zweite Faktor $x+4 < 0$ werden, damit das Produkt $|x-1|(x+4) < 0$ ist. Das ist genau dann der Fall, wenn $x < -4$ ist. Folglich lautet die zweite Lösungsmenge $L_2 :=]-\infty, -4[$. Die Vereinigung der beiden Mengen L_1 und L_2 ergibt die Lösungsmenge der Ungleichung. Sie lautet

$$L = L_1 \cup L_2 = \{-4, 1\} \cup]-\infty, -4[=]-\infty, -4] \cup \{1\}.$$



Grafische Darstellung von L.

Aufgabe 50 k

Bestimmen Sie von der Ungleichung $\frac{|x|}{|x-3|} > 10$ den Definitionsbereich für reelle Zahlen x. Beschreiben Sie ihre Lösungsmenge in Intervallschreibweise und skizzieren Sie sie auf dem Zahlenstrahl.

Lösung:

Der Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, da an der Stelle $x = 3$ der Nenner null wird.

$$\begin{aligned} & \frac{|x|}{|x-3|} > 10 && | \cdot |x-3| \\ \Leftrightarrow \quad & |x| > 10\,|x-3| \quad (\star) \end{aligned}$$

1. Fall

Für $x < 0$ ist $|x| = -x \wedge |x-3| = -(x-3) = -x+3$. Dann wird die Ungleichung $(\star)$ zu:

$$\begin{aligned} & -x > 10(-x+3) \\ \Leftrightarrow \quad & -x > -10x + 30 && | +10x \\ \Leftrightarrow \quad & 9x > 30 && | : 9 \\ \Leftrightarrow \quad & x > \frac{10}{3} \end{aligned}$$

Die erste Lösungsmenge ist nur die leere Menge $L_1 := \{x \mid x < 0 \wedge x > \frac{10}{3}\} = \{\}$.

2. Fall

Für $0 \leq x < 3$ ist $|x| = x \wedge |x-3| = -(x-3) = -x+3$. Dann wird die Ungleichung $(\star)$ zu:

$$\begin{aligned} & x > 10(-x+3) \\ \Leftrightarrow \quad & x > -10x + 30 && |+10x \\ \Leftrightarrow \quad & 11x > 30 && |:11 \\ \Leftrightarrow \quad & x > \frac{30}{11} \end{aligned}$$

Die zweite Lösungsmenge lautet also $L_2 := \{ x \mid 0 \leq x < 3 \wedge x > \frac{30}{11} \} =]\frac{30}{11}, 3[$.

3. Fall

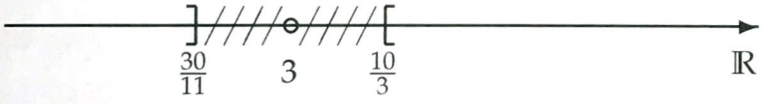
Für $x > 3$ gilt $|x| = x \wedge |x-3| = x-3$. Dann wird die Ungleichung $(\star)$ zu:

$$\begin{aligned} & x > 10(x-3) \\ \Leftrightarrow \quad & x > 10x - 30 && |+30-x \\ \Leftrightarrow \quad & 30 > 9x && |:9 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{10}{3} > x \end{aligned}$$

Dann ist die dritte Lösungsmenge $L_3 := \{ x \mid x > 3 \wedge x < \frac{10}{3} \} =]3, \frac{10}{3}[$.

Die Vereinigung der drei Mengen L_1, L_2, L_3 ergibt die Lösungsmenge der Ungleichung. Sie lautet

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \{\} \cup \left]\frac{30}{11}, 3\right[\cup \left]3, \frac{10}{3}\right[= \left]\frac{30}{11}, 3\right[\cup \left]3, \frac{10}{3}\right[.$$



Grafische Darstellung von L.

Aufgabe 50 l

Bestimmen Sie von der Ungleichung $\frac{x-5}{2x} \leq 11$ den Definitionsbereich für reelle Zahlen x. Beschreiben Sie ihre Lösungsmenge in Intervallschreibweise und skizzieren Sie sie auf dem Zahlenstrahl.

Lösung:

Der Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, da an der Stelle $x = 0$ der Nenner null wird.

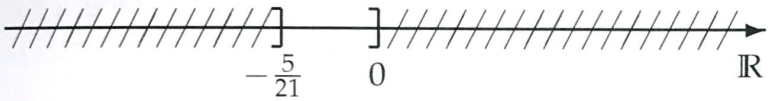
Für $x < 0$ ist der Nenner negativ und bei Multiplikation der Ungleichung mit diesem Nenner dreht sich das Ungleichheitszeichen um! Für $x > 0$ ist der Nenner positiv und bei Multiplikation der Ungleichung mit diesem Nenner dreht sich das Ungleichheitszeichen nicht um! Beide Rechnungen werden nebeneinander ausgeführt.

$$\frac{x-5}{2x} \leq 11 \quad | \cdot 2x < 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x-5 \geq 22x \quad | -x$$
$$\Leftrightarrow \quad -5 \geq 21x \quad | : 21$$
$$\Leftrightarrow \quad -\frac{5}{21} \geq x$$

$$\frac{x-5}{2x} \leq 11 \quad | \cdot 2x > 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x-5 \leq 22x \quad | -x$$
$$\Leftrightarrow \quad -5 \leq 21x \quad | : 21$$
$$\Leftrightarrow \quad -\frac{5}{21} \leq x$$

Dann ist die erste Lösungsmenge $L_1 := \{ x \mid x < 0 \wedge x \leq -\frac{5}{21} \} =]-\infty, -\frac{5}{21}]$ und die zweite Lösungsmenge $L_2 := \{ x \mid x > 0 \wedge x \geq -\frac{5}{21} \} =]0, \infty[$. Die Vereinigung der beiden Mengen L_1 und L_2 ergibt die Lösungsmenge der Ungleichung. Sie lautet

$$L = L_1 \cup L_2 = \left]-\infty, -\frac{5}{21}\right] \cup]0, \infty[.$$



Grafische Darstellung von L.

Aufgabe 50 m

Bestimmen Sie von der Ungleichung $|x-4| \geq 2|x+1|$ den Definitionsbereich für reelle Zahlen x. Beschreiben Sie ihre Lösungsmenge in Intervallschreibweise und skizzieren Sie sie auf dem Zahlenstrahl.

Lösung:

Der Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R}$, da in dieser Aufgabe keine Brüche vorhanden sind.

1. Fall

Für $x < -1$ ist $|x-4| = -(x-4) = -x+4$ und $|x+1| = -(x+1) = -x-1$. Damit wird die Ungleichung zu $-x+4 \geq 2(-x-1) \Leftrightarrow -x+4 \geq -2x-2 \Leftrightarrow x \geq -6$. Dann lautet die erste Lösungsmenge $L_1 := \{ x \mid x < -1 \wedge x \geq -6 \} = [-6, -1[$.

2. Fall

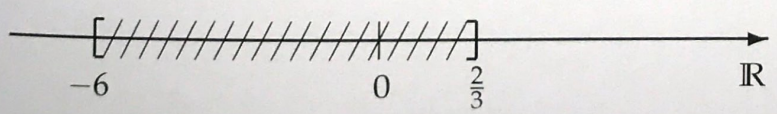
Für $-1 \leq x < 4$ ist $|x-4| = -(x-4) = -x+4$ und $|x+1| = x+1$. Damit wird die Ungleichung zu $-x+4 \geq 2(x+1) \Leftrightarrow -x+4 \geq 2x+2 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \geq x$. Dann lautet die zweite Lösungsmenge $L_2 := \{ x \mid -1 \leq x < 4 \wedge x \leq \frac{2}{3} \} = [-1, \frac{2}{3}]$.

3. Fall

Für $x \geq 4$ ist $|x-4| = x-4$ und $|x+1| = x+1$. Dann wird die Ungleichung zu $x-4 \geq 2(x+1) \Leftrightarrow x-4 \geq 2x+2 \Leftrightarrow -6 \geq x$. Damit ergibt sich für die dritte Lösungsmenge nur die leere Menge $L_3 := \{ x \mid x \geq 4 \wedge x \leq -6 \} = \{\ \}$.

Die Vereinigung der drei Mengen L_1, L_2, L_3 ergibt die Lösungsmenge der Ungleichung Sie lautet

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = [-6, -1[\cup \left[-1, \frac{2}{3}\right] \cup \{\ \} = \left[-6, \frac{2}{3}\right].$$



Grafische Darstellung von L.

Aufgabe 50 n

Bestimmen Sie von der Ungleichung $\frac{1}{|x-1|} < 2$ den Definitionsbereich für reelle Zahlen x. Beschreiben Sie ihre Lösungsmenge in Intervallschreibweise und skizzieren Sie sie auf dem Zahlenstrahl.

Lösung:

Der Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, da an der Stelle $x = 1$ der Nenner null wird.

$$\frac{1}{|x-1|} < 2 \qquad | \cdot |x-1|$$
$$\Leftrightarrow \quad 1 < 2|x-1| \quad (\star)$$

1. Fall

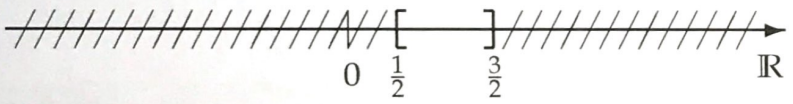
Für $x < 1$ ist $|x-1| = -(x-1) = -x+1$ und damit wird die Ungleichung $(\star)$ zu $1 < 2(-x+1) \Leftrightarrow 2x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$. Dann ist die erste Lösungsmenge

$$L_1 := \left\{ x \,\middle|\, x < 1 \wedge x < \frac{1}{2} \right\} = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[.$$

2. Fall

Für $x > 1$ ist $|x-1| = x-1$ und damit wird die Ungleichung $(\star)$ zu $1 < 2(x-1) \Leftrightarrow 3 < 2x \Leftrightarrow \frac{3}{2} < x$. Die zweite Lösungsmenge ist $L_2 := \{x \mid x > 1 \wedge x > \frac{3}{2}\} =]\frac{3}{2}, \infty[$. Die Vereinigung der Mengen L_1 und L_2 ergibt die Lösungsmenge der Ungleichung. Sie lautet

$$L = L_1 \cup L_2 = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2}, \infty\right[.$$



Grafische Darstellung von L.

Aufgabe 50 o

Bestimmen Sie von der Ungleichung $\frac{|x|}{|x|-1} < x$ den Definitionsbereich für reelle Zahlen x. Beschreiben Sie ihre Lösungsmenge in Intervallschreibweise und skizzieren Sie sie auf dem Zahlenstrahl.

Lösung:

Der Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, da an den Stellen $x = -1$ und $x = 1$ der Nenner null wird.

1. Fall

Für $x < -1$ ist $|x| = -x \wedge |x| - 1 > 0$. Da der Nenner in diesem Fall positiv ist, dreht sich das Ungleichheitszeichen bei der Multiplikation mit dem Nenner nicht um. Dann folgt aus der Ungleichung:

$$\begin{aligned} & \frac{-x}{-x-1} < x && | \cdot(-x-1) \\ \Leftrightarrow \quad & -x < x(-x-1) && \\ \Leftrightarrow \quad & -x < -x^2 - x && | +x^2 + x \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 < 0 && | \text{ Widerspruch!} \end{aligned}$$

Also lautet die erste Lösungsmenge $L_1 := \{\ \}$.

2. Fall

Für $-1 < x < 0$ ist $|x| = -x \wedge |x| - 1 < 0$. Da der Nenner in diesem Fall negativ ist, dreht sich das Ungleichheitszeichen bei der Multiplikation mit dem Nenner um! Dann folgt aus der Ungleichung:

$$\begin{aligned} & \frac{-x}{-x-1} < x && | \cdot(-x-1) \\ \Leftrightarrow \quad & -x > x(-x-1) && \\ \Leftrightarrow \quad & -x > -x^2 - x && | +x^2 + x \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 > 0 && | \text{ wahre Aussage für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Die zweite Lösungsmenge ist damit $L_2 := \{x \mid -1 < x < 0 \wedge x^2 > 0\} =]-1, 0[$.

3. Fall

Für $0 < x < 1$ ist $|x| = x \wedge |x| - 1 < 0$. Da der Nenner in diesem Fall negativ ist, dreht sich das Ungleichheitszeichen bei der Multiplikation mit diesem um! Dann folgt aus der Ungleichung:

$$\begin{aligned} & \frac{x}{x-1} < x && | \cdot(x-1) \\ \Leftrightarrow \quad & x > x(x-1) && \\ \Leftrightarrow \quad & x > x^2 - x && | -x \\ \Leftrightarrow \quad & 0 > x^2 - 2x && | \text{ faktorisieren} \\ \Leftrightarrow \quad & 0 > x(x-2) && \end{aligned}$$

Für $0 < x < 1$ ist $x > 0 \wedge x - 2 < 0$ und somit das Produkt negativ. Dann lautet die dritte Lösungsmenge $L_3 :=]0, 1[$.

4. Fall

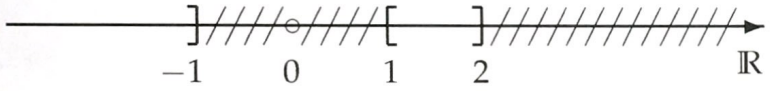
Für $x > 1$ ist $|x| = x \wedge |x| - 1 > 0$. Da der Nenner in diesem Fall positiv ist, dreht sich das Ungleichheitszeichen bei der Multiplikation mit dem Nenner nicht um! Dann folgt aus der Ungleichung:

$$\begin{aligned} & \frac{x}{x-1} < x && | \cdot (x-1) \\ \Leftrightarrow \quad & x < x(x-1) \\ \Leftrightarrow \quad & x < x^2 - x && | -x \\ \Leftrightarrow \quad & 0 < x^2 - 2x && | \text{ faktorisieren} \\ \Leftrightarrow \quad & 0 < x(x-2) \end{aligned}$$

Da für $x > 1$ der erste Faktor positiv ist, muss auch der zweite Faktor $x - 2$ positiv sein, damit das Produkt positiv ist. Das ist aber nur für $x > 2$ möglich. Damit lautet die vierte Lösungsmenge schließlich $L_4 :=]2, \infty[$.

Die Vereinigung der vier Mengen $L_1, \ldots, L_4$ ergibt die Lösungsmenge der Ungleichung. Sie lautet

$$\begin{aligned} L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 &= \{\ \} \cup\ ]-1, 0[\cup\ ]0, 1[\cup\ ]2, \infty[\\ &=]-1, 0[\cup\ ]0, 1[\cup\ ]2, \infty[. \end{aligned}$$



Grafische Darstellung von L.

Aufgabe 50 p

Bestimmen Sie von der Ungleichung $\frac{4}{|2-x|} < \frac{2}{|x+4|}$ den Definitionsbereich für reelle Zahlen x. Beschreiben Sie ihre Lösungsmenge in Intervallschreibweise und skizzieren Sie sie auf dem Zahlenstrahl.

Lösung:

Der Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, 2\}$, da an den Stellen $x = -4$ und $x = 2$ die Nenner null werden.

$$\begin{aligned} & \frac{4}{|2-x|} < \frac{2}{|x+4|} && | \cdot |2-x| \cdot |x+4| \\ \Leftrightarrow \quad & 4\,|x+4| < 2\,|2-x| \quad (\star) \end{aligned}$$

1. Fall

Für $x < -4$ ist $|x+4| = -(x+4) = -x-4$ und $|2-x| = 2-x$. Damit wird die Ungleichung $(\star)$ zu:

$$\begin{aligned} & 4(-x-4) < 2(2-x) \\ \Leftrightarrow \quad & -4x - 16 < 4 - 2x && | +4x - 4 \\ \Leftrightarrow \quad & -20 < 2x && | : 2 \\ \Leftrightarrow \quad & -10 < x \end{aligned}$$

Die erste Lösungsmenge ist $L_1 := \{x \mid x < -4 \wedge x > -10\} =]-10, -4[$.

2. Fall

Für $-4 < x < 2$ ist $|x+4| = x+4$ und $|2-x| = 2-x$. Damit wird die Ungleichung $(\star)$ zu:

$$\begin{aligned} & 4(x+4) < 2(2-x) \\ \Leftrightarrow \quad & 4x+16 < 4-2x \quad | +2x-16 \\ \Leftrightarrow \quad & 6x < -12 \quad | :6 \\ \Leftrightarrow \quad & x < -2 \end{aligned}$$

Dann ist die zweite Lösungsmenge $L_2 := \{x \mid -4 < x < 2 \wedge x < -2\} =]-4, -2[$.

3. Fall

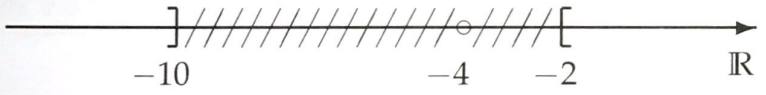
Für $x > 2$ ist $|x+4| = x+4$ und $|2-x| = -(2-x) = -2+x$. Damit wird die Ungleichung $(\star)$ zu:

$$\begin{aligned} & 4(x+4) < 2(-2+x) \\ \Leftrightarrow \quad & 4x+16 < -4+2x \quad | -2x-16 \\ \Leftrightarrow \quad & 2x < -20 \quad | :2 \\ \Leftrightarrow \quad & x < -10 \end{aligned}$$

Die dritte Lösungsmenge ist nur die leere Menge $L_3 := \{x \mid x > 2 \wedge x < -10\} = \{\}$.

Die Vereinigung der drei Mengen L_1, L_2, L_3 ergibt die Lösungsmenge der Ungleichung. Sie lautet

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 =]-10, -4[\cup]-4, -2[\cup \{\} =]-10, -4[\cup]-4, -2[.$$



Grafische Darstellung von L.

Aufgabe 50 q

Bestimmen Sie von der Ungleichung $||x| - 3| > 1$ den Definitionsbereich für reelle Zahlen x. Beschreiben Sie ihre Lösungsmenge in Intervallschreibweise und skizzieren Sie sie auf dem Zahlenstrahl.

Lösung:

Der Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R}$, da in dieser Aufgabe keine Brüche vorhanden sind.

1. Fall

Für $x < 0$ ist $|x| = -x$ und damit gilt zunächst $||x| - 3| = |-x-3| > 1$.

- Für $x \leq -3$ folgt $|-x-3| = -x-3 > 1 \Leftrightarrow -4 > x$. Dann ist die Lösungsmenge $L_1 := \{x \mid x < 0 \wedge x \leq -3 \wedge x < -4\} =]-\infty, -4[$.
- Für $x > -3$ ist $|-x-3| = -(-x-3) = x+3 > 1 \Leftrightarrow x > -2$. Also lautet die Lösungsmenge $L_2 := \{x \mid x < 0 \wedge x > -3 \wedge x > -2\} =]-2, 0[$.

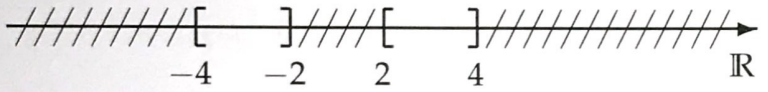
2. Fall

Für $x \geq 0$ ist $|x| = x$ und damit wird die Ungleichung zu $||x| - 3| = |x - 3| > 1$.

- Für $x < 3$ ist $|x - 3| = -(x - 3) = -x + 3 > 1 \Leftrightarrow 2 > x$. Dann ist die Lösungsmenge $L_3 := \{x \mid x \geq 0 \wedge x < 3 \wedge x < 2\} = [0, 2[$.
- Für $x \geq 3$ ist $|x - 3| = x - 3 > 1 \Leftrightarrow x > 4$. Folglich lautet die Lösungsmenge $L_4 := \{x \mid x \geq 0 \wedge x \geq 3 \wedge x > 4\} =]4, \infty[$.

Die Vereinigung der Mengen L_1 bis L_4 ergibt die Lösungsmenge der Ungleichung. Sie lautet

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 =]-\infty, -4[\cup]-2, 0[\cup [0, 2[\cup]4, \infty[$$
$$=]-\infty, -4[\cup]-2, 2[\cup]4, \infty[.$$



Grafische Darstellung von L.

Aufgabe 50 r

Bestimmen Sie von der Ungleichung $|3x - 1| \geq |x + 1|$ den Definitionsbereich für reelle Zahlen x. Beschreiben Sie ihre Lösungsmenge in Intervallschreibweise und skizzieren Sie sie auf dem Zahlenstrahl.

Lösung:

Der Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R}$, da in dieser Aufgabe keine Brüche vorhanden sind.

1. Fall

Für $x < -1$ ist $|3x - 1| = -(3x - 1) = -3x + 1$ und $|x + 1| = -(x + 1) = -x - 1$. Damit wird die Ungleichung zu $-3x + 1 \geq -x - 1 \Leftrightarrow 2 \geq 2x \Leftrightarrow 1 \geq x$ und die erste Lösungsmenge ist $L_1 := \{x \mid x < -1 \wedge x \leq 1\} =]-\infty, -1[$.

2. Fall

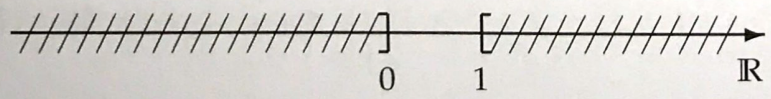
Für $-1 \leq x < \frac{1}{3}$ ist $|3x - 1| = -(3x - 1) = -3x + 1$ und $|x + 1| = x + 1$. Damit wird die Ungleichung zu $-3x + 1 \geq x + 1 \Leftrightarrow 0 \geq 4x \Leftrightarrow 0 \geq x$. Dann lautet die zweite Lösungsmenge $L_2 := \{x \mid -1 \leq x < \frac{1}{3} \wedge x \leq 0\} = [-1, 0]$.

3. Fall

Für $x \geq \frac{1}{3}$ ist $|3x - 1| = 3x - 1$ und $|x + 1| = x + 1$. Damit wird die Ungleichung zu $3x - 1 \geq x + 1 \Leftrightarrow 2x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 1$. Also ergibt sich für die dritte Lösungsmenge $L_3 := \{x \mid x \geq \frac{1}{3} \wedge x \geq 1\} = [1, \infty[$.

Die Vereinigung der drei Mengen L_1, L_2, L_3 ergibt die Lösungsmenge der Ungleichung. Sie lautet

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 =]-\infty, -1[\cup [-1, 0] \cup [1, \infty[=]-\infty, 0] \cup [1, \infty[.$$



Grafische Darstellung von L.

Aufgabe 50 s

Bestimmen Sie von der Ungleichung $|3x-2|-2 \leq |1-2x|$ den Definitionsbereich für reelle Zahlen x. Beschreiben Sie ihre Lösungsmenge in Intervallschreibweise und skizzieren Sie sie auf dem Zahlenstrahl.

Lösung:
Der Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R}$, da in dieser Aufgabe keine Brüche vorhanden sind.

1. Fall

Für $x \leq \frac{1}{2}$ ist $|3x-2| = -(3x-2) = -3x+2$ und $|1-2x| = 1-2x$ und damit wird die Ungleichung zu $-3x+2-2 \leq 1-2x \Leftrightarrow -1 \leq x$. Dann lautet die erste Lösungsmenge $L_1 := \{x \mid x \leq \frac{1}{2} \wedge x \geq -1\} = [-1, \frac{1}{2}]$.

2. Fall

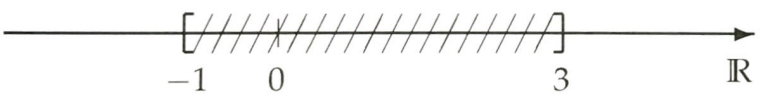
Für $\frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}$ ist $|3x-2| = -(3x-2) = -3x+2$ und $|1-2x| = -(1-2x) = -1+2x$. Damit wird die Ungleichung zu $-3x+2-2 \leq -1+2x \Leftrightarrow 1 \leq 5x \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq x$. Also ist die zweite Lösungsmenge $L_2 := \{x \mid \frac{1}{2} < x < \frac{2}{3} \wedge x \geq \frac{1}{5}\} =]\frac{1}{2}, \frac{2}{3}[$.

3. Fall

Für $x \geq \frac{2}{3}$ ist $|3x-2| = 3x-2$ und $|1-2x| = -(1-2x) = -1+2x$. Damit wird die Ungleichung zu $3x-2-2 \leq -1+2x \Leftrightarrow x \leq 3$. Folglich lautet die dritte Lösungsmenge $L_3 := \{x \mid x \geq \frac{2}{3} \wedge x \leq 3\} = [\frac{2}{3}, 3]$.

Die Vereinigung der drei Mengen L_1, L_2, L_3 ergibt die Lösungsmenge der Ungleichung. Sie lautet

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \left[-1, \frac{1}{2}\right] \cup \left]\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right[\cup \left[\frac{2}{3}, 3\right] = [-1, 3].$$



Grafische Darstellung von L.

Aufgabe 50 t

Bestimmen Sie von der Ungleichung $|x+\frac{1}{x}| \geq 4$ den Definitionsbereich für reelle Zahlen x. Beschreiben Sie ihre Lösungsmenge in Intervallschreibweise und skizzieren Sie sie auf dem Zahlenstrahl.

Lösung:
Der Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, da an der Stelle $x = 0$ der Nenner null wird.

1. Fall

Für $x > 0$ gilt $\left|x+\frac{1}{x}\right| = x+\frac{1}{x} > 0$ und die Ungleichung wird zu:

$$\begin{aligned} & x+\frac{1}{x} \geq 4 && \mid \cdot x \\ \Leftrightarrow \quad & x^2+1 \geq 4x && \mid -4x \\ \Leftrightarrow \quad & x^2-4x+1 \geq 0 && \mid \text{binomische Ergänzung} \\ \Leftrightarrow \quad & (x-2)^2-3 \geq 0 && \mid +3 \\ \Leftrightarrow \quad & (x-2)^2 \geq 3 \end{aligned}$$

Diese Ungleichung wird erfüllt für

$$x-2 \leq -\sqrt{3} \ \vee \ x-2 \geq \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -\sqrt{3}+2 \ \vee \ x \geq \sqrt{3}+2.$$

Damit ergibt sich die erste Lösungsmenge

$$\begin{aligned} L_1 &= \{x \mid x>0 \ \wedge \ x \leq -\sqrt{3}+2\} \ \cup \ \{x \mid x>0 \ \wedge \ x \geq \sqrt{3}+2\} \\ &=]0, -\sqrt{3}+2] \ \cup \ [\sqrt{3}+2, \infty[. \end{aligned}$$

2. Fall

Für $x<0$ ist $\left|x+\frac{1}{x}\right| = -\left(x+\frac{1}{x}\right) = -x-\frac{1}{x}$ und die Ungleichung wird zu:

$$\begin{aligned} & -x-\frac{1}{x} \geq 4 && \mid \cdot x \\ \Leftrightarrow \quad & -x^2-1 \leq 4x && \mid +x^2+1 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 \leq x^2+4x+1 && \mid \text{binomische Ergänzung} \\ \Leftrightarrow \quad & 0 \leq (x+2)^2-3 && \mid +3 \\ \Leftrightarrow \quad & 3 \leq (x+2)^2 \end{aligned}$$

Diese Ungleichung wird erfüllt für

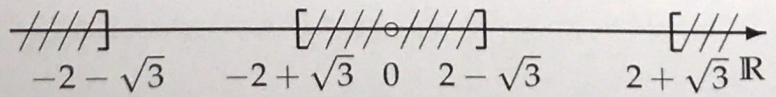
$$x+2 \leq -\sqrt{3} \ \vee \ x+2 \geq \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -\sqrt{3}-2 \ \vee \ x \geq \sqrt{3}-2.$$

Dann lautet die zweite Lösungsmenge

$$\begin{aligned} L_2 &= \{x \mid x<0 \ \wedge \ x \leq -\sqrt{3}-2\} \ \cup \ \{x \mid x<0 \ \wedge \ x \geq \sqrt{3}-2\} \\ &=]-\infty, -\sqrt{3}-2] \ \cup \ [\sqrt{3}-2, 0[. \end{aligned}$$

Die Vereinigung der beiden Mengen L_1 und L_2 ergibt die Lösungsmenge der Ungleichung. Sie lautet

$$L = L_1 \cup L_2 =]0, -\sqrt{3}+2] \ \cup \ [\sqrt{3}+2, \infty[\ \cup \ ]-\infty, -\sqrt{3}-2] \ \cup \ [\sqrt{3}-2, 0[.$$



Grafische Darstellung von L.

Aufgabe 50 u

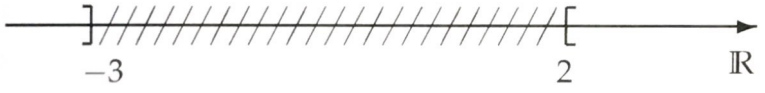
Bestimmen Sie von der Ungleichung $x(x+1) < 6$ den Definitionsbereich für reelle Zahlen x. Beschreiben Sie ihre Lösungsmenge in Intervallschreibweise und skizzieren Sie sie auf dem Zahlenstrahl.

Lösung:

Der Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R}$, da in dieser Aufgabe keine Brüche vorhanden sind.

$$\begin{aligned} & x(x+1) < 6 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + x < 6 && \mid -6 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + x - 6 < 0 && \mid \text{binomische Ergänzung} \\ \Leftrightarrow \quad & \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} < 0 && \mid +\frac{25}{4} \\ \Leftrightarrow \quad & \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{25}{4} \end{aligned}$$

Diese Ungleichung wird erfüllt für $-\frac{5}{2} < x + \frac{1}{2} < \frac{5}{2} \Leftrightarrow -3 < x < 2$. Also ist die Lösungsmenge $L =]-3, 2[$.



Grafische Darstellung von L.

Aufgabe 50 v

Bestimmen Sie von der Ungleichung $|-2| \cdot |x+1| \geq |x-1| + 1$ den Definitionsbereich für reelle Zahlen x. Beschreiben Sie ihre Lösungsmenge in Intervallschreibweise und skizzieren Sie sie auf dem Zahlenstrahl.

Lösung:

Der Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R}$, da in dieser Aufgabe keine Brüche vorhanden sind. Zunächst gilt:

$$|-2|\,|x+1| \geq |x-1| + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2\,|x+1| \geq |x-1| + 1 \quad (\star)$$

1. Fall

Für $x < -1$ ist $|x+1| = -(x+1) = -x-1$ und $|x-1| = -(x-1) = -x+1$. Aus der Ungleichung $(\star)$ wird dann $2(-x-1) \geq -x+1+1 \Leftrightarrow -4 \geq x$. Die erste Lösungsmenge ergibt sich zu $L_1 := \{x \mid x < -1 \wedge x \leq -4\} =]-\infty, -4]$.

2. Fall

Für $-1 \leq x < 1$ ist $|x+1| = x+1$ und $|x-1| = -(x-1) = -x+1$. Aus der Ungleichung $(\star)$ wird dann $2(x+1) \geq -x+1+1 \Leftrightarrow x \geq 0$. Die zweite Lösungsmenge lautet also $L_2 := \{x \mid -1 \leq x < 1 \wedge x \geq 0\} = [0, 1[$.

3. Fall

Für $x \geq 1$ ist $|x+1| = x+1$ und $|x-1| = x-1$. Aus der Ungleichung $(\star)$ wird dann $2(x+1) \geq x-1+1 \Leftrightarrow x \geq -2$. Dann ist $L_3 := \{x \mid x \geq 1 \wedge x \geq -2\} = [1, \infty[$.

Aufgabe 51 i

Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j-\sqrt{j}+1}{j^2+j+1}$ auf Konvergenz beziehungsweise Divergenz.

Der Grenzwert ist hier nicht gefragt!

Lösung:

Behauptung: Die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j-\sqrt{j}+1}{j^2+j+1}$ ist divergent.

Für den Beweis wird das Minorantenkriterium für Reihen verwendet. Für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_j = \frac{j-\sqrt{j}+1}{j^2+j+1} = \frac{j+1-\sqrt{j}}{j^2+j+1} \cdot \frac{j+1+\sqrt{j}}{j+1+\sqrt{j}} = \frac{(j+1)^2-j}{(j^2+j+1)(j+1+\sqrt{j})}$$

$$= \frac{j^2+j+1}{(j^2+j+1)(j+1+\sqrt{j})} = \frac{1}{j+1+\sqrt{j}} \geq \frac{1}{j+j+j} = \frac{1}{3j} := b_j.$$

Da die Reihe mit den Folgengliedern b_j divergent ist, ist nach dem Minorantenkriterium auch die Reihe mit den Folgengliedern a_j divergent.

Aufgabe 51 j

Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k+3}{4^k}$ auf Konvergenz beziehungsweise Divergenz. Der Grenzwert ist hier nicht gefragt!

Lösung:

Behauptung: Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k+3}{4^k}$ ist konvergent.

Für den Beweis wird hier benutzt, dass die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ für $|q| < 1$ konvergent ist. Damit erhält man

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k+3}{4^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{4}\right)^k + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k + 3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Aufgabe 51 k

Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2j)!}{j^{2j}}$ auf Konvergenz beziehungsweise Divergenz. Der Grenzwert ist hier nicht gefragt!

Lösung:

Behauptung: Die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2j)!}{j^{2j}}$ ist konvergent.

Für den Beweis wird hier das Quotientenkriterium verwendet. Für alle $j \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\lim_{j\to\infty}\left|\frac{a_{j+1}}{a_j}\right| = \lim_{j\to\infty}\left|\frac{(2j+2)!\,j^{2j}}{(j+1)^{2j+2}(2j)!}\right| = \lim_{j\to\infty}\frac{(2j)!(2j+1)(2j+2)j^{2j}}{(j+1)^{2j}(j+1)^2(2j)!}$$

$$= \lim_{j\to\infty}\frac{4j^2+6j+2}{j^2+2j+1}\cdot\left(\frac{j}{j+1}\right)^{2j} = \lim_{j\to\infty}\frac{4+\frac{6}{j}+\frac{2}{j^2}}{1+\frac{2}{j}+\frac{1}{j^2}}\cdot\left[\left(1+\frac{1}{j}\right)^{j}\right]^{-2}$$

$$= \frac{4+\lim_{j\to\infty}\frac{6}{j}+\lim_{j\to\infty}\frac{2}{j^2}}{1+\lim_{j\to\infty}\frac{2}{j}+\lim_{j\to\infty}\frac{1}{j^2}}\cdot\left[\lim_{j\to\infty}\left(1+\frac{1}{j}\right)^{j}\right]^{-2} = \frac{4+0+0}{1+0+0}e^{-2} = \frac{4}{e^2} < 1.$$

Also ist die Reihe mit den Folgengliedern a_j nach dem Quotientenkriterium konvergent und damit die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 51 l

Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+1)!}{3^{n^2}}$ auf Konvergenz beziehungsweise Divergenz.

Der Grenzwert ist hier nicht gefragt!

Lösung:

Behauptung: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+1)!}{3^{n^2}}$ ist konvergent.

Für den Beweis wird hier das Quotientenkriterium verwendet. Für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(3n+4)!\,3^{n^2}}{3^{(n+1)^2}(3n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)!(3n+2)(3n+3)(3n+4)}{3^{n^2+2n+1-n^2}(3n+1)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{27n^3+81n^2+78n+24}{3^{2n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{9n^3+27n^2+26n+8}{9^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{9n^3}{9^n}+\lim_{n\to\infty}\frac{27n^2}{9^n}+\lim_{n\to\infty}\frac{26n}{9^n}+\lim_{n\to\infty}\frac{8}{9^n} = 0+0+0+0 = 0.$$

Also ist die Reihe mit den Folgengliedern a_n nach dem Quotientenkriterium konvergent und damit die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 51 m

Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{k^n}$ mit $k\in\mathbb{N}$ auf Konvergenz beziehungsweise Diver-

genz. Der Grenzwert ist hier nicht gefragt!

Lösung:

Behauptung: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{k^n}$ ist konvergent für $k>1$ und divergent für $k=1$.

Für den Beweis wird hier das Quotientenkriterium verwendet. Für alle $k\in\mathbb{N}$ gilt

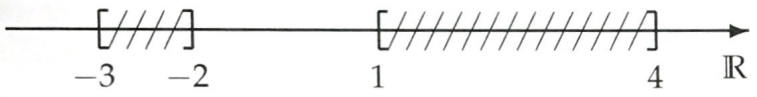
3. Fall Für $-2 < x < 1$ ist $x-1<0 \wedge x+2>0 \wedge x-4<0 \wedge -x-3<0$ und das Produkt der Linearfaktoren ist dann kleiner null.

4. Fall Für $1 < x < 4$ ist $x-1>0 \wedge x+2>0 \wedge x-4<0 \wedge -x-3<0$ und das Produkt der Linearfaktoren ist dann größer null. Also lautet die dritte Lösungsmenge $L_3 :=]1,4[$.

5. Fall Für $x > 4$ ist $x-1>0 \wedge x+2>0 \wedge x-4>0 \wedge -x-3<0$ und das Produkt der Linearfaktoren ist dann kleiner null.

Die Vereinigung der drei Mengen L_1, L_2, L_3 ergibt schließlich die Lösungsmenge der Ungleichung. Sie lautet

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \{-3,-2,1,4\} \cup]-3,-2[\cup]1,4[= [-3,-2] \cup [1,4].$$



Grafische Darstellung von L.

Aufgabe 50 z

Bestimmen Sie von der Ungleichung $\frac{5-|x-5|}{x+2} < 3$ den Definitionsbereich für reelle Zahlen x. Beschreiben Sie ihre Lösungsmenge in Intervallschreibweise und skizzieren Sie sie auf dem Zahlenstrahl.

Lösung:
Der Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, da an der Stelle $x = -2$ der Nenner null wird.

1. Fall

Für $x < -2$ ist der Nenner negativ und bei Multiplikation mit dem Nenner dreht sich das Ungleichheitszeichen um!

$$\begin{aligned}
& \frac{5-|x-5|}{x+2} < 3 && | \cdot (x+2) \\
\Leftrightarrow \quad & 5-|x-5| > 3(x+2) && | \text{ für } x<-2 \text{ ist } |x-5| = -x+5 \\
\Leftrightarrow \quad & 5-(-x+5) > 3x+6 && \\
\Leftrightarrow \quad & 5+x-5 > 3x+6 && | -x-6 \\
\Leftrightarrow \quad & -6 > 2x && | :2 \\
\Leftrightarrow \quad & -3 > x &&
\end{aligned}$$

Dann ist die erste Lösungsmenge $L_1 := \{x \mid x<-2 \wedge x<-3\} =]-\infty,-3[$.

2. Fall

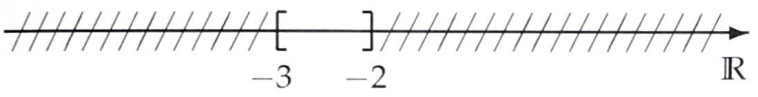
Für $x > -2$ ist der Nenner positiv und bei Multiplikation mit dem Nenner dreht sich das Ungleichheitszeichen nicht um!

$$\begin{aligned}
& \frac{5-|x-5|}{x+2} < 3 && | \cdot (x+2) \\
\Leftrightarrow \quad & 5-|x-5| < 3(x+2) \quad (\star) &&
\end{aligned}$$

- Für $-2 < x < 5$ ist $|x-5| = -(x-5) = -x+5$ und die Ungleichung $(\star)$ wird zu $5+x-5 < 3x+6 \Leftrightarrow x < 3x+6 \Leftrightarrow -6 < 2x \Leftrightarrow -3 < x$. Dann ist die zweite Lösungsmenge $L_2 := \{x \mid -2 < x < 5 \wedge x > -3\} =]-2, 5[$.
- Für $x \geq 5$ ist $|x-5| = x-5$ und die Ungleichung $(\star)$ wird zu $5-(x-5) < 3x+6 \Leftrightarrow -x+10 < 3x+6 \Leftrightarrow 4 < 4x \Leftrightarrow 1 < x$. Damit lautet die dritte Lösungsmenge $L_3 := \{x \mid x \geq 5 \wedge x > 1\} = [5, \infty[$.

Die Vereinigung der drei Mengen L_1, L_2, L_3 ergibt die Lösungsmenge der Ungleichung. Sie lautet

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 =]-\infty, -3[\cup]-2, 5[\cup [5, \infty[=]-\infty, -3[\cup]-2, \infty[.$$



Grafische Darstellung von L.

Aufgabe 51 a

Bestimmen Sie für die Ungleichung $|x| < |y|$ die Menge der Paare $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, die diese erfüllen und skizzieren Sie die Menge in einem kartesischen Koordinatensystem.

Lösung:

1. Fall

Für $x, y \geq 0$ ist $|x| = x \wedge |y| = y$ und damit folgt aus der Ungleichung $x < y$. Also besteht die erste Lösungsmenge aus allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die im ersten Quadranten des kartesischen Koordinatensystems oberhalb der Geraden von $g_1(x) = x$ liegen. Dann ist $L_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge y > x\}$.

2. Fall

Für $x < 0 \wedge y \geq 0$ ist $|x| = -x \wedge |y| = y$ und damit folgt aus der Ungleichung $-x < y$. Also besteht die zweite Lösungsmenge aus allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die im zweiten Quadranten des kartesischen Koordinatensystems oberhalb der Geraden von $g_2(x) = -x$ liegen. Dann ist $L_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0 \wedge y \geq 0 \wedge y > -x\}$.

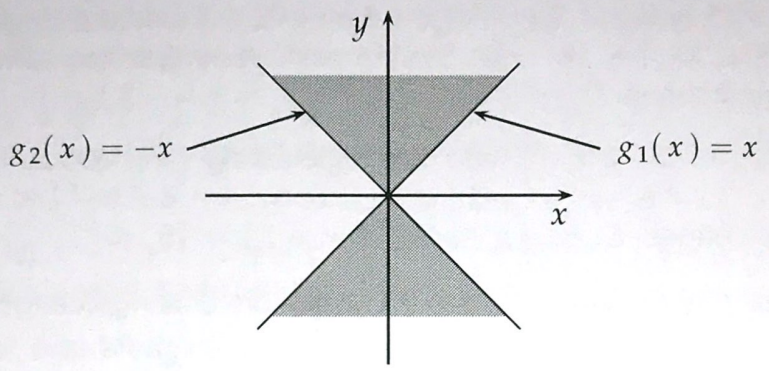
3. Fall

Für $x < 0 \wedge y < 0$ ist $|x| = -x \wedge |y| = -y$ und damit folgt aus der Ungleichung $-x < -y \Leftrightarrow y < x$. Also besteht die dritte Lösungsmenge aus allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die im dritten Quadranten des kartesischen Koordinatensystems unterhalb der Geraden $g_1(x) = x$ liegen. Dann ist $L_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0 \wedge y < 0 \wedge y < x\}$.

4. Fall

Für $x \geq 0 \wedge y < 0$ ist $|x| = x \wedge |y| = -y$ und damit folgt aus der Ungleichung $x < -y \Leftrightarrow y < -x$. Also besteht die vierte Lösungsmenge aus allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die im vierten Quadranten des kartesischen Koordinatensystems unterhalb der Geraden $g_2(x) = -x$ liegen. Dann ist $L_4 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \wedge y < 0 \wedge y < -x\}$.

Die Lösungsmenge der Ungleichung ergibt sich jetzt aus der Vereinigung der vier Mengen $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$, die in der nachfolgenden Abbildung dargestellt ist.

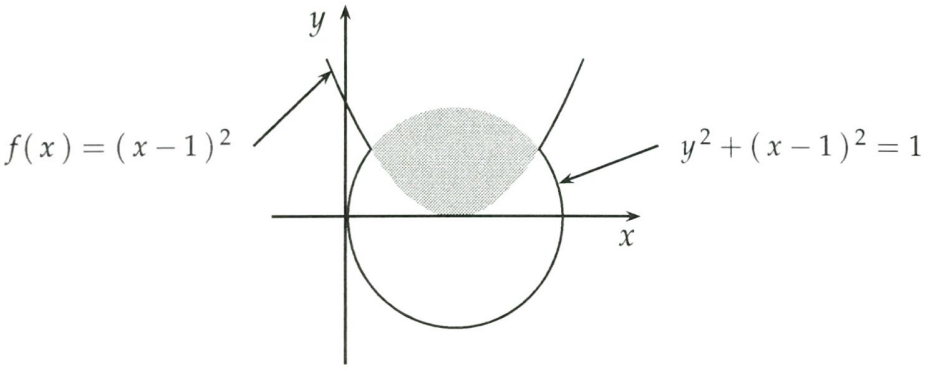


Aufgabe 51 b

Bestimmen Sie für die Ungleichungen $y \geq (x-1)^2 \wedge y^2 + (x-1)^2 \leq 1$ die Menge der Paare $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, die diese erfüllen und skizzieren Sie die Menge in einem kartesischen Koordinatensystem.

Lösung:

Die Ungleichung $y \geq (x-1)^2$ beschreibt alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die oberhalb oder auf der Parabel $f(x) = (x-1)^2$ liegen. Die zweite Ungleichung $y^2 + (x-1)^2 \leq 1$ beschreibt alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die innerhalb oder auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt $M(1, 0)$ und dem Radius $R = 1$ liegen. Die gesuchte Lösungsmenge L der Ungleichung ist die Schnittmenge dieser beiden Mengen. Die folgende Abbildung zeigt die grafische Darstellung der Lösungsmenge L.



Aufgabe 51 c

Bestimmen Sie für die Ungleichung $|x| + |y| \leq 4$ die Menge der Paare $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, die diese erfüllen und skizzieren Sie die Menge in einem kartesischen Koordinatensystem.

Lösung:

1. Fall

Für $x, y \geq 0$ ist $|x| = x \wedge |y| = y$ und damit folgt aus der Ungleichung $x + y \leq 4 \Leftrightarrow y \leq -x + 4$. Also besteht die erste Lösungsmenge L_1 aus allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die im ersten Quadranten des kartesischen Koordinatensystems unterhalb oder auf der Geraden $g_1(x) = -x + 4$ liegen.

$$L_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge y \leq -x + 4\}$$

2. Fall
Für $x < 0 \wedge y \geq 0$ ist $|x| = -x \wedge |y| = y$ und damit folgt aus der Ungleichung $-x+y \leq 4 \Leftrightarrow y \leq x+4$. Also besteht die zweite Lösungsmenge L_2 aus allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die im zweiten Quadranten des kartesischen Koordinatensystems unterhalb oder auf der Geraden $g_2(x) = x+4$ liegen.

$$L_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0 \wedge y \geq 0 \wedge y \leq x+4\}$$

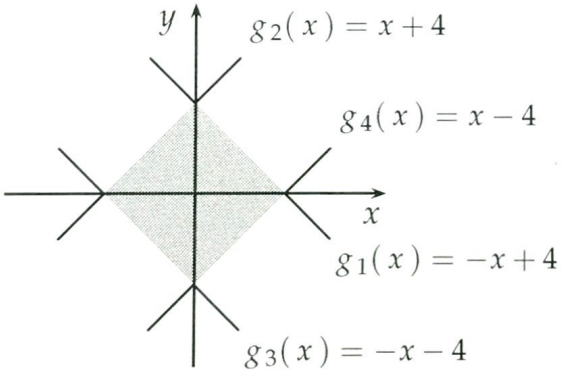
3. Fall
Für $x < 0 \wedge y < 0$ ist $|x| = -x \wedge |y| = -y$ und damit folgt aus der Ungleichung $-x-y \leq 4 \Leftrightarrow y \geq -x-4$. Also besteht die dritte Lösungsmenge L_3 aus allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die im dritten Quadranten des kartesischen Koordinatensystems oberhalb oder auf der Geraden $g_3(x) = -x-4$ liegen.

$$L_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0 \wedge y < 0 \wedge y \geq -x-4\}$$

4. Fall
Für $x \geq 0 \wedge y < 0$ ist $|x| = x \wedge |y| = -y$ und damit folgt aus der Ungleichung $x-y \leq 4 \Leftrightarrow y \geq x-4$. Also besteht die vierte Lösungsmenge L_4 aus allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die im vierten Quadranten des kartesischen Koordinatensystems oberhalb oder auf der Geraden $g_4(x) = x-4$ liegen.

$$L_4 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \wedge y < 0 \wedge y \geq x-4\}$$

Die gesuchte Lösungsmenge L der Ungleichung ist die Vereinigung der vier Mengen $L_1, \ldots, L_4$. Die folgende Abbildung zeigt die grafische Darstellung von L.



Aufgabe 51 d

Bestimmen Sie für die Ungleichung $|x-y|^2 - |x+y|^2 \leq 1$ die Menge der Paare $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, die diese erfüllen und skizzieren Sie die Menge in einem kartesischen Koordinatensystem.

Lösung:
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $|x|^2 = (x)^2$ und damit folgt:

$$
\begin{aligned}
& |x-y|^2-|x+y|^2 \leq 1 \\
\Leftrightarrow \quad & (x-y)^2-(x+y)^2 \leq 1 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2-2xy+y^2-x^2-2xy-y^2 \leq 1 \\
\Leftrightarrow \quad & -4xy \leq 1
\end{aligned}
$$

1. Fall
Für $x=0$ ist $y \in \mathbb{R}$ beliebig. Die erste Lösungsmenge ist die ganze $y-$ Achse.

2. Fall
Für $y=0$ ist $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Die zweite Lösungsmenge ist die ganze $x-$ Achse.

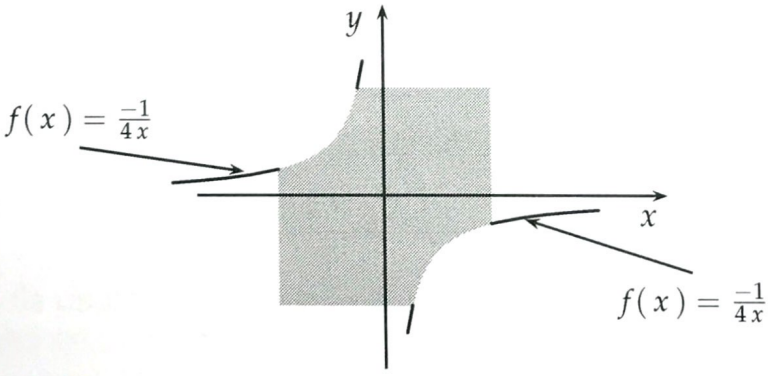
3. Fall
Für $x>0$ ist der Term $-4x$ negativ und bei der Division der Ungleichung durch diesen Term dreht sich das Ungleichheitszeichen um! Also folgt für die dritte Lösungsmenge

$$L_3 := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x>0 \wedge y \geq -\frac{1}{4x} \right\}.$$

4. Fall
Für $x<0$ ist der Term $-4x$ positiv und bei der Division der Ungleichung durch diesen Term dreht sich das Ungleichheitszeichen nicht um! Also ist die vierte Lösungsmenge

$$L_4 := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x<0 \wedge y \leq -\frac{1}{4x} \right\}.$$

Die gesuchte Lösungsmenge L der Ungleichung erhält man durch Vereinigung dieser vier Mengen. Die folgende Abbildung zeigt die grafische Darstellung von L.



Aufgabe 51 e

Bestimmen Sie für die Ungleichung $x^2-2|y|>1$ die Menge der Paare $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, die diese erfüllen und skizzieren Sie die Menge in einem kartesischen Koordinatensystem.

Lösung:

1. Fall
Für $y \geq 0$ ist $|y|=y$ und die Ungleichung wird zu $x^2-2y>1 \Leftrightarrow y<-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{2}$. Das

sind alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ der oberen Halbebene die unterhalb der Parabel liegen. Dann lautet die erste Lösungsmenge

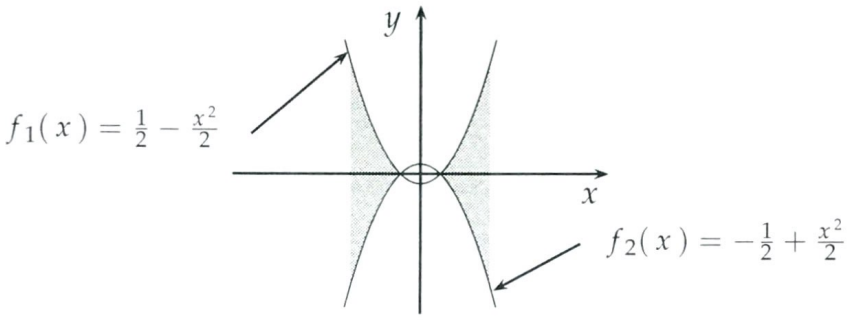
$$L_1 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y \geq 0 \wedge y < -\frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} \right\}.$$

2. Fall

Für $y < 0$ ist $|y| = -y$ und die Ungleichung wird zu $x^2 + 2y > 1 \Leftrightarrow y > \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}$. Das sind alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ der unteren Halbebene die oberhalb der Parabel liegen. Damit lautet die zweite Lösungsmenge

$$L_2 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y < 0 \wedge y > \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} \right\}.$$

Die gesuchte Lösungsmenge L der Ungleichung ist die Vereinigung dieser zwei Mengen. Die folgende Abbildung zeigt die grafische Darstellung von L.



Aufgabe 51 f

Bestimmen Sie für die Ungleichung $|x-1| + |y+1| \leq 1$ die Menge der Paare $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, die diese erfüllen und skizzieren Sie die Menge in einem kartesischen Koordinatensystem.

Lösung:

1. Fall

Für $x \geq 1$ und $y \geq -1$ ist $|x-1| = x-1$ und $|y+1| = y+1$. Dann wird aus der Ungleichung $x - 1 + y + 1 \leq 1 \Leftrightarrow y \leq 1 - x$ und die erste Lösungsmenge lautet

$$L_1 := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1 \wedge y \geq -1 \wedge y \leq 1 - x \}.$$

2. Fall

Für $x \geq 1$ und $y < -1$ ist $|x-1| = x-1$ und $|y+1| = -(y+1) = -y-1$. Dann wird aus der Ungleichung $x - 1 - y - 1 \leq 1 \Leftrightarrow y \geq x - 3$ und die zweite Lösungsmenge lautet

$$L_2 := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1 \wedge y < -1 \wedge y \geq x - 3 \}.$$

3. Fall

Für $x < 1$ und $y \geq -1$ ist $|x-1| = -(x-1) = -x+1$ und $|y+1| = y+1$. Dann wird aus der Ungleichung $-x + 1 + y + 1 \leq 1 \Leftrightarrow y \leq x - 1$ und die dritte Lösungsmenge lautet

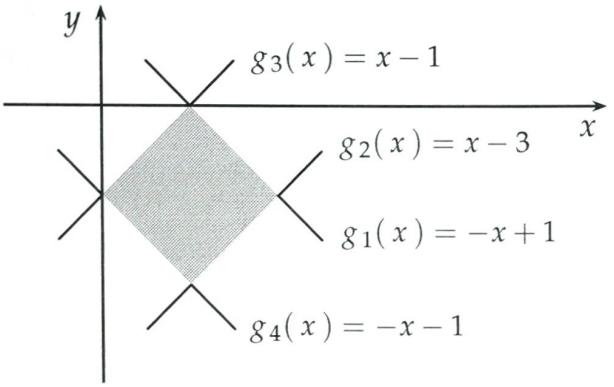
$$L_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 1 \wedge y \geq -1 \wedge y \leq x - 1\}.$$

4. Fall

Für $x < 1$ und $y < -1$ ist $|x-1| = -(x-1) = -x+1$ und $|y+1| = -(y+1) = -y-1$. Dann wird aus der Ungleichung $-x+1-y-1 \leq 1 \Leftrightarrow y \geq -x-1$ und die vierte Lösungsmenge lautet

$$L_4 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 1 \wedge y < -1 \wedge y \geq -x - 1\}.$$

Die gesuchte Lösungsmenge L der Ungleichung ist die Vereinigung dieser vier Mengen. Die folgende Abbildung zeigt die grafische Darstellung von L.

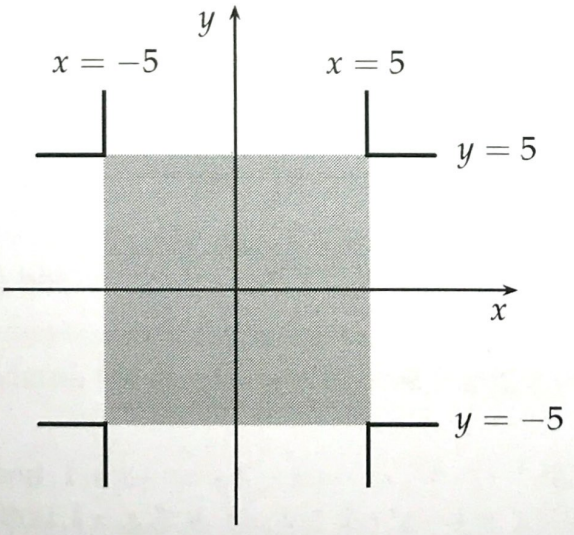


Aufgabe 51 g

Bestimmen Sie für die Ungleichungen $|x| \leq 5 \wedge |y| \leq 5$ die Menge der Paare $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, die diese erfüllen und skizzieren Sie die Menge in einem kartesischen Koordinatensystem.

Lösung:

Die Lösungsmenge lautet einfach $L := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -5 \leq x \leq 5 \wedge -5 \leq y \leq 5\}$ und hat die folgende grafische Darstellung:

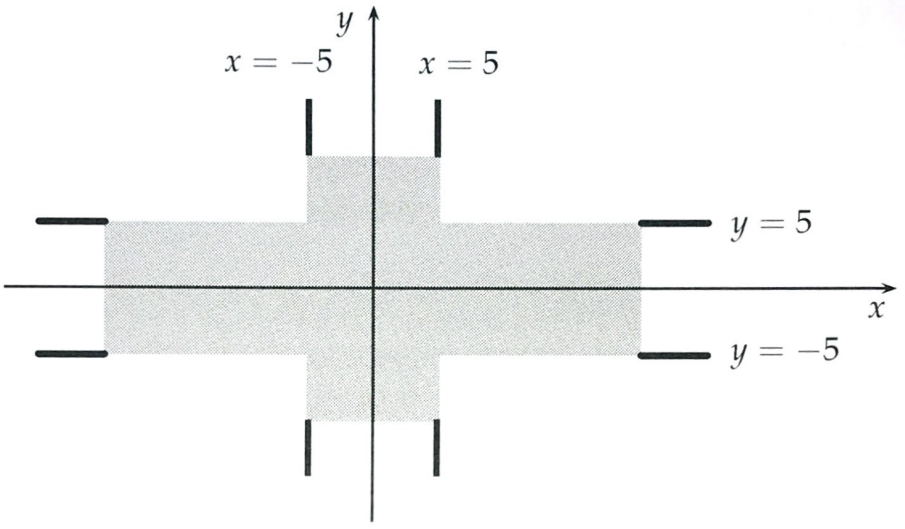


Aufgabe 51 h

Bestimmen Sie für die Ungleichungen $|x| \leq 5 \vee |y| \leq 5$ die Menge der Paare $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, die diese erfüllen und skizzieren Sie die Menge in einem kartesischen Koordinatensystem.

Lösung:

Die Lösungsmenge lautet $L := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -5 \leq x \leq 5 \vee -5 \leq y \leq 5\}$ und hat die folgende grafische Darstellung:



Aufgabe 51 i

Bestimmen Sie für die Ungleichung $|xy| \geq 1$ die Menge der Paare $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, die diese erfüllen und skizzieren Sie die Menge in einem kartesischen Koordinatensystem.

Lösung:

Die Ungleichung ist für $x = 0$ oder $y = 0$ nicht definiert!

1. Fall

Für $x, y > 0$ ist $|xy| = xy$. Dann wird die Ungleichung zu $xy \geq 1 \Leftrightarrow y \geq \frac{1}{x}$, da $x > 0$ ist. Das sind alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ im ersten Quadranten des kartesischen Koordinatensystems, die oberhalb oder auf der Hyperbel $f_1(x) = \frac{1}{x}$ liegen. Dann ergibt sich die erste Lösungsmenge

$$L_1 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x > 0 \wedge y > 0 \wedge y \geq \frac{1}{x} \right\}.$$

2. Fall

Für $x < 0 \wedge y > 0$ ist $|xy| = -xy$. Dann wird die Ungleichung zu $-xy \geq 1 \Leftrightarrow y \geq -\frac{1}{x}$. Da $-x > 0$ ist, bleibt das Ungleichheitszeichen erhalten! Das sind alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ im zweiten Quadranten des kartesischen Koordinatensystems, die oberhalb oder auf der Hyperbel $f_2(x) = -\frac{1}{x}$ liegen. Die zweite Lösungsmenge lautet damit

$$L_2 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x < 0 \wedge y > 0 \wedge y \geq -\frac{1}{x} \right\}.$$

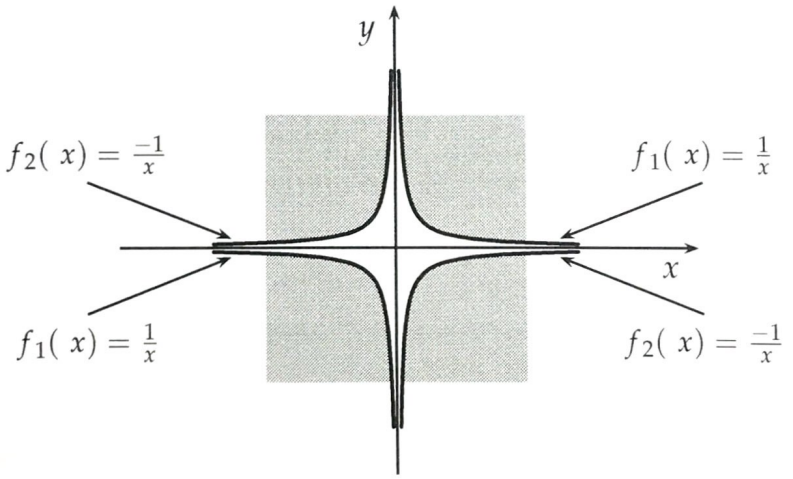
3. Fall
Für $x < 0 \wedge y < 0$ ist $|xy| = xy$. Dann wird die Ungleichung zu $xy \geq 1 \Leftrightarrow y \leq \frac{1}{x}$. Da $x < 0$ ist, dreht sich das Ungleichheitszeichen um! Das sind alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ im dritten Quadranten des kartesischen Koordinatensystems, die unterhalb oder auf der Hyperbel $f_1(x) = \frac{1}{x}$ liegen. Damit ergibt sich die dritte Lösungsmenge

$$L_3 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x < 0 \wedge y < 0 \wedge y \leq \frac{1}{x} \right\}.$$

4. Fall
Für $x > 0 \wedge y < 0$ ist $|xy| = -xy$. Dann wird die Ungleichung zu $-xy \geq 1 \Leftrightarrow y \leq -\frac{1}{x}$. Da $-x < 0$ ist, dreht sich das Ungleichheitszeichen um! Das sind alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ im vierten Quadranten des kartesischen Koordinatensystems, die unterhalb oder auf der Hyperbel $f_2(x) = -\frac{1}{x}$ liegen. Also ergibt sich die vierte Lösungsmenge

$$L_4 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x > 0 \wedge y < 0 \wedge y \leq -\frac{1}{x} \right\}.$$

Die Lösungsmenge L der Ungleichung erhält man aus der Vereinigung der vier Mengen $L_1, \ldots, L_4$ deren grafische Darstellung wie folgt aussieht.



Aufgabe 51 j

Bestimmen Sie für die Ungleichung $\frac{x}{y} \leq \frac{y}{x}$ die Menge der Paare $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, die diese erfüllen und skizzieren Sie die Menge in einem kartesischen Koordinatensystem.

Lösung:
Die Ungleichung ist nur für $x \neq 0$ und $y \neq 0$ definiert, weil die Nenner nicht null werden dürfen.

1. Fall
Für $x > 0 \wedge y > 0$ oder $x < 0 \wedge y < 0$ ist das Produkt xy positiv und bei Multiplikation der Ungleichung mit diesem Produkt bleibt das Ungleichheitszeichen erhalten.

Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \frac{x}{y} \leq \frac{y}{x} && | \cdot x\,y \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 \leq y^2 && | -y^2 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - y^2 \leq 0 && | \text{ dritte binomische Formel} \\ \Leftrightarrow \quad & (x-y)(x+y) \leq 0 \quad (\star) \end{aligned}$$

- Für $x > 0 \wedge y > 0$ ist $x + y > 0$ und daher muss $x - y \leq 0 \Leftrightarrow y \geq x$ sein, damit die Ungleichung $(\star)$ erfüllt wird. Das sind alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ im ersten Quadranten des kartesischen Koordinatensystems, die oberhalb oder auf der Geraden $f_1(x) = x$ liegen. Also lautet die erste Lösungsmenge

$$L_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \wedge y > 0 \wedge y \geq x\}.$$

- Für $x < 0 \wedge y < 0$ ist $x + y < 0$ und daher muss $x - y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq x$ sein, damit die Ungleichung $(\star)$ erfüllt wird. Das sind alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ im dritten Quadranten des kartesischen Koordinatensystems, die unterhalb oder auf der Geraden $f_1(x) = x$ liegen. Damit lautet die zweite Lösungsmenge

$$L_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0 \wedge y < 0 \wedge y \leq x\}.$$

2. Fall

Für $x < 0 \wedge y > 0$ oder $x > 0 \wedge y < 0$ ist das Produkt $x\,y$ negativ und bei Multiplikation der Ungleichung mit diesem Produkt dreht sich das Ungleichheitszeichen um! Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \frac{x}{y} \leq \frac{y}{x} && | \cdot x\,y \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 \geq y^2 && | -y^2 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - y^2 \geq 0 && | \text{ dritte binomische Formel} \\ \Leftrightarrow \quad & (x-y)(x+y) \geq 0 \quad (\star) \end{aligned}$$

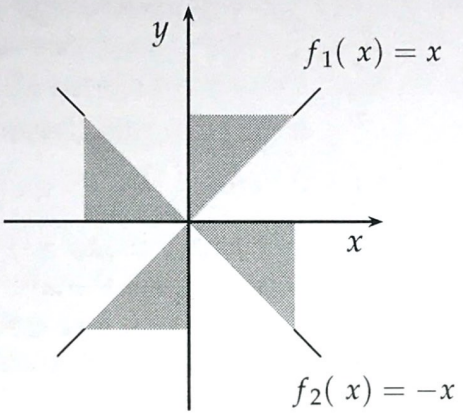
- Für $x < 0 \wedge y > 0$ ist $x - y < 0$ und daher muss $x + y \leq 0 \Leftrightarrow y \leq -x$ sein damit die Ungleichung $(\star)$ erfüllt wird. Das sind alle die Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ im zweiten Quadranten des kartesischen Koordinatensystems, die unterhalb oder auf der Geraden $f_2(x) = -x$ liegen. Also lautet die dritte Lösungsmenge

$$L_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0 \wedge y > 0 \wedge y \leq -x\}.$$

- Für $x > 0 \wedge y < 0$ ist $x - y > 0$ und daher muss $x + y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -x$ sein damit die Ungleichung $(\star)$ erfüllt wird. Das sind alle die Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, im vierten Quadranten des kartesischen Koordinatensystems, die oberhalb oder auf der Geraden $f_2(x) = -x$ liegen. Schließlich lautet die vierte Lösungsmenge

$$L_4 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \wedge y < 0 \wedge y \geq -x\}.$$

Die Lösungsmenge der Ungleichung ergibt sich als Vereinigung der vier Mengen $L_1, L_2,$ und L_3, L_4, deren grafische Darstellung wie folgt aussieht:



Aufgabe 51 k

Bestimmen Sie für die Ungleichung $|x-1|\,y \geq 1$ die Menge der Paare $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, die diese erfüllen und skizzieren Sie die Menge in einem kartesischen Koordinatensystem.

Lösung:

Die Ungleichung ist für $x = 1$ und $y = 0$ nicht definiert. Für $x \neq 1$ ergibt sich:

$$|x-1|\,y \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad y \geq \frac{1}{|x-1|} \quad (\star)$$

1. Fall

Für $x > 1$ ist $|x-1| = x-1$ und die Ungleichung $(\star)$ lautet dann $y \geq \frac{1}{x-1}$. Das sind alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die überhalb oder auf der Hyperbel $f_1(x) = \frac{1}{x-1}$ liegen. Die erste Lösungsmenge lautet dann

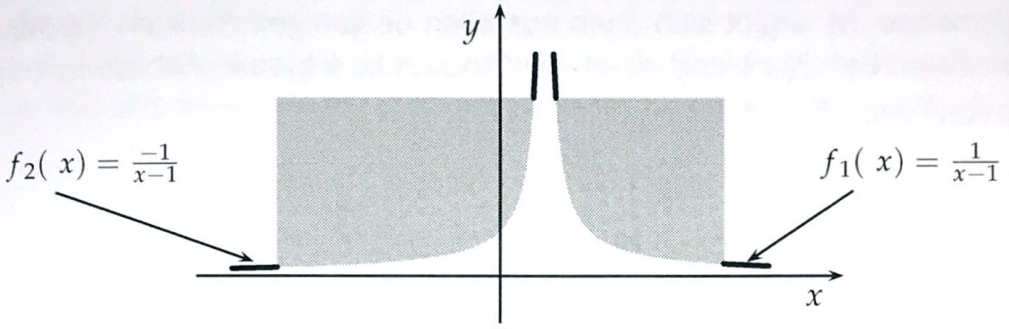
$$L_1 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x > 1 \;\wedge\; y \geq \frac{1}{x-1} \right\}.$$

2. Fall

Für $x < 1$ gilt $|x-1| = -(x-1) = -x+1$ und die Ungleichung $(\star)$ wird dann zu $y \geq \frac{1}{-x+1} \;\Leftrightarrow\; y \geq -\frac{1}{x-1}$. Das sind alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die überhalb oder auf der Hyperbel $f_2(x) = -\frac{1}{x-1}$ liegen. Die zweite Lösungsmenge ist damit

$$L_2 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 1 \;\wedge\; y \geq -\frac{1}{x-1} \right\}.$$

Die Lösungsmenge der Ungleichung ergibt sich aus der Vereinigung der beiden Mengen L_1 und L_2, deren grafische Darstellung etwa wie folgt aussieht.

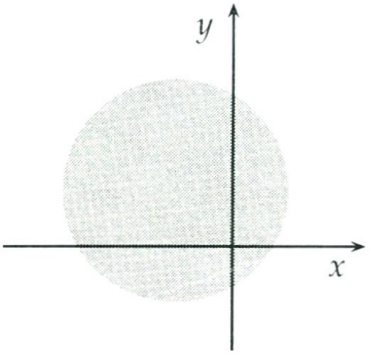


Aufgabe 51 l

Bestimmen Sie für die Ungleichung $(x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 4$ die Menge der Paare $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, die diese erfüllen und skizzieren Sie die Menge in einem kartesischen Koordinatensystem.

Lösung:

Die Ungleichung beschreibt einen Kreis mit Mittelpunkt $M(-1, 1)$ und Radius $R = 2$. Die Lösungsmenge sind alle die Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die innerhalb oder auf dem Kreis liegen. Die grafische Darstellung der Lösungsmenge ist der folgenden Abbildung zu entnehmen.



Aufgabe 52 a

Beschreiben Sie die folgende durch eine Ungleichung definierte Menge und skizzieren Sie sie in einem kartesischen Koordinatensystem.

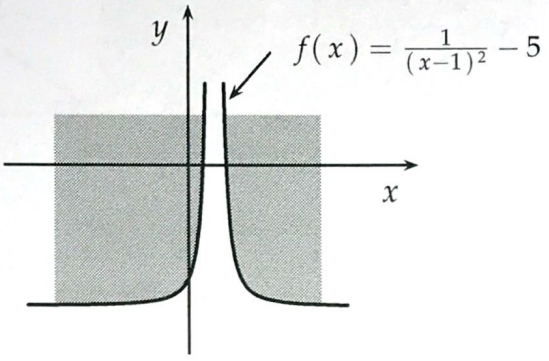
$$M = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 (y+5) > 1 \}$$

Lösung:

Für $x = 1 \wedge y = -5$ liefert die Ungleichung einen Widerspruch! Sei $x \neq 1$, dann kann man die Ungleichung durch den positiven Term $(x-1)^2 > 0$ dividieren, ohne dass sich das Ungleichheitszeichen umdreht! Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} & (x-1)^2 (y+5) > 1 && \mid : (x-1)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & y + 5 > \frac{1}{(x-1)^2} && \mid -5 \\ \Leftrightarrow \quad & y > \frac{1}{(x-1)^2} - 5 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge M ergibt sich dann aus allen denjenigen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die oberhalb der Hyperbel $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} - 5$ liegen. Die folgende Abbildung zeigt die grafische Darstellung der Lösungsmenge.



Aufgabe 52 b

Beschreiben Sie die folgende durch Ungleichungen definierte Menge und skizzieren Sie sie in einem kartesischen Koordinatensystem.

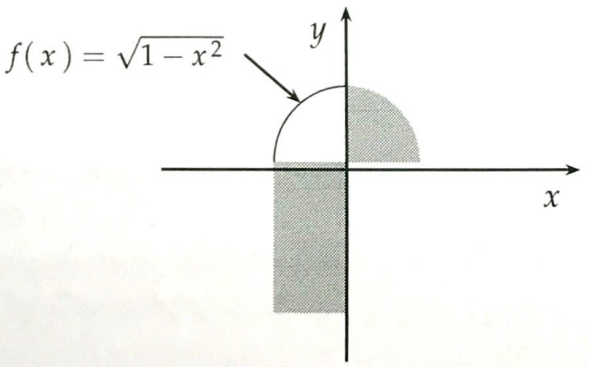
$$M = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \leq \sqrt{1-x^2} \wedge xy > 0 \right\}$$

Lösung:

Die Ungleichung $y \leq \sqrt{1-x^2}$ beschreibt alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die unterhalb oder auf der oberen Halbkreishälfte des Kreises mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ liegen. Die zweite Ungleichung $xy > 0$ ist nur dann erfüllt, wenn beide Faktoren positiv oder beide negativ sind. Dann ergeben sich die folgenden zwei möglichen Lösungsmengen

$$L_1 := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \wedge y > 0 \wedge y \leq \sqrt{1-x^2} \} \quad \text{oder}$$
$$L_2 := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0 \wedge y < 0 \wedge y \leq \sqrt{1-x^2} \}.$$

Die Lösungsmenge M erhält man durch Vereinigung der beiden Mengen L_1 und L_2. In der folgenden Abbildung ist die Lösungsmenge M grafisch dargestellt.



Aufgabe 52 c

Beschreiben Sie die folgende durch eine Ungleichung beziehungsweise Gleichung definierte Menge und skizzieren Sie sie in einem kartesischen Koordinatensystem.

$$M = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{|x|}{|y-2|} \leq 3 \vee y = 2 \right\}$$

Lösung:

Die Ungleichung ist für $y = 2$ nicht definiert, weil der Nenner an der Stelle $y = 2$ null ist. Für $y \neq 2$ gilt:

$$\frac{|x|}{|y-2|} \leq 3 \quad \Leftrightarrow \quad |x| \leq 3\,|y-2| \quad (\star)$$

1. Fall

Für $x \geq 0 \wedge y > 2$ ist $|x| = x$ und $|y-2| = y-2$. Dann wird die Ungleichung $(\star)$ zu $x \leq 3(y-2) \Leftrightarrow y \geq \frac{x}{3} + 2$. Das sind alle Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ im ersten Quadranten des kartesischen Koordinatensystems, die oberhalb oder auf der Geraden $f_1(x) = \frac{x}{3} + 2$ liegen. Also lautet die erste Lösungsmenge

$$L_1 := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geq 0 \wedge y > 2 \wedge y \geq \frac{x}{3} + 2 \right\}.$$

2. Fall

Für $x < 0 \wedge y > 2$ ist $|x| = -x$ und $|y-2| = y-2$. Dann wird die Ungleichung $(\star)$ zu $-x \leq 3(y-2) \Leftrightarrow y \geq -\frac{x}{3} + 2$. Das sind alle diejenigen Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ im zweiten Quadranten des kartesischen Koordinatensystems, die oberhalb oder auf der Geraden $f_2(x) = -\frac{x}{3} + 2$ liegen. Also lautet die zweite Lösungsmenge

$$L_2 := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x < 0 \wedge y > 2 \wedge y \geq -\frac{x}{3} + 2 \right\}.$$

3. Fall

Für $x < 0 \wedge y < 2$ ist $|x| = -x$ und $|y-2| = -(y-2) = -y+2$. Dann wird die Ungleichung $(\star)$ zu $-x \leq 3(-y+2) \Leftrightarrow y \leq \frac{x}{3} + 2$. Das sind alle Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ im zweiten und dritten Quadranten des kartesischen Koordinatensystems, die unterhalb oder auf der Geraden $f_1(x) = \frac{x}{3} + 2$ liegen. Also lautet die dritte Lösungsmenge

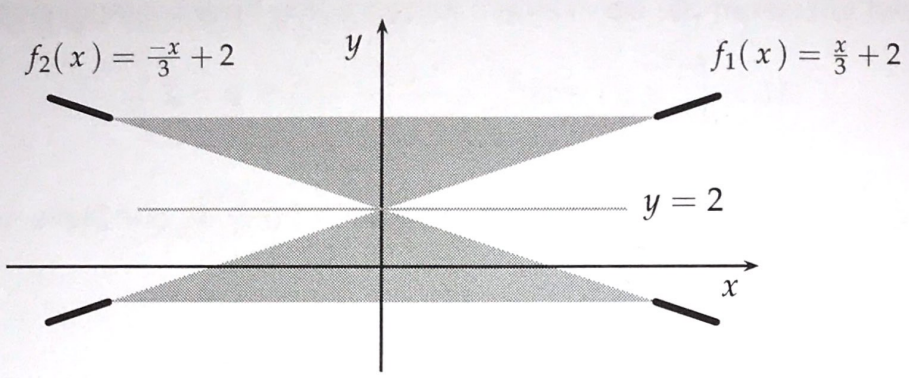
$$L_3 := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x < 0 \wedge y < 2 \wedge y \leq \frac{x}{3} + 2 \right\}.$$

4. Fall

Für $x \geq 0 \wedge y < 2$ ist $|x| = x$ und $|y-2| = -(y-2) = -y+2$. Dann wird die Ungleichung $(\star)$ zu $x \leq 3(-y+2) \Leftrightarrow y \leq -\frac{x}{3} + 2$. Das sind alle Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ im dritten und vierten Quadranten des kartesischen Koordinatensystems, die unterhalb oder auf der Geraden $f_2(x) = -\frac{x}{3} + 2$ liegen. Also lautet die vierte Lösungsmenge

$$L_4 := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geq 0 \wedge y < 2 \wedge y \leq -\frac{x}{3} + 2 \right\}.$$

Die Lösungsmenge M ergibt sich aus der Vereinigung der vier Mengen $L_1, \ldots, L_4$ und der Geraden $y = 2$, deren grafische Darstellung wie folgt aussieht.



Aufgabe 52 d

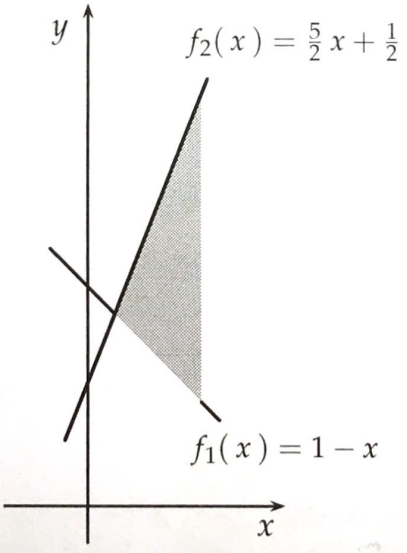
Beschreiben Sie die folgende durch Ungleichungen definierte Menge und skizzieren Sie sie in einem kartesischen Koordinatensystem.

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 1 - x \wedge 2y < 5x + 1\}$$

Lösung:

Die Ungleichung $y \geq 1 - x$ beschreibt alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die oberhalb oder auf der Geraden $f_1(x) = 1 - x$ liegen.

Die Ungleichung $2y < 5x + 1 \Leftrightarrow y < \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$ beschreibt alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die unterhalb der Geraden $f_2(x) = \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$ liegen. Die Menge M ergibt sich dann als Durchschnitt der beiden Mengen L_1 und L_2, deren grafische Darstellung die folgende Abbildung zeigt.



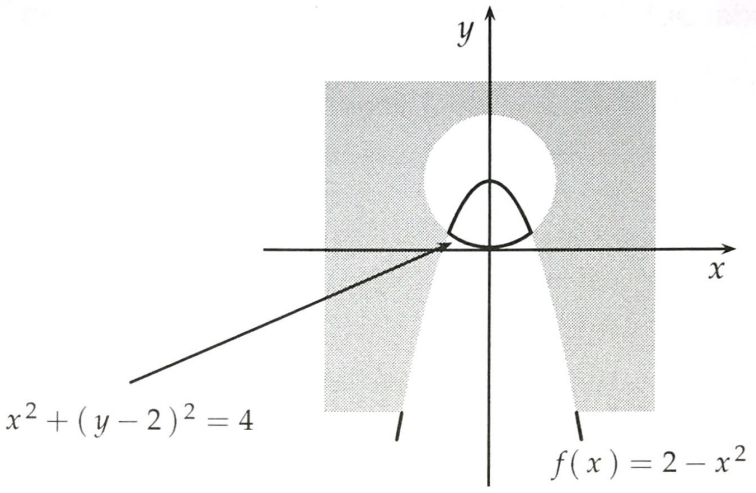
Aufgabe 52 e

Beschreiben Sie die folgende durch Ungleichungen definierte Menge und skizzieren Sie sie in einem kartesischen Koordinatensystem.

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 2 - x^2 \wedge x^2 + (y - 2)^2 \geq 4\}$$

Lösung:
Die Ungleichung $y \geq 2 - x^2$ beschreibt alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die oberhalb oder auf der Parabel $f(x) = 2 - x^2$ liegen.

Die Ungleichung $x^2 + (y-2)^2 \geq 4$ beschreibt alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die außerhalb oder auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt $M(0, 2)$ und dem Radius $R = 2$ liegen. Die Lösungsmenge M ergibt sich dann als Schnittmenge der beiden Mengen L_1 und L_2, deren grafische Darstellung die folgende Abbildung zeigt.



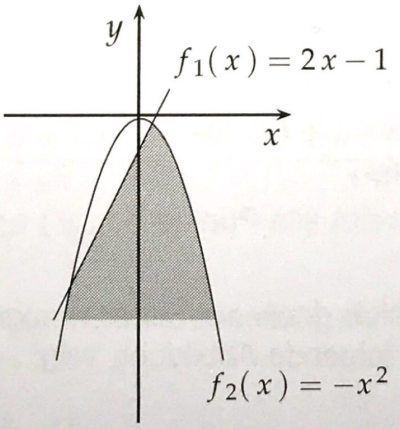
Aufgabe 52 f

Beschreiben Sie die folgende durch Ungleichungen definierte Menge und skizzieren Sie sie in einem kartesischen Koordinatensystem.

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - 2x + 1 < 0 \wedge y + x^2 < 0\}$$

Lösung:
Die Ungleichung $y - 2x + 1 < 0 \Leftrightarrow y < 2x - 1$ beschreibt alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die unterhalb der Geraden $f_1(x) = 2x - 1$ liegen.

Die Ungleichung $y + x^2 < 0 \Leftrightarrow y < -x^2$ beschreibt alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die unterhalb der Parabel $f_2(x) = -x^2$ liegen. Die Lösungsmenge M ergibt sich dann als Schnittmenge der beiden Mengen L_1 und L_2, deren grafische Darstellung die folgende Abbildung zeigt.



Aufgabe 52 g

Beschreiben Sie die folgende durch Ungleichungen definierte Menge und skizzieren Sie sie in einem kartesischen Koordinatensystem.

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-3)^2 \leq 2-y \wedge 3 \geq x-y \wedge 2y \geq 4-x\}$$

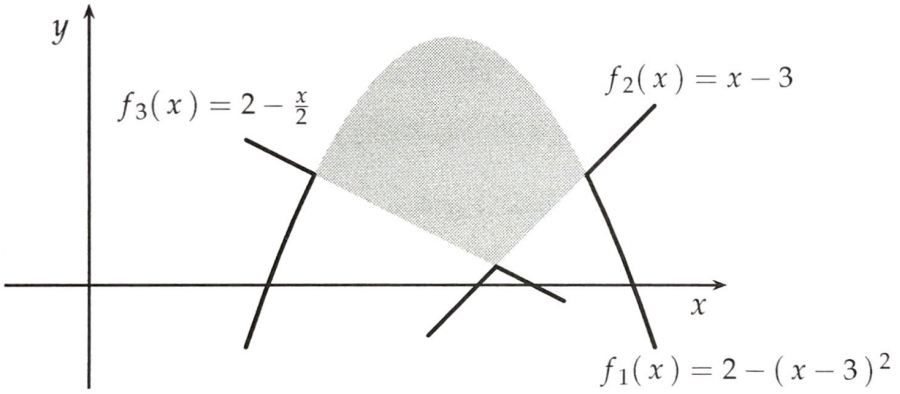
Lösung:

Die Ungleichung $(x-3)^2 \leq 2-y \Leftrightarrow y \leq 2-(x-3)^2$ beschreibt alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die unterhalb oder auf der Parabel $f_1(x) = 2-(x-3)^2$ liegen.

Die Ungleichung $3 \geq x-y \Leftrightarrow y \geq x-3$ beschreibt alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die oberhalb oder auf der Geraden $f_2(x) = x-3$ liegen.

Die Ungleichung $2y \geq 4-x \Leftrightarrow y \geq 2-\frac{x}{2}$ beschreibt alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die oberhalb oder auf der Geraden $f_3(x) = 2-\frac{x}{2}$ liegen.

Die Lösungsmenge M ergibt sich dann als Schnittmenge der drei Mengen L_1, L_2, L_3 deren grafische Darstellung die folgende Abbildung zeigt.



Aufgabe 52 h

Beschreiben Sie die folgende durch Ungleichungen definierte Menge und skizzieren Sie sie in einem kartesischen Koordinatensystem.

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y > (x-1)^2 - 2 \wedge x > 0 \wedge y < \frac{3x}{2}\right\}$$

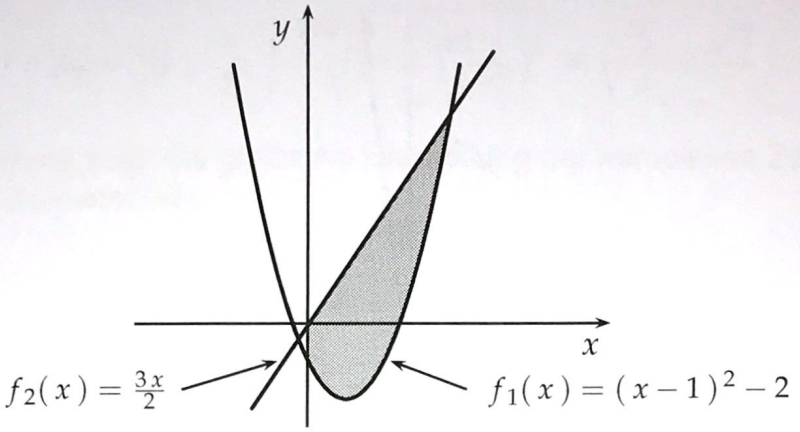
Lösung:

Die Ungleichung $y > (x-1)^2 - 2$ beschreibt alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die oberhalb der Parabel $f_1(x) = (x-1)^2 - 2$ liegen.

Die Ungleichung $x > 0$ beschreibt alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ in der rechten Halbebene des kartesischen Koordinatensystems.

Die Ungleichung $y < \frac{3x}{2}$ beschreibt alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die unterhalb der Geraden $f_2(x) = \frac{3x}{2}$ liegen.

Die Lösungsmenge M ergibt sich dann als Schnittmenge der drei Mengen L_1, L_2, L_3 deren grafische Darstellung die folgende Abbildung zeigt.



7.4 Komplexe Zahlen

Aufgabe 53

Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = -3 + 2i$ und $z_3 = 1 + i$. Bestimmen Sie die Ausdrücke $w_1, \ldots, w_8$ in der kartesischen Form $w = a + ib$ und stellen Sie sie anschließend in der komplexen Ebene dar.

$$w_1 = z_1 + \overline{z_2} \qquad w_2 = \overline{z_3 - z_1} \qquad w_3 = z_1 \cdot z_2 \qquad w_4 = \mathrm{Re}\,(z_1 \cdot z_2)$$

$$w_5 = \overline{z_3 \cdot z_2} \qquad w_6 = \frac{z_2}{z_1} \qquad w_7 = \frac{\overline{z_2}}{z_3} \qquad w_8 = |\,z_1\,|$$

Lösung:

$$w_1 = (1-2i) + (\overline{-3+2i}) = 1 - 2i + (-3-2i) = -2 - 4i$$

$$w_2 = \overline{(1+i) - (1-2i)} = \overline{3i} = -3i$$

$$w_3 = (1-2i)(-3+2i) = -3 + 2i + 6i - 4i^2 = 1 + 8i$$

$$w_4 = \mathrm{Re}\,(w_3) = \mathrm{Re}\,(1+8i) = 1$$

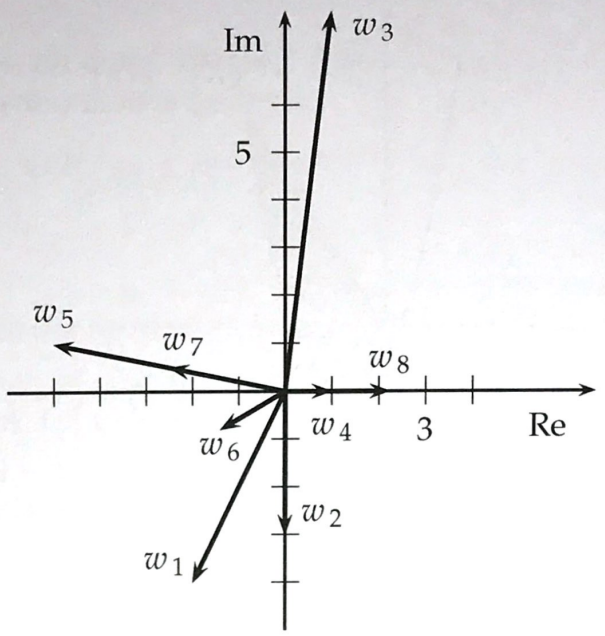
$$w_5 = \overline{(1+i)(-3+2i)} = \overline{-3+2i-3i+2i^2} = \overline{-5-i} = -5+i$$

$$w_6 = \frac{-3+2i}{1-2i} = \frac{-3+2i}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{-3-6i+2i+4i^2}{1-4i^2} = \frac{-7-4i}{5} = -\frac{7}{5} - \frac{4}{5}i$$

$$w_7 = \frac{\overline{-3+2i}}{1+i} = \frac{-3-2i}{1+i} = \frac{-3-2i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{-3+3i-2i+2i^2}{1-i^2} = \frac{-5+i}{2} = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$w_8 = |\,1-2i\,| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

Die folgende Abbildung zeigt die grafische Darstellung der komplexen Zahlen $w_1, \ldots, w_8$ in der Gaußschen Zahlenebene.



Aufgabe 54

Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 2i$, $z_2 = -2+i$ und $z_3 = 1-\frac{i}{2}$. Bestimmen Sie die Ausdrücke $w_1, \ldots, w_8$ in der kartesischen Form $w = a + ib$ und stellen Sie sie anschließend in der komplexen Ebene dar.

$$w_1 = \overline{z_2 + z_3} \qquad w_2 = \overline{z_3} - z_1 \qquad w_3 = z_3 \cdot z_2 \qquad w_4 = \overline{z_3 \cdot z_1}$$

$$w_5 = \frac{z_3}{z_1} \qquad w_6 = \frac{\overline{z_2}}{z_3} \qquad w_7 = \mathrm{Re}(z_2) + \mathrm{Im}(z_2) \qquad w_8 = |z_3|$$

Lösung:

$$w_1 = \overline{(-2+i) + \left(1 - \frac{i}{2}\right)} = \overline{-1 + \frac{1}{2}i} = -1 - \frac{1}{2}i$$

$$w_2 = \overline{\left(1 - \frac{1}{2}i\right)} - 2i = 1 + \frac{1}{2}i - 2i = 1 - \frac{3}{2}i$$

$$w_3 = \left(1 - \frac{i}{2}\right)(-2+i) = -2 + i + i - \frac{1}{2}i^2 = -\frac{3}{2} + 2i$$

$$w_4 = \overline{\left(1 - \frac{i}{2}\right) 2i} = \overline{2i - i^2} = \overline{2i + 1} = 1 - 2i$$

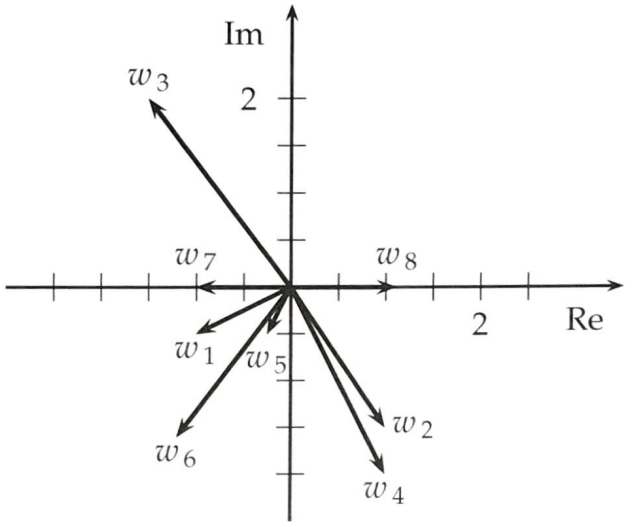
$$w_5 = \frac{1 - \frac{i}{2}}{2i} = \frac{1 - \frac{i}{2}}{2i} \cdot \frac{-2i}{-2i} = \frac{-2i + i^2}{-4i^2} = \frac{-1 - 2i}{4} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}i$$

$$w_6 = \frac{\overline{-2+i}}{1 - \frac{i}{2}} = \frac{-2-i}{1 - \frac{i}{2}} = \frac{-2-i}{1 - \frac{i}{2}} \cdot \frac{1 + \frac{i}{2}}{1 + \frac{i}{2}} = \frac{-2 - i - i - \frac{1}{2}i^2}{1 - \frac{1}{4}i^2} = \frac{-\frac{3}{2} - 2i}{\frac{5}{4}} = -\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i$$

$$w_7 = \mathrm{Re}(-2+i) + \mathrm{Im}(-2+i) = -2 + 1 = -1$$

$$w_8 = \left| 1 - \frac{1}{2}i \right| = \sqrt{1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Die folgende Abbildung zeigt die grafische Darstellung der komplexen Zahlen $w_1, \ldots, w_8$ in der Gaußschen Zahlenebene.



Aufgabe 55

Es seien die komplexen Zahlen $z_1 = 2 + 3i$ und $z_2 = 3 - 2i$ gegeben. Schreiben Sie die folgenden Zahlen in der Form $w = x + iy$.

$w_1 = z_1 + z_2$ $\quad$ $w_2 = iz_2^2$ $\quad$ $w_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$ $\quad$ $w_4 = z_1 \cdot z_2$

$w_5 = z_1 \cdot \overline{z_2}$ $\quad$ $w_6 = |z_2|$ $\quad$ $w_7 = (z_1 - z_2)^2$ $\quad$ $w_8 = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

Lösung:

$w_1 = 2 + 3i + 3 - 2i = 5 + i$

$w_2 = i(3 - 2i)^2 = i(9 - 12i + 4i^2) = i(5 - 12i) = 5i - 12i^2 = 12 + 5i$

$w_3 = \dfrac{2+3i}{3-2i} = \dfrac{2+3i}{3-2i} \cdot \dfrac{3+2i}{3+2i} = \dfrac{6 + 4i + 9i + 6i^2}{9 - 4i^2} = \dfrac{13i}{13} = i$

$w_4 = (2+3i)(3-2i) = 6 - 4i + 9i - 6i^2 = 12 + 5i$

$w_5 = (2+3i)(\overline{3-2i}) = (2+3i)(3+2i) = 6 + 4i + 9i + 6i^2 = 13i$

$w_6 = |3 - 2i| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

$w_7 = (2 + 3i - (3 - 2i))^2 = (-1 + 5i)^2 = 1 - 10i + 25i^2 = -24 - 10i$

$w_8 = (\overline{2+3i})(\overline{3-2i}) = (2-3i)(3+2i) = 6 + 4i - 9i - 6i^2 = 12 - 5i$

Aufgabe 56

Es seien die komplexen Zahlen $z_1 = 1 - 3i$ und $z_2 = 4 + i$ gegeben. Schreiben Sie die folgenden Zahlen in der Form $w = x + iy$.

$$w_1 = z_1 + z_2 \qquad w_2 = z_1 \cdot z_2 \qquad w_3 = \frac{z_1}{z_2} \qquad w_4 = |\, z_1 \cdot \overline{z_2}\,|$$

Lösung:

$$w_1 = 1 - 3i + 4 + i = 5 - 2i$$

$$w_2 = (1 - 3i)(4 + i) = 4 + i - 12i - 3i^2 = 7 - 11i$$

$$w_3 = \frac{1 - 3i}{4 + i} = \frac{1 - 3i}{4 + i} \cdot \frac{4 - i}{4 - i} = \frac{4 - i - 12i + 3i^2}{16 - i^2} = \frac{1 - 13i}{17} = \frac{1}{17} - \frac{13}{17}i$$

$$w_4 = |\,(1 - 3i)(\overline{4 + i})\,| = |\,(1 - 3i)(4 - i)\,| = |\,4 - i - 12i + 3i^2\,| = |\,1 - 13i\,|$$

$$= \sqrt{1^2 + (-13)^2} = \sqrt{170}$$

Aufgabe 57

Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $z = a + ib$ dar.

$$z_1 = \frac{1 + i}{1 - i} \qquad z_2 = \left(\frac{4 - i}{2 + i}\right)^2 \qquad z_3 = \frac{(1 + 2i)^2}{2 + 3i}$$

Lösung:

$$z_1 = \frac{1 + i}{1 - i} = \frac{1 + i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} = \frac{1 + 2i + i^2}{1 - i^2} = \frac{2i}{2} = i$$

$$z_2 = \left(\frac{4 - i}{2 + i}\right)^2 = \frac{16 - 8i + i^2}{4 + 4i + i^2} = \frac{15 - 8i}{3 + 4i} = \frac{15 - 8i}{3 + 4i} \cdot \frac{3 - 4i}{3 - 4i} = \frac{45 - 60i - 24i + 32i^2}{9 - 16i^2}$$

$$= \frac{13 - 84i}{25} = \frac{13}{25} - \frac{84}{25}i$$

$$z_3 = \frac{(1 + 2i)^2}{2 + 3i} = \frac{1 + 4i + 4i^2}{2 + 3i} = \frac{-3 + 4i}{2 + 3i} = \frac{-3 + 4i}{2 + 3i} \cdot \frac{2 - 3i}{2 - 3i} = \frac{-6 + 9i + 8i - 12i^2}{4 - 9i^2}$$

$$= \frac{6 + 17i}{13} = \frac{6}{13} + \frac{17}{13}i$$

Aufgabe 58

Geben Sie die komplexen Zahlen $w_1 = z_1 + z_2$, $w_2 = z_1 \cdot z_2$ und $w_3 = \frac{z_1}{z_2}$ in der Form $w = a + ib$ an und bestimmen Sie jeweils deren Betrag. Dabei sind z_1 und z_2 gegeben durch

$$z_1 = \frac{5i}{2 - i} \qquad \text{und} \qquad z_2 = \frac{1 + 2i}{i}.$$

Tragen Sie die Punkte in der Gaußschen Zahlenebene ein und überlegen Sie sich, was der Betrag anschaulich bedeutet.

Lösung:

$$w_1 = \frac{5i}{2-i} + \frac{1+2i}{i} = \frac{5i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} + \frac{1+2i}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{10i+5i^2}{4-i^2} + \frac{-i-2i^2}{1}$$

$$= \frac{-5+10i}{5} + 2 - i = -1 + 2i + 2 - i = 1 + i$$

$$|w_1| = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$w_2 = \frac{5i}{2-i} \cdot \frac{1+2i}{i} = \frac{5i+10i^2}{2i-i^2} = \frac{-10+5i}{1+2i} = \frac{-10+5i}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i}$$

$$= \frac{-10+5i+20i-10i^2}{1-4i^2} = \frac{25i}{5} = 5i$$

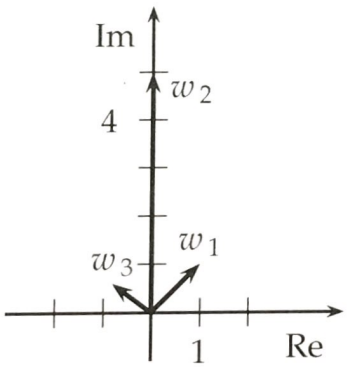
$$|w_2| = |5i| = \sqrt{0^2+5^2} = 5$$

$$w_3 = \frac{\frac{5i}{2-i}}{\frac{1+2i}{i}} = \frac{5i}{2-i} \cdot \frac{i}{1+2i} = \frac{5i^2}{2+4i-i-2i^2} = \frac{-5}{4+3i} = \frac{-5}{4+3i} \cdot \frac{4-3i}{4-3i} = \frac{-20+15i}{16-9i^2}$$

$$= \frac{-20+15i}{25} = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$$

$$|w_3| = \left| -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i \right| = \sqrt{\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = \sqrt{1} = 1$$

Die drei komplexen Zahlen w_1, w_2, w_3 werden in die Gaußsche Zahlenebene als Pfeile eingetragen. Dann kann man die Pfeile als Vektoren interpretieren und der Betrag der komplexen Zahl stellt dann anschaulich die Länge des Pfeils dar.



Aufgabe 59 a

Berechnen Sie von der komplexen Zahl $z_1 = (3-4i)(3+4i) - 5(5+2i)$ den Real- und Imaginärteil sowie den Betrag.

Lösung:

$$z_1 = (3-4i)(3+4i) - 5(5+2i) = 9 - 16i^2 - 25 - 10i = -10i$$

$$\mathrm{Re}(z_1) = 0,\ \mathrm{Im}(z_1) = -10,\ |z_1| = |-10i| = \sqrt{0^2+(-10)^2} = 10$$

Aufgabe 59 b

Berechnen Sie von der komplexen Zahl $z_2 = \frac{1+i}{2-i} + \frac{3+i}{4+i}$ den Real- und Imaginärteil sowie den Betrag.

Lösung:

$$z_2 = \frac{1+i}{2-i} + \frac{3+i}{4+i} = \frac{1+i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} + \frac{3+i}{4+i} \cdot \frac{4-i}{4-i} = \frac{2+i+2i+i^2}{4-i^2} + \frac{12-3i+4i-i^2}{16-i^2}$$

$$= \frac{1+3i}{5} + \frac{13+i}{17} = \frac{82}{85} + \frac{56}{85}i$$

$$\mathrm{Re}(z_2) = \frac{82}{85}, \quad \mathrm{Im}(z_2) = \frac{56}{85}, \quad |z_2| = \left|\frac{82}{85} + \frac{56}{85}i\right| = \sqrt{\left(\frac{82}{85}\right)^2 + \left(\frac{56}{85}\right)^2} = \sqrt{\frac{116}{85}}$$

Aufgabe 59 c

Berechnen Sie von der komplexen Zahl $z_3 = (1+2i)^3$ den Real- und Imaginärteil sowie den Betrag.

Lösung:

$$z_3 = (1+2i)^3 = (1+2i)^2(1+2i) = (1+4i+4i^2)(1+2i) = (-3+4i)(1+2i)$$

$$= -3-6i+4i+8i^2 = -11-2i$$

$$\mathrm{Re}(z_3) = -11, \quad \mathrm{Im}(z_3) = -2, \quad |z_3| = |-11-2i| = \sqrt{(-11)^2+(-2)^2} = 5\sqrt{5}$$

Aufgabe 59 d

Berechnen Sie von der komplexen Zahl $z_4 = \frac{1+i}{2+i} + \frac{2+i}{3+i} + \frac{3+i}{1+i}$ den Real- und Imaginärteil sowie den Betrag.

Lösung:

$$z_4 = \frac{1+i}{2+i} + \frac{2+i}{3+i} + \frac{3+i}{1+i} = \frac{1+i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} + \frac{2+i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i} + \frac{3+i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}$$

$$= \frac{2-i+2i-i^2}{4-i^2} + \frac{6-2i+3i-i^2}{9-i^2} + \frac{3-3i+i-i^2}{1-i^2} = \frac{3+i}{5} + \frac{7+i}{10} + \frac{4-2i}{2}$$

$$= \frac{33}{10} - \frac{7}{10}i$$

$$\mathrm{Re}(z_4) = \frac{33}{10}, \quad \mathrm{Im}(z_4) = -\frac{7}{10}, \quad |z_4| = \left|\frac{33}{10} - \frac{7}{10}i\right| = \sqrt{\left(\frac{33}{10}\right)^2 + \left(-\frac{7}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{1138}}{10}$$

Aufgabe 59 e

Berechnen Sie von der komplexen Zahl $z_5 = (1+3i)(4-2i)$ den Real- und Imaginärteil sowie den Betrag.

Lösung:

$$z_5 = (1+3i)(4-2i) = 4-2i+12i-6i^2 = 10+10i$$

$$\mathrm{Re}(z_5) = 10, \quad \mathrm{Im}(z_5) = 10, \quad |z_5| = |10+10i| = \sqrt{10^2+10^2} = 10\sqrt{2}$$

Aufgabe 59 f

Berechnen Sie von der komplexen Zahl $z_6 = \frac{1+3i}{4-2i}$ den Real- und Imaginärteil sowie den Betrag.

Lösung:

$$z_6 = \frac{1+3i}{4-2i} = \frac{1+3i}{4-2i} \cdot \frac{4+2i}{4+2i} = \frac{4+2i+12i+6i^2}{16-4i^2} = \frac{-2+14i}{20} = -\frac{1}{10} + \frac{7}{10}i$$

$$\mathrm{Re}(z_6) = -\frac{1}{10}, \quad \mathrm{Im}(z_6) = \frac{7}{10}, \quad |z_6| = \left| -\frac{1}{10} + \frac{7}{10}i \right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{7}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Aufgabe 60

Schreiben Sie die komplexen Zahlen in die Schreibweise $z = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$.

$$z_1 = -3, \qquad z_2 = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i, \qquad z_3 = 2\sqrt{3} - 2i, \qquad z_4 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2i}.$$

Lösung:

Für z_1 ist der Betrag $r = |z_1| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \sqrt{9} = 3$ und der Phasenwinkel $\varphi = \pi$, da die komplexe Zahl auf der reellen Achse in der linken Halbebene der Gaußschen Zahlenebene liegt. Damit ist $z_1 = 3(\cos(\pi) + i \sin(\pi))$.

Für z_2 ist der Betrag $r = |z_2| = \sqrt{(-\frac{3}{2})^2 + (-\frac{3}{2})^2} = \sqrt{2 \cdot \frac{9}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ und der Phasenwinkel $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$, da die komplexe Zahl auf der Winkelhalbierenden im dritten Quadranten der Gaußschen Zahlenebene liegt. Also gilt $z_2 = \frac{3}{2}\sqrt{2}(\cos(-\frac{3\pi}{4}) + i \sin(-\frac{3\pi}{4}))$.

Für z_3 ist der Betrag $r = |z_3| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{16} = 4$ und der Phasenwinkel $\varphi = \arctan\left(\frac{-2}{2\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$. Damit ist $z_3 = 4(\cos(\frac{-\pi}{6}) + i \sin(\frac{-\pi}{6}))$.

Für $z_4 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2i} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ gilt $r = |z_4| = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$, da die komplexe Zahl auf der Winkelhalbierenden im dritten Quadranten der Gaußschen Zahlenebene liegt. Folglich ist $z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(-\frac{3\pi}{4}) + i \sin(-\frac{3\pi}{4}))$.

Aufgabe 61 a

Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 4 - 4i$ und $z_2 = -2 + 3i$. Stellen Sie die Ausdrücke $w_1 = z_1 + z_2$, $w_2 = z_1 \cdot z_2$ und $w_3 = \frac{z_1}{z_2}$ in der kartesischen Form $w = a + ib$ dar und zeichnen Sie sie in die Gaußsche Zahlenebene.

Lösung:

$$w_1 = 4 - 4i + (-2 + 3i) = 2 - i$$

$$w_2 = (4 - 4i)(-2 + 3i) = -8 + 12i + 8i - 12i^2 = 4 + 20i$$

$$w_3 = \frac{4-4i}{-2+3i} = \frac{4-4i}{-2+3i} \cdot \frac{-2-3i}{-2-3i} = \frac{-8-12i+8i+12i^2}{4-9i^2} = \frac{-20-4i}{13} = -\frac{20}{13} - \frac{4}{13}i$$

Aufgabe 61 b

Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ und $z_2 = 3 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$. Stellen Sie die Ausdrücke $w_1 = z_1 + z_2$, $w_2 = z_1 \cdot z_2$ und $w_3 = \frac{z_1}{z_2}$ in der kartesischen Form $w = a + ib$ dar und zeichnen Sie sie in die Gaußsche Zahlenebene.

Lösung:

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \qquad z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{2}} = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 3i$$

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i + 3i = \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 3\right)i$$

$$w_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}\,3e^{i\frac{\pi}{2}} = 3e^{i\frac{3\pi}{4}} = 3\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}i$$

$$w_3 = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{3\,e^{i\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{3}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{2}}i$$

Aufgabe 61 c

Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 1 + i$ und $z_2 = \sqrt{2} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}$. Stellen Sie die Ausdrücke $w_1 = z_1 + z_2$, $w_2 = z_1 \cdot z_2$ und $w_3 = \frac{z_1}{z_2}$ in der kartesischen Form $w = a + ib$ dar und zeichnen Sie sie in die Gaußsche Zahlenebene.

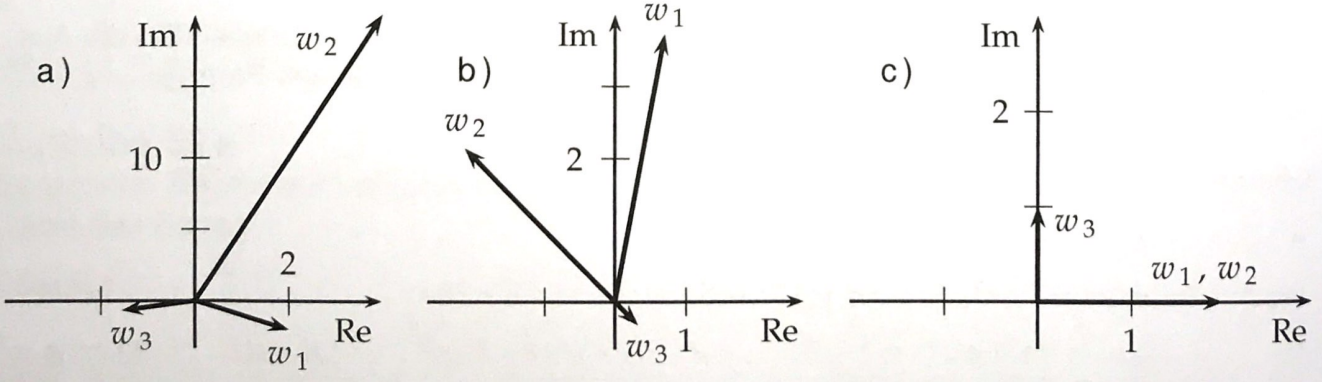
Lösung:

Zuerst wird z_1 in die Exponentialform umgerechnet. Der Betrag von z_1 ergibt sich zu $|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ und der Phasenwinkel ist $\varphi = \frac{\pi}{4}$, da z_1 auf der Winkelhalbierenden im ersten Quadranten der Gaußschen Zahlenebene liegt. Jetzt wird z_2 noch in die arithmetische Form überführt.

$$z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - i$$

$$w_1 = 1 + i + 1 - i = 2 \qquad w_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2e^0 = 2$$

$$w_3 = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$$



Aufgabe 62

Berechnen Sie für $z_1 = \frac{(1+i)^2}{1-i}$ und $z_2 = 1-3i$ die komplexen Zahlen w_1, w_2 und w_3 in der Form $w = a+ib$.

$$w_1 = z_1 \cdot z_2, \qquad w_2 = |z_2|, \qquad w_3 = e^{z_1^2 - i \cdot z_2}.$$

Lösung:

$$z_1 = \frac{(1+i)^2}{1-i} = \frac{1+2i+i^2}{1-i} = \frac{2i}{1-i} = \frac{2i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{2i+2i^2}{1-i^2} = \frac{-2+2i}{2} = -1+i$$

$$w_1 = (-1+i)(1-3i) = -1+3i+i-3i^2 = 2+4i$$

$$w_2 = |1-3i| = \sqrt{1^2+(-3)^2} = \sqrt{10}$$

$$w_3 = e^{(-1+i)^2 - i(1-3i)} = e^{1-2i+i^2-i+3i^2} = e^{-3-3i} = e^{-3} \cdot e^{-3i}$$

$$= e^{-3}(\cos(-3) + i \sin(-3)) = \frac{\cos(3)}{e^3} - \frac{\sin(3)}{e^3} i$$

Aufgabe 63 a

Stellen Sie w_1, w_2, $w_1 \cdot w_2$, $\frac{w_1}{w_2}$ für die komplexen Zahlen $w_1 = 1+i$ und $w_2 = -2+2i$ in der Form $w = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$ dar und skizzieren Sie die Zahlen in der komplexen Zahlenebene.

Lösung:

Für w_1 ist der Betrag $r = |w_1| = |1+i| = \sqrt{1^2+(1)^2} = \sqrt{2}$ und der Phasenwinkel $\varphi = \frac{\pi}{4}$, da die komplexe Zahl auf der Winkelhalbierenden im ersten Quadranten der Gaußschen Zahlenebene liegt. Damit ist $w_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Für w_2 ist der Betrag $r = |w_2| = |-2+2i| = \sqrt{(-2)^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ und der Phasenwinkel $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, da die komplexe Zahl auf der Winkelhalbierenden im zweiten Quadranten der Gaußschen Zahlenebene liegt. Also gilt $w_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

Um das Produkt beziehungsweise den Quotienten der komplexen Zahlen zu ermitteln, wird die Exponentialdarstellung von w_1 und w_2 verwendet.

$$w_3 := w_1 \cdot w_2 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot 2\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}} = 4 e^{i\pi} = 4(\underbrace{\cos\pi}_{=-1} + i \underbrace{\sin\pi}_{=0})$$

$$w_4 := \frac{w_1}{w_2} = \frac{\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{1}{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + i \underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{=-1}\right)$$

Aufgabe 63 b

Stellen Sie w_1, w_2, $w_1 \cdot w_2$, $\frac{w_1}{w_2}$ für die komplexen Zahlen $w_1 = \sqrt{3}+i$ und $w_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ in der Form $w = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$ dar und skizzieren Sie die Zahlen in der komplexen Zahlenebene.

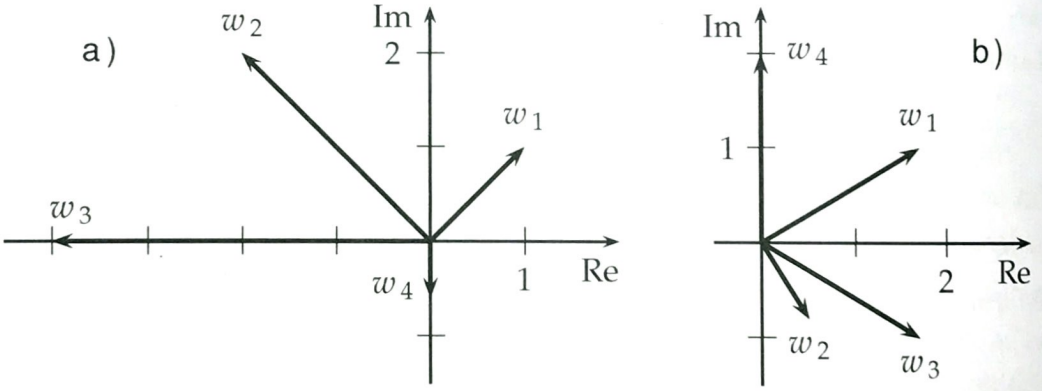
Lösung:
Für w_1 ist der Betrag $r = |w_1| = |\sqrt{3}+i| = \sqrt{\sqrt{3}^2+1^2} = \sqrt{4} = 2$ und der Phasenwinkel $\varphi = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$. Damit ist $w_1 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

Für w_2 ist der Betrag $r = |w_2| = |\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2+(-\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{1} = 1$ und der Phasenwinkel $\varphi = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$. Damit ist $w_2 = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.
Um das Produkt beziehungsweise den Quotienten der komplexen Zahlen zu ermitteln, wird die Exponentialdarstellung von w_1 und w_2 verwendet.

$$w_3 := w_1 \cdot w_2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3})} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)}_{=\frac{\sqrt{3}}{2}} + i\underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}_{=-\frac{1}{2}}\right)$$

$$w_4 := \frac{w_1}{w_2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}} = 2e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3})} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2\left(\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + i\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}\right)$$

In der folgenden Abbildung sind die komplexen Zahlen aus den Aufgaben a) und b) als Pfeile in der Gaußschen Zahlenebene dargestellt.



Aufgabe 64 a

Berechnen Sie $w_1 = z_1+z_2$, $w_2 = z_1-z_2$, $w_3 = \frac{z_1}{z_2}$ und $w_4 = z_1 \cdot z_2$ mit den komplexen Zahlen $z_1 = 1+i\sqrt{3}$ und $z_2 = 1-i$.

Lösung:

$$w_1 = 1+i\sqrt{3}+1-i = 2+i(\sqrt{3}-1) \qquad w_2 = 1+i\sqrt{3}-(1-i) = i(\sqrt{3}+1)$$

$$w_3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i\sqrt{3}+i+i^2\sqrt{3}}{1-i^2} = \frac{1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})}{2}$$

$$= \frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$$

$$w_4 = (1+i\sqrt{3})(1-i) = 1+i\sqrt{3}-i-i^2\sqrt{3} = 1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)$$

Aufgabe 64 b

Berechnen Sie $w_1 = z_1 + z_2$, $w_2 = z_1 - z_2$, $w_3 = \frac{z_1}{z_2}$ und $w_4 = z_1 \cdot z_2$ mit den komplexen Zahlen $z_1 = \frac{(1-i)^2}{1+i}$ und $z_2 = 3 - 5i$.

Lösung:

$$z_1 = \frac{(1-i)^2}{1+i} = \frac{1-2i+i^2}{1+i} = \frac{-2i}{1+i} = \frac{-2i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{-2i+2i^2}{1-i^2} = \frac{-2-2i}{2} = -1-i$$

$$w_1 = -1-i+3-5i = 2-6i \qquad w_2 = -1-i-(3-5i) = -4+4i$$

$$w_3 = \frac{-1-i}{3-5i} = \frac{-1-i}{3-5i} \cdot \frac{3+5i}{3+5i} = \frac{-3-5i-3i-5i^2}{9-25i^2} = \frac{2-8i}{34} = \frac{1}{17} - \frac{4}{17}i$$

$$w_4 = (-1-i)(3-5i) = -3+5i-3i+5i^2 = -8+2i$$

Aufgabe 64 c

Berechnen Sie $w_1 = z_1 + z_2$, $w_2 = z_1 - z_2$, $w_3 = \frac{z_1}{z_2}$ und $w_4 = z_1 \cdot z_2$ mit den komplexen Zahlen $z_1 = 3 + 3i$ und $z_2 = 2\sqrt{3}\, e^{-i\frac{2}{3}\pi}$.

Lösung:

$$z_2 = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 2\sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 2\sqrt{3}\left[-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$= -\sqrt{3} - 3i$$

$$w_1 = 3+3i+(-\sqrt{3}-3i) = 3-\sqrt{3} \qquad w_2 = 3+3i-(-\sqrt{3}-3i) = 3+\sqrt{3}+6i$$

$$w_3 = \frac{3+3i}{-\sqrt{3}-3i} = \frac{3+3i}{-\sqrt{3}-3i} \cdot \frac{-\sqrt{3}+3i}{-\sqrt{3}+3i} = \frac{-3\sqrt{3}+9i-3\sqrt{3}i+9i^2}{3-9i^2}$$

$$= \frac{-3\sqrt{3}-9+(9-3\sqrt{3})i}{12} = \frac{-\sqrt{3}-3}{4} + \frac{3-\sqrt{3}}{4}i$$

$$w_4 = (3+3i)(-\sqrt{3}-3i) = -3\sqrt{3}-9i-3\sqrt{3}i-9i^2 = -3\sqrt{3}+9+(-3\sqrt{3}-9)i$$

Aufgabe 65 a

Es seien die komplexen Zahlen $z_1 = 2-2i$ und $z_2 = -1+3i$ gegeben. Berechnen Sie $w_1 = z_1 + z_2$, $w_2 = z_1 \cdot z_2$ und $w_3 = \frac{z_1}{z_2}$. Schreiben Sie dies in der Form $w = a + ib$ und skizzieren Sie die Zahlen in der komplexen Zahlenebene.

Lösung:

$$w_1 = 2-2i+(-1+3i) = 1+i$$

$$w_2 = (2-2i)(-1+3i) = -2+6i+2i-6i^2 = 4+8i$$

$$w_3 = \frac{2-2i}{-1+3i} = \frac{2-2i}{-1+3i} \cdot \frac{-1-3i}{-1-3i} = \frac{-2-6i+2i+6i^2}{1-9i^2} = \frac{-8-4i}{10} = -\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$$

Aufgabe 65 b

Es seien die komplexen Zahlen $z_1 = e^{\frac{i\pi}{4}}$ und $z_2 = \frac{1}{2}e^{\frac{i\pi}{2}}$ gegeben. Berechnen Sie $w_1 = z_1 + z_2$, $w_2 = z_1 \cdot z_2$ und $w_3 = \frac{z_1}{z_2}$. Schreiben Sie dies in der Form $w = a + ib$ und skizzieren Sie die Zahlen in der komplexen Zahlenebene.

Lösung:

$$w_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$$

$$w_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} + i\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$w_3 = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)} = 2e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} - i\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

Aufgabe 65 c

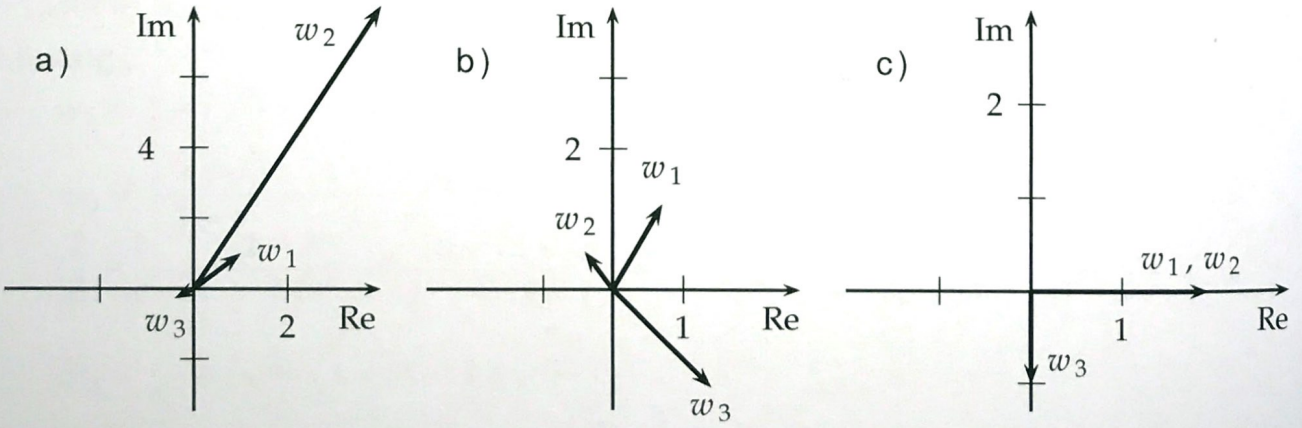
Es seien die komplexen Zahlen $z_1 = 1 - i$ und $z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$ gegeben. Berechnen Sie $w_1 = z_1 + z_2$, $w_2 = z_1 \cdot z_2$ und $w_3 = \frac{z_1}{z_2}$. Schreiben Sie dies in der Form $w = a + ib$ und skizzieren Sie die Zahlen in der komplexen Zahlenebene.

Lösung:

$$z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 + i$$

$$w_1 = 1 - i + 1 + i = 2 \qquad w_2 = (1-i)(1+i) = 1 - i^2 = 1 + 1 = 2$$

$$w_3 = \frac{1-i}{1+i} = \frac{1-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = \frac{1-2i+i^2}{1-i^2} = \frac{-2i}{2} = -i$$



Aufgabe 66

a) Von den folgenden komplexen Zahlen bestimme man Real- und Imaginärteil sowie ihren Betrag:

$$z_1 = \frac{1}{1+i}, \qquad z_2 = \frac{3+2i}{1-i}, \qquad z_3 = 3e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

b) Berechnen Sie $w_1 = z_1 + z_2$, $w_2 = |\, z_1 + z_2 \,|$, $w_3 = z_1 \cdot z_3$, $w_4 = \frac{z_1}{z_2}$ und skizzieren Sie sie in die komplexe Ebene.

Lösung zu a):

$$z_1 = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i}{1-i^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Re}(z_1) = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{Im}(z_1) = -\frac{1}{2}, \quad |z_1| = \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$z_2 = \frac{3+2i}{1-i} = \frac{3+2i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{3+3i+2i+2i^2}{1-i^2} = \frac{1+5i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Re}(z_2) = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{Im}(z_2) = \frac{5}{2}, \quad |z_2| = \left|\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{26}}{2}.$$

$$z_3 = 3e^{i\frac{\pi}{3}} = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Re}(z_3) = \frac{3}{2}, \quad \mathrm{Im}(z_3) = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad |z_3| = 3.$$

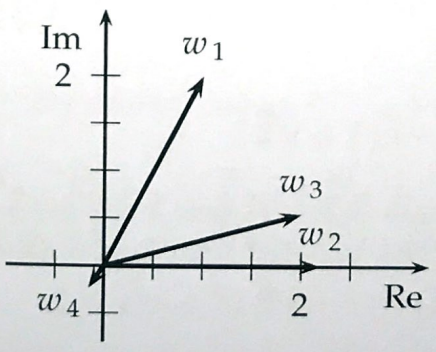
Lösung zu b):

$$w_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i = 1 + 2i \qquad w_2 = |\, w_1 \,| = |\, 1+2i \,| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$w_3 = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right]\left[\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}i - \frac{3}{4}i - \frac{3\sqrt{3}}{4}i^2 = \frac{3}{4}(1+\sqrt{3}) + \frac{3}{4}(\sqrt{3}-1)i$$

$$w_4 = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}{\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i} = \frac{1-i}{1+5i} = \frac{1-i}{1+5i} \cdot \frac{1-5i}{1-5i} = \frac{1-5i-i+5i^2}{1-25i^2} = \frac{-4-6i}{26} = -\frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$$

Die komplexen Zahlen w_1, w_2, w_3 und w_4 werden als Pfeile in der Gaußschen Zahlenebene dargestellt.



Aufgabe 67 a

Stellen Sie die komplexe Zahl $z_1 = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\,i$ in Polarkoordinaten dar.

Lösung:

Für z_1 ist der Betrag $r = |z_1| = |-4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\,i| = \sqrt{(-4\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{64} = 8$ und der Phasenwinkel $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, da die komplexe Zahl auf der Winkelhalbierenden im zweiten Quadranten der Gaußschen Zahlenebene liegt. Dann ist

$$z_1 = 8\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right).$$

Aufgabe 67 b

Stellen Sie die komplexe Zahl $z_2 = \sqrt{3} - i$ in Polarkoordinaten dar.

Lösung:

Für z_2 ist der Betrag $r = |z_2| = |\sqrt{3} - i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$ und der Phasenwinkel $\varphi = \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$. Damit ist $z_2 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

Aufgabe 67 c

Stellen Sie die komplexe Zahl $z_3 = -1 + \sqrt{3}\,i$ in Polarkoordinaten dar.

Lösung:

Für z_3 ist der Betrag $r = |z_3| = |-1 + \sqrt{3}\,i| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$ und der Phasenwinkel $\varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2}{3}\pi$, da die komplexe Zahl im zweiten Quadranten der Gaußschen Zahlenebene liegt. Damit ist $z_3 = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.

Aufgabe 68

Geben Sie die komplexen Zahlen z_1, z_2, $w_1 = z_1 + z_2$ und $w_2 = \frac{z_1}{z_2}$ in kartesischer Darstellung an und berechnen Sie $|z_2|$ mit

$$z_1 = \frac{1-i}{1+i} \quad \text{und} \quad z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Lösung:

$$z_1 = \frac{1-i}{1+i} = \frac{1-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = \frac{1-2i+i^2}{1-i^2} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} - i\frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$w_1 = -i + \sqrt{2} - i\sqrt{2} = \sqrt{2} - i(1+\sqrt{2})$$

$$w_2 = \frac{-i}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}} = \frac{-i}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}} = \frac{-i\sqrt{2} - i^2\sqrt{2}}{2 - 2i^2} = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i$$

$$|z_2| = |\sqrt{2} - i\sqrt{2}| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$$

Aufgabe 69 a

Berechnen Sie $w_1 = z^{10}$ für $z = \frac{7-i}{3-4i}$ und stellen Sie das Ergebnis in der Form $w = x + iy$ dar.

Lösung:

$$z := \frac{7-i}{3-4i} = \frac{7-i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{21+28i-3i-4i^2}{9-16i^2} = \frac{25+25i}{25} = 1+i$$

Jetzt wird z in die Exponentialdarstellung überführt. Mit $|z| = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ und $\varphi = \frac{\pi}{4}$ gilt

$$w_1 = z^{10} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{10} = 2^5 e^{i\frac{5\pi}{2}} = 32\left(\underbrace{\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)}_{=0} + i\underbrace{\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)}_{=1}\right) = 32i.$$

Aufgabe 69 b

Berechnen Sie $w_2 = z^6$ für $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3+2i}{4-6i}$ und stellen Sie das Ergebnis in der Form $w = x + iy$ dar.

Lösung:

$$z := \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3+2i}{4-6i} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3+2i}{4-6i} \cdot \frac{4+6i}{4+6i} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{12+18i+8i+12i^2}{16-36i^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{26i}{52}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

Jetzt wird z in die Exponentialdarstellung überführt. Der Betrag von z ist

$$|z| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

und der Phasenwinkel lautet $\varphi = \arctan\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = \frac{\pi}{6}$. Dann folgt

$$w_2 = z^6 = \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^6 = e^{i\pi} = \underbrace{\cos\pi}_{=-1} + i\underbrace{\sin\pi}_{=0} = -1.$$

Aufgabe 70

Welche komplexe Zahl ist das Spiegelbild einer gegebenen komplexen Zahl $z = x + iy$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, bei Spiegelung

a) am Ursprung? *b*) an der reellen Achse? *c*) an der imaginären Achse?

Lösung zu a):

Wenn $z = x + iy$ am Ursprung gespiegelt wird, dann ist das Spiegelbild $\tilde{z} = -x - iy$. Man kann sich das als eine Drehung der komplexen Zahl um $180°$ um den Koordinatenursprung vorstellen.

Lösung zu b):
Wenn $z = x + iy$ an der reellen x - Achse gespiegelt wird, dann ist das Spiegelbild $\widetilde{z} = x - iy = \overline{z}$. Man kann sich das als eine Drehung der komplexen Zahl um $180°$ um die x - Achse vorstellen.

Lösung zu c):
Wenn $z = x + iy$ an der imaginären y - Achse gespiegelt wird, dann ist das Spiegelbild $\widetilde{z} = -x + iy$. Man kann sich das als eine Drehung der komplexen Zahl um $180°$ um die y - Achse vorstellen.

Aufgabe 71

Beschreiben Sie in Worten, was mit der Lage einer beliebigen komplexen Zahl in der Gaußschen Zahlenebene geschieht, wenn man sie mit $z = 1 + i$ multipliziert.

Lösung:
Der Betrag von z ist $|z| = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ und der Phasenwinkel $\varphi = \frac{\pi}{4}$, da die komplexe Zahl z auf der Winkelhalbierenden im ersten Quadranten der Gaußschen Zahlenebene liegt. Dann lautet die komplexe Zahl z in der Exponentialdarstellung $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Sei nun $w = |w| e^{i\varphi}$ eine beliebige komplexe Zahl. Dann erhält man für die Multiplikation mit z

$$z \cdot w = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot |w| e^{i\varphi} = \sqrt{2}\,|w|\, e^{i\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Das heißt, dass die komplexe Zahl w um $90°$ entgegen dem Uhrzeigersinn gedreht und der Betrag um $\sqrt{2}$ vergrößert wird.

Aufgabe 72 a

Bestimmen Sie für $z_1 = \frac{(3-2i)(3i-1)}{(1-i)} i^5$ den Real- und Imaginärteil und bestimmen Sie anschließend die Darstellung in Polarkoordinaten.

Lösung:

$$z_1 = \frac{(3-2i)(3i-1)}{1-i} \cdot \underbrace{i^5}_{=i} = \frac{9i-3-6i^2+2i}{1-i} \cdot i = \frac{3+11i}{1-i} \cdot i = \frac{3i+11i^2}{1-i}$$

$$= \frac{-11+3i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{-11+3i-11i+3i^2}{1-i^2} = \frac{-14-8i}{2} = -7-4i$$

Dann sind $\mathrm{Re}(z_1) = -7$ und $\mathrm{Im}(z_1) = -4$.
Der Betrag von z_1 ist $|z_1| = |-7-4i| = \sqrt{(-7)^2 + (-4)^2} = \sqrt{65}$ und der Phasenwinkel $\varphi = \arctan\left(\frac{-4}{-7}\right) + \pi \approx 3{,}66$. Damit lautet z_1 in Polarkoordinaten

$$z_1 \approx \sqrt{65}\,(\cos(3{,}66) + i\sin(3{,}66)).$$

Aufgabe 72 b

Bestimmen Sie für $z_2 = \left((\sqrt{2} - i) - i(1 - i\sqrt{2}) \right)^{11}$ den Real- und Imaginärteil und bestimmen Sie anschließend die Darstellung in Polarkoordinaten.

Lösung:

Es ist $z := (\sqrt{2} - i) - i(1 - i\sqrt{2}) = \sqrt{2} - i - i + i^2\sqrt{2} = -2i$. Der Betrag von z ist $|z| = |-2i| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$ und der Phasenwinkel $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, da die komplexe Zahl z auf der negativen imaginären Achse liegt. Dann ergibt sich für z_2

$$z_2 = z^{11} = \left(2e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)^{11} = 2^{11} \cdot e^{-i\frac{11\pi}{2}} = 2^{11} \cdot e^{-i\frac{12\pi}{2}} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = 2^{11} \cdot e^{-i6\pi} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2^{11} \cdot (\underbrace{\cos(-6\pi)}_{=1} + i \underbrace{\sin(-6\pi)}_{=0}) \cdot \left(\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + i \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}\right) = 2^{11} \cdot (0 + i) = 2048\,i.$$

Dann sind $\mathrm{Re}(z_2) = 0$ und $\mathrm{Im}(z_2) = 2048$. Der Betrag von z_2 ist an der Exponentialdarstellung ablesbar und beträgt $|z_2| = 2^{11}$ und der Phasenwinkel ist $\varphi = \frac{\pi}{2}$, da z_2 auf der positiven imaginären Achse in der Gaußschen Zahlenebene liegt. Also lautet z_2 in Polarkoordinaten $z_2 = 2^{11} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

Aufgabe 72 c

Bestimmen Sie für $z_3 = \frac{1+2i}{3-4i}$ den Real- und Imaginärteil und bestimmen Sie anschließend die Darstellung in Polarkoordinaten.

Lösung:

$$z_3 = \frac{1+2i}{3-4i} = \frac{1+2i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{3+4i+6i+8i^2}{9-16i^2} = \frac{-5+10i}{25} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$$

Dann sind $\mathrm{Re}(z_3) = -\frac{1}{5}$ und $\mathrm{Im}(z_3) = \frac{2}{5}$. Der Betrag von z_3 ist

$$|z_3| = \left| -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

und der Phasenwinkel $\varphi = \arctan\left(\frac{\frac{2}{5}}{-\frac{1}{5}}\right) + \pi \approx 2{,}03$. Damit lautet z_3 in Polarkoordinaten $z_3 \approx \frac{\sqrt{5}}{5}(\cos(2{,}02) + i \sin(2{,}03))$.

Aufgabe 72 d

Bestimmen Sie für $z_4 = (1+i)^4$ den Real- und Imaginärteil und bestimmen Sie anschließend die Darstellung in Polarkoordinaten.

Lösung:

Der Betrag von $z := 1 + i$ ist $|z| = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ und der Phasenwinkel $\varphi = \frac{\pi}{4}$, da die komplexe Zahl z auf der Winkelhalbierenden im ersten Quadranten der Gaußschen Zahlenebene liegt. Damit lautet die komplexe Zahl z in der Exponentialdarstellung $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Also gilt

$$z_4 = z^4 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4 = 4e^{i\pi} = 4\,(\underbrace{\cos\pi}_{=-1} + i\,\underbrace{\sin\pi}_{=0}).$$

Dann sind der Realteil $\mathrm{Re}\,(z_4) = -4$ und der Imaginärteil $\mathrm{Im}\,(z_4) = 0$.

Aufgabe 73

Schreiben Sie die komplexen Zahlen $z = -2 - 2i$ und $w = -1 + \sqrt{3}\,i$ in Polarkoordinaten und berechnen Sie anschließend den Real- und Imaginärteil von:

$$a)\ u_1 = z^4 \qquad b)\ u_2 = w^3 \qquad c)\ u_3 = (z \cdot w)^6$$

Hinweis: Verwenden Sie die Eulersche Formel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\,\sin\varphi$.

Lösung:

Der Betrag von $z = -2 - 2i$ ist $|\,z\,| = |\,-2 - 2i\,| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ und der Phasenwinkel $\varphi = \frac{5\pi}{4}$, da die komplexe Zahl z auf der Winkelhalbierenden im dritten Quadranten der Gaußschen Zahlenebene liegt. Dann lautet die komplexe Zahl z in der Exponentialdarstellung $z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

Der Betrag von $w = -1 + \sqrt{3}\,i$ ist $|\,w\,| = |\,-1 + \sqrt{3}\,i\,| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$ und der Phasenwinkel $\varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$. Damit lautet die komplexe Zahl w in der Exponentialdarstellung $w = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Lösung zu a):

$$u_1 = (z)^4 = \left(2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)^4 = 64e^{i5\pi} = 64\,[\underbrace{\cos(5\pi)}_{=-1} + i\,\underbrace{\sin(5\pi)}_{=0}] = -64$$

Dann sind $\mathrm{Re}\,(u_1) = -64$ und $\mathrm{Im}\,(u_1) = 0$.

Lösung zu b):

$$u_2 = (w)^3 = \left(2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = 8e^{i2\pi} = 8\,[\underbrace{\cos(2\pi)}_{=1} + i\,\underbrace{\sin(2\pi)}_{=0}] = 8$$

Also sind $\mathrm{Re}\,(u_2) = 8$ und $\mathrm{Im}\,(u_2) = 0$.

Lösung zu c):

$$u_3 = (zw)^6 = \left(2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}\,2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^6 = 2^{15}e^{i\frac{23\pi}{2}} = 2^{15}\left[\underbrace{\cos\left(\frac{23\pi}{2}\right)}_{=0} + i\,\underbrace{\sin\left(\frac{23\pi}{2}\right)}_{=-1}\right]$$

$$= -2^{15}i$$

Folglich sind $\mathrm{Re}\,(u_3) = 0$ und $\mathrm{Im}\,(u_3) = -2^{15}$.

Aufgabe 74 a

Berechnen Sie für $z_1 = \left(\frac{2i}{1-i}\right)^6$ den Real- und Imaginärteil.

Lösung:

$$z := \frac{2i}{1-i} = \frac{2i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{2i+2i^2}{1-i^2} = \frac{-2+2i}{2} = -1+i$$

Der Betrag von $z = -1+i$ ist $|z| = |-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$ und der Phasenwinkel $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, da die komplexe Zahl z auf der Winkelhalbierenden im zweiten Quadranten der Gaußschen Zahlenebene liegt. Dann lautet die komplexe Zahl z in der Exponentialdarstellung $z = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Also gilt

$$z_1 = (z)^6 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^6 = 8e^{i\frac{9\pi}{2}} = 8\left(\underbrace{\cos\left(\frac{9\pi}{2}\right)}_{=0} + i\underbrace{\sin\left(\frac{9\pi}{2}\right)}_{=1}\right) = 8i.$$

Damit ergeben sich der Realteil $\mathrm{Re}(z_1) = 0$ und der Imaginärteil $\mathrm{Im}(z_1) = 8$.

Aufgabe 74 b

Berechnen Sie für $z_2 = \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{21}$ den Real- und Imaginärteil.

Lösung:

Der Betrag von $z := -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ist

$$|z| = \left|-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

und der Phasenwinkel $\varphi = \arctan\left(\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}\right) + \pi = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$. Damit folgt

$$z_2 = \left(e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^{21} = e^{i28\pi} = \underbrace{\cos(28\pi)}_{=1} + i\underbrace{\sin(28\pi)}_{=0} = 1.$$

Dann sind der Realteil $\mathrm{Re}(z_2) = 1$ und der Imaginärteil $\mathrm{Im}(z_2) = 0$.

Aufgabe 75 a

Geben Sie i^k für beliebige $k \in \mathbb{N}$ in kartesischer Form an.

Lösung:

Es gilt $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$, $i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = 1$ und $i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$. Damit wiederholen sich die Ergebnisse zyklisch und es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$i^{4k-3} = i, \qquad i^{4k-2} = -1, \qquad i^{4k-1} = -i, \qquad i^{4k} = 1.$$

Aufgabe 75 b

Stellen Sie die folgende komplexe Zahl z in der kartesischen Form $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar.

$$z = \frac{2 \cdot i^7 \cdot |i-1| + i^{12} \cdot |1+i| + \sqrt{2} \cdot i^{21}}{i^6 \cdot (1+i)} + i$$

Lösung:

Mithilfe der Aufgabe a) ist $i^7 = -i$, $i^{12} = 1$, $i^{21} = i$, $i^6 = -1$ und für die Beträge gilt $|i-1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ beziehungsweise $|1+i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Dann ist

$$z = \frac{2 \cdot (-i) \cdot \sqrt{2} + 1 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot i}{-1(1+i)} + i = \frac{-2\sqrt{2}i + \sqrt{2}i + \sqrt{2}}{-1-i} + i = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}i}{-1-i} \cdot \frac{-1+i}{-1+i} + i$$

$$= \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{2}i + \sqrt{2}i - \sqrt{2}i^2}{1 - i^2} + i = \frac{2\sqrt{2}i}{2} + i = \sqrt{2}i + i = (1+\sqrt{2})i.$$

Aufgabe 76

Sei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine beliebige komplexe Zahl und sei $z = iz_0$. Fassen Sie z_0 und z als Vektoren in der komplexen Zahlenebene auf. Was ist der Winkel zwischen den Ortsvektoren z_0 und z?

Lösung:

Sei $z_0 = x + iy \neq 0$ beliebig, dann ist $z = iz_0 = i(x+iy) = ix + i^2 y = -y + ix$. Fasst man die komplexen Zahlen als Vektoren im $\mathbb{R}^2$ auf und bildet anschließend das Skalarprodukt beider Vektoren, dann erhält man $\vec{z_0} \cdot \vec{z} = \binom{x}{y} \cdot \binom{-y}{x} = -x \cdot y + x \cdot y = 0$. Das bedeutet, dass die beiden Vektoren senkrecht aufeinander stehen und somit der Winkel zwischen beiden Vektoren $\varphi = 90°$ ist.

Aufgabe 77 a

Geben Sie die komplexe Zahl $z_1 = (1+i)^8$ in der Form $z = r \cdot e^{i\varphi}$ an. Ist die Lösung eindeutig?

Lösung:

Der Betrag von $z := 1+i$ ist $|z| = |1+i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ und der Phasenwinkel $\varphi = \frac{\pi}{4}$, da die komplexe Zahl z auf der Winkelhalbierenden im ersten Quadranten der Gaußschen Zahlenebene liegt. Dann lautet die komplexe Zahl z in der Exponentialdarstellung $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Also ist $z_1 = z^8 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^8 = 16e^{i2\pi}$ die eindeutige Lösung.

Aufgabe 77 b

Geben Sie die komplexe Zahl $z_2 = \left(\sqrt{\frac{1}{3}} - i\right)^4$ in der Form $z = r \cdot e^{i\varphi}$ an. Ist die Lösung eindeutig?

Lösung:
Der Betrag von $z := \frac{1}{\sqrt{3}} - i$ ist $| z | = \left| \frac{1}{\sqrt{3}} - i \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ und der Phasenwinkel $\varphi = \arctan\left(\frac{-1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right) = -\frac{\pi}{3}$. Offensichtlich ist die komplexe Zahl $z_2 = z^4 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^4 = \frac{16}{9} e^{-i\frac{4\pi}{3}}$ die eindeutige Lösung.

Aufgabe 77 c

Geben Sie die komplexe Zahl $z_3 = \sqrt[3]{-i}$ in der Form $z = r \cdot e^{i\varphi}$ an. Ist die Lösung eindeutig?

Lösung:
Für $z := -i$ gilt in der Exponentialdarstellung $z = e^{\frac{3\pi}{2} i}$. Dann folgt

$$z_3 = \sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{z} = \left\{ w_k \in \mathbb{C} \;\middle|\; w_k = e^{\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} i}, k \in \{0, 1, 2\} \right\} = \left\{ e^{\frac{\pi}{2} i}, e^{\frac{7}{6} i}, e^{\frac{11}{6} i} \right\}.$$

Also ist die Lösung für z_3 nicht eindeutig!

Aufgabe 77 d

Geben Sie die komplexe Zahl $z_4 = \left(\sqrt{1+i}\right)^9$ in der Form $z = r \cdot e^{i\varphi}$ an. Ist die Lösung eindeutig?

Lösung:
Der Betrag von $z := 1 + i$ ist $| z | = | 1 + i | = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ und der Phasenwinkel $\varphi = \frac{\pi}{4}$, da die komplexe Zahl z auf der Winkelhalbierenden im ersten Quadranten der Gaußschen Zahlenebene liegt. Dann folgt

$$\sqrt{1+i} = \left\{ w_k \in \mathbb{C} \;\middle|\; w_k = \sqrt[4]{2} e^{\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{2} i}, k \in \{0, 1\} \right\} = \left\{ \sqrt[4]{2} e^{\frac{\pi}{8} i}, \sqrt[4]{2} e^{\frac{9\pi}{8} i} \right\}.$$

Für die komplexe Zahl z_4 gibt es keine Lösung, weil der Ausdruck

$$z_4 = \left(\sqrt{1+i}\right)^9 = \left\{ \sqrt[4]{2} e^{\frac{\pi}{8} i}, \sqrt[4]{2} e^{\frac{9\pi}{8} i} \right\}^9$$

nicht definiert ist!

Aufgabe 78 a

Sei i die imaginäre Einheit. Berechnen Sie i^{123}.

Lösung:
Die imaginäre Einheit i lässt sich in der Exponentialform zu $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ angeben, da der Betrag 1 und der Phasenwinkel $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist. Damit erhält man

$$i^{123} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{123} = e^{i\frac{123\pi}{2}} = \underbrace{\cos\left(\frac{123\pi}{2}\right)}_{=0} + i \underbrace{\sin\left(\frac{123\pi}{2}\right)}_{=-1} = -i.$$

Aufgabe 78 b

Sei $z \in \mathbb{C}$. Wie viele Lösungen besitzt die Gleichung $e^z = e$?

Lösung:

Für $z = x + iy$ ist $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y$. Die Gleichung $e^z = e \quad \Leftrightarrow \quad e^x \cos y + ie^x \sin y = e$ hat nur dann Lösungen, wenn der Imaginärteil verschwindet und der Realteil e ist. Da $e^x > 0$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$, kann der Imaginärteil nur dann verschwinden, wenn $\sin y = 0$ wird. Das ist der Fall wenn $y = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ist. Für den Realteil muss $e^x \cos y = e$ gelten. Diese Gleichung ist nur für $x = 1 \wedge y = 2k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ erfüllbar. Damit lautet die Lösungsmenge der Gleichung $L := \{z \in \mathbb{C} \mid z = 1 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}\}$.

Aufgabe 78 c

Es sei $z = -1 - i$ und $w = e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot z$. Ermitteln Sie den Real- und Imaginärteil von $u = w^{12}$.

Lösung:

Zunächst wird die komplexe Zahl z auf die Exponentialform umgeformt. Der Betrag von z ist $|z| = |-1-i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ und der Phasenwinkel $\varphi = \frac{5\pi}{4}$, da die komplexe Zahl z auf der Winkelhalbierenden im dritten Quadranten der Gaußschen Zahlenebene liegt. Dann ergibt sich

$$u = \left(e^{i\frac{\pi}{6}} \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)^{12} = \left(\sqrt{2} e^{i\frac{17\pi}{12}}\right)^{12} = 2^6 e^{i17\pi} = 64\,(\underbrace{\cos(17\pi)}_{=-1} + i\underbrace{\sin(17\pi)}_{=0}) = -64$$

mit $\mathrm{Re}(u) = -64$ und $\mathrm{Im}(u) = 0$.

Aufgabe 79 a

Stellen Sie $z_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5$ in kartesischen Koordinaten dar.

Lösung:

Der Betrag von $z := \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ ist $|z| = \left|\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{1} = 1$ und der Phasenwinkel $\varphi = \frac{\pi}{4}$, da die komplexe Zahl z auf der Winkelhalbierenden im ersten Quadranten der Gaußschen Zahlenebene liegt. Dann ergibt sich

$$z_1 = z^5 = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^5 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i.$$

Aufgabe 79 b

Stellen Sie $z_2 = 1 - \frac{i}{\sqrt{3}}$ in Polarkoordinaten dar.

Lösung:

Der Betrag von z_2 ist $|z_2| = \left|1 - i\frac{1}{\sqrt{3}}\right| = \sqrt{1^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ und der Phasenwinkel $\varphi = \arctan\left(\frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1}\right) = -\frac{\pi}{6}$. Damit ergibt sich für z_2

$$z_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) \right).$$

Aufgabe 79 c

Stellen Sie $z_3 = -6$ in Polarkoordinaten dar.

Lösung:

Der Betrag von z_3 ist $|z_3| = |-6| = \sqrt{(-6)^2 + 0^2} = 6$ und der Phasenwinkel $\varphi = \pi$, da die komplexe Zahl z_3 auf der negativen reellen Achse der Gaußschen Zahlenebene liegt. Damit ergibt sich $z_3 = 6e^{i\pi} = 6(\cos\pi + i \sin\pi)$.

Aufgabe 80 a

Bestimmen Sie für $z_1 = (-1+i)^5$ den Realteil, Imaginärteil und den Absolutbetrag.

Lösung:

Der Betrag von $z := -1+i$ ist $|z| = |-1+i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ und der Phasenwinkel $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, da die komplexe Zahl z auf der Winkelhalbierenden im zweiten Quadranten der Gaußschen Zahlenebene liegt. Dann ergibt sich für z_1

$$z_1 = (z)^5 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^5 = 4\sqrt{2}e^{i\frac{15\pi}{4}} = 4\sqrt{2}\underbrace{e^{i4\pi}}_{=1}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$= 4\sqrt{2}\left(\underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}} + i\underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}_{=-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = 4\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4 - 4i.$$

Also sind $\mathrm{Re}(z_1) = 4$, $\mathrm{Im}(z_1) = -4$ und der Betrag ist $|z_1| = 4\sqrt{2}$.

Aufgabe 80 b

Bestimmen Sie für $z_2 = \frac{2-3i}{-1+2i}$ den Realteil, Imaginärteil und den Absolutbetrag.

Lösung:

$$z_2 = \frac{2-3i}{-1+2i} = \frac{2-3i}{-1+2i} \cdot \frac{-1-2i}{-1-2i} = \frac{-2-4i+3i+6i^2}{1-4i^2} = \frac{-8-i}{5} = -\frac{8}{5} - \frac{1}{5}i$$

Dann gilt $\mathrm{Re}(z_2) = -\frac{8}{5}$, $\mathrm{Im}(z_2) = -\frac{1}{5}$ und $|z_2| = \sqrt{\left(-\frac{8}{5}\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{65}{25}} = \sqrt{\frac{13}{5}}$.

Aufgabe 80 c

Bestimmen Sie für $z_3 = \frac{3e^{\frac{2}{3}\pi i}}{2e^{\frac{1}{2}\pi i}}$ den Realteil, Imaginärteil und den Absolutbetrag.

Lösung:

$$z_3 = \frac{3}{2}e^{i\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{3}{2}\left(\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}_{=\frac{\sqrt{3}}{2}} + i\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}_{=\frac{1}{2}}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i$$

Dann sind $\mathrm{Re}(z_3) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, $\mathrm{Im}(z_3) = \frac{3}{4}$ und $|z_3| = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$.

Aufgabe 80 d

Bestimmen Sie für $z_4 = e^{2-3i}$ den Realteil, Imaginärteil und den Absolutbetrag.

Lösung:

$$z_4 = e^{2-3i} = e^2 e^{-3i} = e^2 (\cos(-3) + i \sin(-3)) = e^2 \cos(3) - i e^2 \sin(3)$$

Dann sind $\mathrm{Re}(z_4) = e^2 \cos(3)$, $\mathrm{Im}(z_4) = -e^2 \sin(3)$ und $|z_4| = e^2$.

Aufgabe 80 e

Bestimmen Sie für $z_5 = \left(1 + \sqrt{3}i\right)^{10}$ den Realteil, Imaginärteil und den Absolutbetrag.

Lösung:

Der Betrag von $z := 1 + \sqrt{3}i$ ist $|z| = |1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$ und der Phasenwinkel $\varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$. Damit ergibt sich

$$z_5 = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{10} = 2^{10} e^{i\frac{10\pi}{3}} = 2^{10} e^{i3\pi} e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$= 2^{10} (\underbrace{\cos(3\pi)}_{=-1} + i \underbrace{\sin(3\pi)}_{=0})\left(\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{=\frac{1}{2}} + i \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{=\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = -2^9 - i2^9\sqrt{3}.$$

Also sind $\mathrm{Re}(z_5) = -2^9$, $\mathrm{Im}(z_5) = -2^9\sqrt{3}$ und $|z_5| = 2^{10}$.

Aufgabe 80 f

Bestimmen Sie für $z_6 = \frac{2e^{\frac{2}{3}\pi i}}{3+7i}$ den Realteil, Imaginärteil und den Absolutbetrag.

Lösung:

$$z_6 = \frac{2e^{\frac{2}{3}\pi i}}{3+7i} = \frac{2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)}{3+7i} = \frac{2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{3+7i} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{3+7i}$$

$$= \frac{-1+\sqrt{3}i}{3+7i} \cdot \frac{3-7i}{3-7i} = \frac{-3+3\sqrt{3}i+7i-7\sqrt{3}i^2}{9-49i^2} = \frac{-3+7\sqrt{3}+(7+3\sqrt{3})i}{58}$$

$$= \frac{-3+7\sqrt{3}}{58} + \frac{7+3\sqrt{3}}{58}i$$

Dann sind $\mathrm{Re}(z_6) = \frac{-3+7\sqrt{3}}{58}$, $\mathrm{Im}(z_6) = \frac{7+3\sqrt{3}}{58}$ und

$$|z_6| = \sqrt{\left(\frac{-3+7\sqrt{3}}{58}\right)^2 + \left(\frac{7+3\sqrt{3}}{58}\right)^2} = \sqrt{\frac{9-42\sqrt{3}+147+49+42\sqrt{3}+27}{58^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{232}{58^2}} = \sqrt{\frac{2}{29}}.$$

Aufgabe 80 g

Bestimmen Sie für

$$z_7 = \left[\cos\left(\frac{6}{7}\pi - 1\right) + i\,\sin\left(\frac{6}{7}\pi - 1\right)\right] e^{3+i+\frac{1}{7}\pi i}$$

den Realteil, Imaginärteil und den Absolutbetrag.

Lösung:

$$z_7 = e^{i\left(\frac{6\pi}{7}-1\right)} \cdot e^{3+i+\frac{\pi}{7}i} = e^{i\pi+3} = e^3 e^{i\pi} = e^3 (\underbrace{\cos\pi}_{=-1} + i\,\underbrace{\sin\pi}_{=0}) = -e^3$$

Dann sind $\mathrm{Re}(z_7) = -e^3$, $\mathrm{Im}(z_7) = 0$ und $|z_7| = e^3$.

Aufgabe 81 a

Berechnen Sie mithilfe der Polardarstellung für komplexe Zahlen $z_1 = (1+i)^{20}$.

Lösung:

Der Betrag von $z := 1+i$ ist $|z| = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ und der Phasenwinkel $\varphi = \frac{\pi}{4}$, da die komplexe Zahl z auf der Winkelhalbierenden im ersten Quadranten der Gaußschen Zahlenebene liegt. Dann ergibt sich für z_1

$$z_1 = (z)^{20} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{20} = 2^{10}(\underbrace{\cos(5\pi)}_{=-1} + i\,\underbrace{\sin(5\pi)}_{=0}) = -2^{10}.$$

Aufgabe 81 b

Berechnen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ mithilfe der Polardarstellung für komplexe Zahlen

$$z_2 = (1+i)^n + (1-i)^n.$$

Lösung:

Der Betrag von $z := 1+i$ ist $|z| = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ und der Phasenwinkel $\varphi = \frac{\pi}{4}$, da die komplexe Zahl z auf der Winkelhalbierenden im ersten Quadranten der Gaußschen Zahlenebene liegt. Der Betrag von $w := 1-i$ ist $|w| = |1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$ und der Phasenwinkel $\varphi = -\frac{\pi}{4}$, da die komplexe Zahl w auf der Winkelhalbierenden im vierten Quadranten der Gaußschen Zahlenebene liegt. Mit den Symmetrieeigenschaften der trigonometrischen Funktionen erhält man für z_2

$$z_2 = z^n + w^n = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n + \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n$$

$$= (\sqrt{2})^n \left[\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i\,\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{-n\pi}{4}\right) + i\,\sin\left(\frac{-n\pi}{4}\right)\right]$$

$$= (\sqrt{2})^n \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i\,\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - i\,\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right) = 2(\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

Aufgabe 82

Berechnen Sie den Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl

$$z = \exp\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Lösung:

Zunächst gilt $e^{i\frac{\pi}{4}} = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}} + i \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$. Damit ergibt sich für z

$$z = e^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = e^{\frac{\pi}{2}+i\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{\pi}{2}}\left(\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + i\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}\,i.$$

Also sind $\mathrm{Re}(z) = 0$ und $\mathrm{Im}(z) = e^{\frac{\pi}{2}}$.

Aufgabe 83

Sei $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ mit $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$. Zeigen Sie, dass genau dann ein $n \in \mathbb{N}$ mit $z^n \in \mathbb{R}$ existiert, wenn $\frac{\varphi}{\pi}$ eine rationale Zahl ist.

Lösung:

Zunächst gilt

$$z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi} = r^n\left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right).$$

Damit z^n reell wird, muss der Imaginärteil von z^n verschwinden. Das ist der Fall für

$$n\varphi = k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\varphi}{\pi} = \frac{k}{n} \in \mathbb{Q} \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Aufgabe 84 a

Vereinfachen Sie für $z \in \mathbb{C}$ den Ausdruck $\left((\mathrm{Re}\,z)^2 + (\mathrm{Im}\,z)^2\right)^2$.

Lösung:

Sei $z = x + iy$. Dann gilt $\left((\mathrm{Re}\,z)^2 + (\mathrm{Im}\,z)^2\right)^2 = (x^2+y^2)^2 = \left(|z|^2\right)^2 = |z|^4$.

Aufgabe 84 b

Vereinfachen Sie für $z \in \mathbb{C}$ den Ausdruck $\mathrm{Im}(z^2 + \overline{z}^2)$.

Lösung:

Sei $z = x + iy$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(z^2+\overline{z}^2) &= \mathrm{Im}\left((x+iy)^2 + (x-iy)^2\right) = \mathrm{Im}\left(x^2 - y^2 + 2ixy + x^2 - y^2 - 2ixy\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(2x^2 - 2y^2\right) = 0.\end{aligned}$$

Aufgabe 84 c

Vereinfachen Sie für $z \in \mathbb{C}$ den Ausdruck $\mathrm{Re}\,((1+i)z) + \mathrm{Im}\,((1+i)z)$.

Lösung:

Sei $z = x + iy$. Dann gilt

$$w := (1+i)z = (1+i)(x+iy) = x + iy + ix + i^2 y = x - y + i(x+y)$$

und somit ist $\mathrm{Re}\,(w) + \mathrm{Im}\,(w) = x - y + x + y = 2x$.

Aufgabe 84 d

Vereinfachen Sie für $z \in \mathbb{C}$ den Ausdruck $\frac{\mathrm{Re}\,(z)}{\mathrm{Im}\,(iz)}$.

Lösung:

Sei $z := x + iy$. Dann ergibt sich

$$\frac{\mathrm{Re}\,(z)}{\mathrm{Im}\,(iz)} = \frac{x}{\mathrm{Im}\,(ix + i^2 y)} = \frac{x}{\mathrm{Im}\,(-y + ix)} = \frac{x}{x} = 1.$$

Aufgabe 84 e

Vereinfachen Sie für $z \in \mathbb{C}$ den Ausdruck $(1 - \mathrm{Re}\,(z) + i\,\mathrm{Im}\,(z))(1 - \mathrm{Re}\,(z) - i\,\mathrm{Im}\,(z))$.

Lösung:

Sei $z = x + iy$. Dann ergibt sich mithilfe der dritten binomischen Formel

$$\begin{aligned}(1 - \mathrm{Re}\,(z) + i\,\mathrm{Im}\,(z))(1 - \mathrm{Re}\,(z) - i\,\mathrm{Im}\,(z)) &= (1 - \mathrm{Re}\,(z))^2 - i^2\,\mathrm{Im}^2\,(z) \\ &= (1-x)^2 + y^2.\end{aligned}$$

Aufgabe 84 f

Vereinfachen Sie für $z \in \mathbb{C}$ den Ausdruck $\mathrm{Im}\,(z^2 - \bar{z}^2)$.

Lösung:

Sei $z = x + iy$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,(z^2 - \bar{z}^2) &= \mathrm{Im}\,((x+iy)^2 - (x-iy)^2) = \mathrm{Im}\,(x^2 - y^2 + 2ixy - x^2 + 2ixy + y^2) \\ &= \mathrm{Im}\,(i4xy) = 4xy.\end{aligned}$$

Aufgabe 84 g

Vereinfachen Sie für $z \in \mathbb{C}$ den Ausdruck $\mathrm{Re}\left(e^{z^2}\right)$.

Lösung:

Sei $z = x + iy$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left(e^{z^2}\right) &= \mathrm{Re}\left(e^{x^2 - y^2 + 2ixy}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{x^2-y^2}(\cos(2xy) + i\sin(2xy))\right) \\ &= e^{x^2-y^2}\cos(2xy).\end{aligned}$$

Aufgabe 84 h

Vereinfachen Sie für $z \in \mathbb{C}$ den Ausdruck $\mathrm{Im}\,(\bar{z}^{80} \cdot z^{79})$.

Lösung:

Sei $z = x + iy$. Dann gilt

$$w := \bar{z}^{80} z^{79} = (\bar{z}z)^{79}\,\bar{z} = ((x-iy)(x+iy))^{79}(x-iy) = (x^2+y^2)^{79}(x-iy)$$
$$= x(x^2+y^2)^{79} - iy(x^2+y^2)^{79}.$$

Also gilt $\mathrm{Im}(w) = -y(x^2+y^2)^{79}$.

Aufgabe 85 a

Welche Werte haben $\mathrm{Re}(z)$ und $|z|$ für $z = (1+i)^{20}$?

Lösung:

Der Betrag von $w := 1+i$ ist $|w| = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ und der Phasenwinkel $\varphi = \frac{\pi}{4}$, da die komplexe Zahl w auf der Winkelhalbierenden im ersten Quadranten der Gaußschen Zahlenebene liegt. Dann ergibt sich für z

$$z = (w)^{20} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{20} = 2^{10}e^{i5\pi} = 2^{10}(\underbrace{\cos(5\pi)}_{=-1} + i\,\underbrace{\sin(5\pi)}_{=0}) = -2^{10}.$$

Also gilt $\mathrm{Re}(z) = -2^{10} = -1024$ und $|z| = 2^{10} = 1024$.

Aufgabe 85 b

Berechnen Sie $|e^i|$.

Lösung:

$$|e^i| = |e^{1\cdot i}| = |\cos(1) + i\sin(1)| = \sqrt{\cos^2(1) + \sin^2(1)} = \sqrt{1} = 1$$

Aufgabe 85 c

Welche $z \in \mathbb{C}$ erfüllen die Gleichung $\mathrm{Im}(z) = |z|$?

Lösung:

Sei $z = x + iy$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \mathrm{Im}(z) = |z| \\ \Leftrightarrow \quad & y = \sqrt{x^2+y^2} && |\,(\,)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & y^2 = x^2+y^2 && |\,-y^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = x^2 && |\,\sqrt{\ } \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = x \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Lösungsmenge $L = \{z \in \mathbb{C} \mid z = iy,\ y \in \mathbb{R}_0^+\}$.

Aufgabe 86

Stellen Sie $z(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ in Polarkoordinaten dar, wobei $z(x) := \frac{x+i}{ix-1}$ ist.

Lösung:

$$z(x) = \frac{x+i}{ix-1} = \frac{x+i}{-1+ix} \cdot \frac{-1-ix}{-1-ix} = \frac{-x-x^2i-i-i^2x}{1-i^2x} = \frac{-i(1+x^2)}{1+x^2} = -i$$

Dann ist der Betrag $|z(x)| = \sqrt{0^2+(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$ und der Phasenwinkel $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, da die komplexe Zahl $z(x)$ auf der negativen imaginären Achse der Gaußschen Zahlenebene liegt. Die Polarkoordinatendarstellung von $z(x)$ lautet also

$$z(x) = e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

Aufgabe 87

Die komplexe Exponentialfunktion ist für alle $z \in \mathbb{C}$, $z = x+iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ definiert als

$$e^z := e^x(\cos y + i\sin y).$$

a) Zeigen Sie, dass die komplexe Exponentialfunktion $2\pi i$ - periodisch ist. Skizzieren Sie einen beliebigen Periodenbereich dieser Funktion in der komplexen Ebene.

b) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für die $e^z = 1$ gilt.

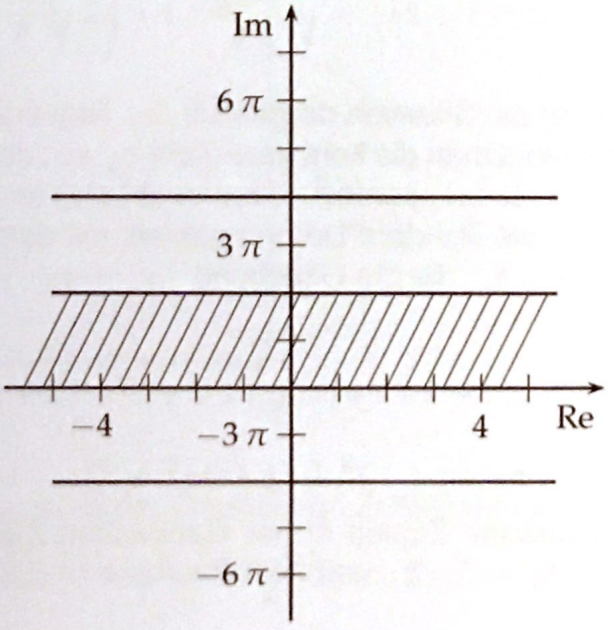
Lösung zu a):

Sei $z = x+iy$. Dann gilt mit $f(z) = e^z$

$$f(z+2\pi i) = f(x+iy+2\pi i) = f(x+i(y+2\pi))$$

$$= e^x(\cos(y+2\pi)+i\sin(y+2\pi)) = e^x(\cos y + i\sin y) = f(z).$$

Beachten Sie dabei, dass die Cosinus- und die Sinusfunktion 2π - periodisch sind. In der folgenden Abbildung ist die erste Periode für $x \in \mathbb{R}$ und $0 \le y \le 2\pi$ skizziert.



Lösung zu b):
Sei $z = x + iy$. Dann gilt

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^x \cos y + ie^x \sin y = 1 + 0i.$$

Diese Gleichung ist nur dann erfüllt, wenn der Imaginärteil verschwindet. Da $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist, muss $\sin y = 0$ sein. Daher ist $y = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Für den Realteil gilt $e^x \cos y = 1$ und mit $y = k\pi$ folgt $e^x(-1)^k = 1$. Diese Gleichung ist nur für gerade Werte von k und $x = 0$ erfüllt. Die Lösungsmenge lautet damit

$$L := \{z \in \mathbb{C} \mid z = i2k\pi\,,\, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Aufgabe 88

Gegeben sei $z_1 = \frac{3+i}{1-i}$. Geben Sie zunächst ein $z_2 \in \mathbb{C}$ so an, dass $|z_1 + z_2| = \sqrt{32}$ und erklären Sie Ihre Vorgehensweise zum Auffinden von z_2 grafisch. Geben Sie dann alle $z_2 \in \mathbb{C}$ an, so dass $|z_1 + z_2| = \sqrt{32}$.

Lösung:

$$z_1 = \frac{3+i}{1-i} = \frac{3+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{3+3i+i+i^2}{1-i^2} = \frac{2+4i}{2} = 1+2i$$

Der Betrag von z_1 ist $|z_1| = |1+2i| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$. Wenn man die komplexe Zahl z_1 als Vektor in der Gaußschen Zahlenebene auffasst, dann lässt sich zu z_1 ein linear abhängiger Vektor z_2 so finden, dass deren Summe einen Vektor der Länge $\sqrt{32}$ ergibt. Dazu setzt man $z_2 := tz_1$ mit $t \in \mathbb{R}^+$. Dann folgt aus der Bedingung

$$|z_1 + tz_1| = (1+t)\,|z_1| = (1+t)\sqrt{5} = \sqrt{32} \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{32}{5}} - 1$$

für die komplexe Zahl z_2 der Ausdruck

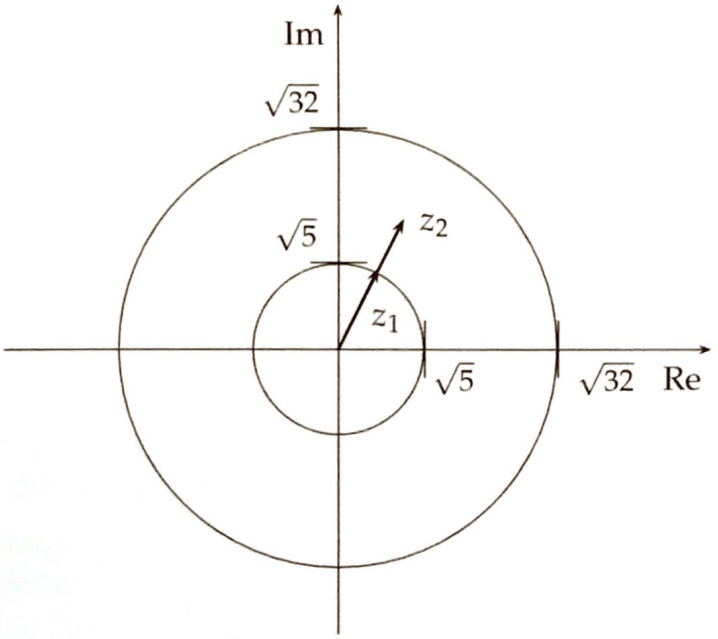
$$z_2 = tZ_1 = t(1+2i) = \sqrt{\frac{32}{5}} - 1 + i\left(2\sqrt{\frac{32}{5}} - 2\right).$$

In der folgenden Abbildung ist die Situation dargestellt. z_1 liegt auf dem Ursprungskreis mit dem Radius $r = \sqrt{5}$. Verschiebt man die komplexe Zahl z_2 so, dass der Anfangspunkt von z_2 mit dem Endpunkt von z_1 zusammenfällt, dann ergibt sich im Sinne der Vektoraddition eine komplexe Zahl $z_1 + z_2$ die auf dem Ursprungskreis mit dem Radius $r = \sqrt{32}$ liegt. Alle möglichen $z_2 = x + iy \in \mathbb{C}$, die die Gleichung $|z_1 + z_2| = \sqrt{32}$ erfüllen, ergeben sich aus

$$|z_1 + z_2| = |1 + 2i + x + iy| = \sqrt{(1+x)^2 + (2+y)^2} = \sqrt{32}$$

$$\Leftrightarrow \; (x+1)^2 + (y+2)^2 = 32.$$

Das sind offenbar alle komplexen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene, die auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt $M(-1 \mid -2)$ und dem Radius $r = \sqrt{32}$ liegen.



Aufgabe 89

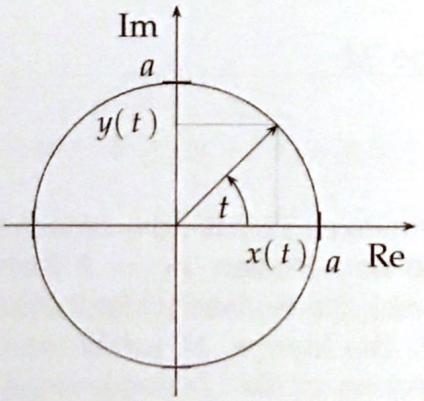
Es sei $a \in \mathbb{R}$. Durch die Abbildung $z : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $z(t) = a\cos(t) + ia\sin(t)$ wird eine Kurve in der komplexen Zahlenebene beschrieben. Zeichnen Sie die Kurve.

Lösung:

Es ist $z(t) = a\cos(t) + ia\sin(t) = x(t) + iy(t)$. Der Betrag von $z(t)$ ist

$$|z(t)| = \sqrt{(a\cos(t))^2 + (a\sin(t))^2} = a.$$

Also wird durch die Kurve $z(t)$ ein Kreis mit dem Mittelpunkt $M(0 \mid 0)$ und dem Radius $r = a$ in der komplexen Ebene beschrieben.



Aufgabe 90

Skizzieren Sie die Menge M in der Gaußschen Zahlenebene.

$$M := \{z \in \mathbb{C} \mid (|z|^2 - 4) \geq 0\} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z^2) \geq 0\}$$

Lösung:

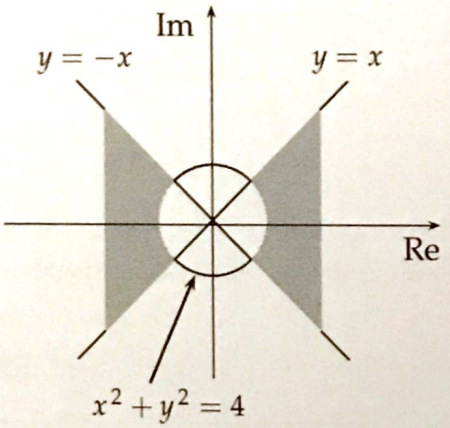
Es ist $|z|^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 \geq 4$. Das sind alle Punkte der komplexen Ebene, die außerhalb oder auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt $M(0 \mid 0)$ und dem Radius $r = 2$ liegen.

Für $\mathrm{Re}(z^2) = \mathrm{Re}(x^2 + 2ixy + i^2y^2) = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) \geq 0$ gilt:

1. Fall Das Produkt ist positiv, wenn beide Faktoren positiv sind. Daraus folgt
$x - y \geq 0 \wedge x + y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq x \wedge y \geq -x$.

2. Fall Das Produkt ist positiv, wenn beide Faktoren negativ sind. Daraus folgt
$x - y < 0 \wedge x + y < 0 \Leftrightarrow y > x \wedge y < -x$.

Die gesuchte Lösungsmenge M ergibt sich dann als Schnittmenge der drei einzelnen Lösungsmengen, deren grafische Darstellung die nachfolgende Abbildung wiedergibt:



Aufgabe 91 a

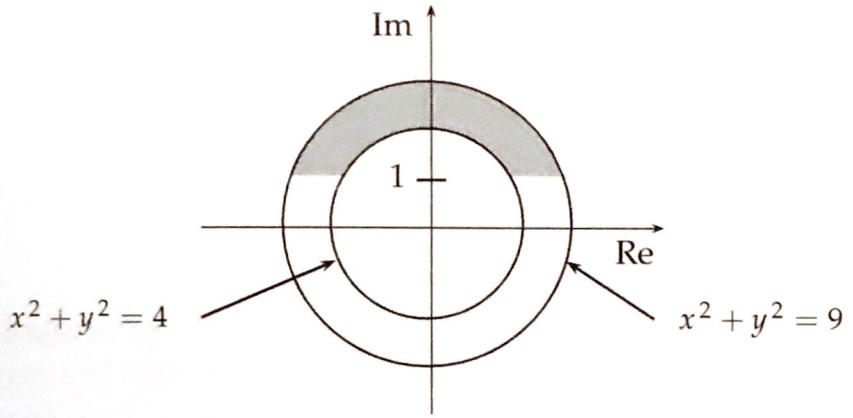
Skizzieren Sie die Menge $M := \{z \in \mathbb{C} \mid 2 \leq |z| \leq 3\} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \geq 1\}$ in der Gaußschen Zahlenebene.

Lösung:

Mit $z = x + iy$ gilt für die Menge M

$$2 \leq |z| \leq 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 3 \quad \Leftrightarrow \quad 4 \leq x^2+y^2 \leq 9.$$

Das sind alle Punkte in der komplexen Ebene, die zwischen oder auf den beiden Kreisen mit Mittelpunkt $M(0 \mid 0)$ und den Radien $r_1 = 2$ beziehungsweise $r_2 = 3$ liegen. $\mathrm{Im}(z) \geq 1 \Leftrightarrow y \geq 1$ beschreibt alle Punkte in der komplexen Ebene die überhalb oder auf der Geraden $y = 1$ liegen. Die Menge M erhält man dann als Schnittmenge beider Gebiete. In der folgenden Abbildung ist die Lösungsmenge M dargestellt.



Aufgabe 91 b

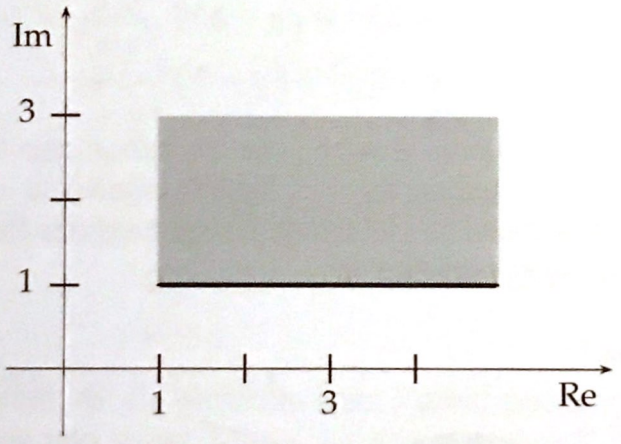
Skizzieren Sie die Menge $M := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \geq 1 \wedge 1 < \mathrm{Im}(z) \leq 3\}$ in der Gaußschen Zahlenebene.

Lösung:

Mit $z = x + iy$ gilt einerseits $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(x+iy) = x \geq 1$ und andererseits

$$1 < \mathrm{Im}(z) \leq 3 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < \mathrm{Im}(x+iy) \leq 3 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < y \leq 3.$$

Dann lautet die Lösungsmenge $M = \{z \in \mathbb{C} \mid z = x+iy,\ x \geq 1 \wedge 1 < y \leq 3\}$.



Aufgabe 92 a

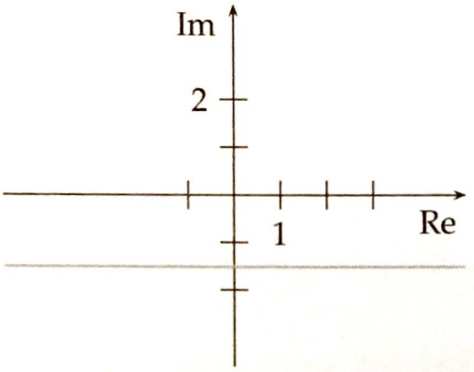
Skizzieren Sie die Menge $M := \{z \in \mathbb{C} \mid iz - i \cdot \bar{z} = 3\}$ in der Gaußschen Zahlenebene.

Lösung:

Mit $z = x + iy$ gilt

$$iz - i\bar{z} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad i(x+iy) - i(x-iy) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad ix + i^2y - ix + i^2y = 3$$
$$\Leftrightarrow \quad y = -\frac{3}{2}.$$

Dann ist die Lösungsmenge $M = \{ z \in \mathbb{C} \mid z = x - i\frac{3}{2}\ ,\ x \in \mathbb{R} \}$.



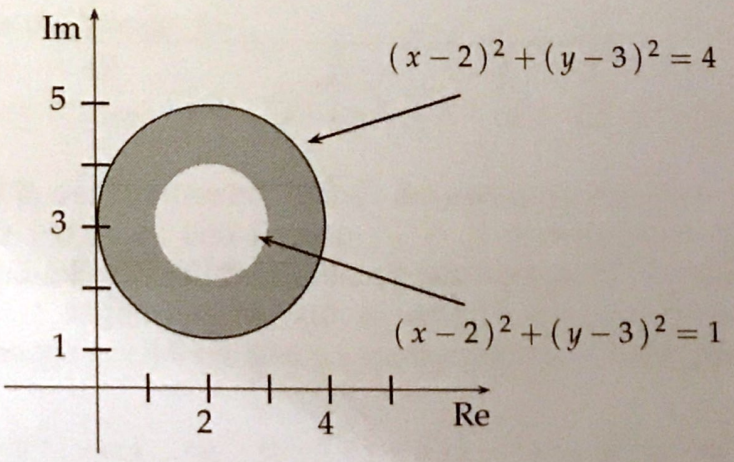
Aufgabe 92 b

Skizzieren Sie die Menge $M := \{ z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq | z - 2 - 3i | < 2 \}$ in der Gaußschen Zahlenebene.

Lösung:
Mit $z = x + iy$ gilt:

$$\begin{aligned} & 1 \leq | z - 2 - 3i | < 2 \\ \Leftrightarrow \quad & 1 \leq | x + iy - 2 - 3i | < 2 \\ \Leftrightarrow \quad & 1 \leq \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} < 2 \quad | \ (\ )^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 1 \leq (x-2)^2 + (y-3)^2 < 4 \end{aligned}$$

Das sind alle Punkte der komplexen Ebene, die zwischen den beiden Kreisen mit dem Mittelpunkt $M(2 \mid 3)$ und den Radien $r_1 = 1$ beziehungsweise $r_2 = 2$ liegen, wobei die Randpunkte des kleineren Kreises zur Lösungsmenge und die Randpunkte des größeren Kreises nicht zur Lösungsmenge gehören.



Aufgabe 92 c

Skizzieren Sie die Menge $M := \{ z \in \mathbb{C} \mid iz + i \cdot \overline{z} = 3 \}$ in der Gaußschen Zahlenebene.

Lösung:
Mit $z = x + iy$ gilt:

$$\begin{aligned} & iz + i\bar{z} = 3 \\ \Leftrightarrow\ & i(x+iy) + i(x-iy) = 3 \\ \Leftrightarrow\ & ix + i^2 y + ix - i^2 y = 3 \\ \Leftrightarrow\ & 2ix = 3 \end{aligned}$$

Dann ist die Lösungsmenge die leere Menge $M = \{\ \}$, da es keine komplexe Zahl $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ gibt, die diese Gleichung erfüllt.

Aufgabe 92 d

Skizzieren Sie die Menge $M := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \left| \frac{z-1}{z+1} \right| \geq 1 \right\}$ in der Gaußschen Zahlenebene.

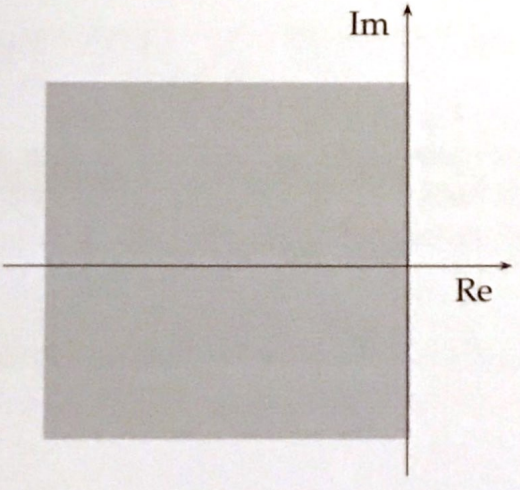
Lösung:
Mit $z = x + iy$ gilt:

$$\left| \frac{z-1}{z+1} \right| = \left| \frac{x+iy-1}{x+iy+1} \right| = \frac{|x-1+iy|}{|x+1+iy|} = \frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} \geq 1$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} \geq 1 && \mid \cdot \sqrt{(x+1)^2+y^2} \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{(x-1)^2+y^2} \geq \sqrt{(x+1)^2+y^2} && \mid (\ )^2 \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)^2+y^2 \geq (x+1)^2+y^2 && \mid -y^2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2-2x+1 \geq x^2+2x+1 && \mid -x^2+2x-1 \\ \Leftrightarrow\ & 0 \geq 4x && \mid :4 \\ \Leftrightarrow\ & 0 \geq x \end{aligned}$$

Dann ist die Lösungsmenge M die gesamte linke Halbebene der komplexen Ebene inklusive der imaginären Achse und lautet $M = \{ z \in \mathbb{C} \mid z = x + iy,\ x \leq 0 \wedge y \in \mathbb{R} \}$.



Aufgabe 93 a

Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \left| \frac{\mathrm{Re}(z)}{2} \right| \leq \frac{\mathrm{Im}(z)}{4} \right\}$ und beschreiben Sie diese verbal.

Lösung:

Sei $z = x + iy$. Dann gilt: $\left| \frac{\mathrm{Re}(x+iy)}{2} \right| \leq \frac{\mathrm{Im}(x+iy)}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \left| \frac{x}{2} \right| \leq \frac{y}{4} \quad (\star)$

1. Fall

Für $x \geq 0$ ist $|\frac{x}{2}| = \frac{x}{2}$ und die Ungleichung $(\star)$ wird zu $\frac{y}{4} \geq \frac{x}{2} \Leftrightarrow y \geq 2x$. Das sind alle Punkte die im ersten Quadranten der Gaußschen Zahlenebene oberhalb oder auf der Geraden $y = 2x$ liegen.
Dann lautet die erste Lösungsmenge. $L_1 := \{ z \in \mathbb{C} \mid x \geq 0 \wedge y \geq 2x \}$.

2. Fall

Für $x < 0$ ist $|\frac{x}{2}| = -\frac{x}{2}$ und die Ungleichung $(\star)$ wird zu $\frac{y}{4} \geq -\frac{x}{2} \Leftrightarrow y \geq -2x$. Das sind alle Punkte die im zweiten Quadranten der Gaußschen Zahlenebene oberhalb oder auf der Geraden $y = -2x$ liegen.
Dann lautet die zweite Lösungsmenge $L_2 := \{ z \in \mathbb{C} \mid x < 0 \wedge y \geq -2x \}$.

Die Lösungsmenge M ergibt sich jetzt aus der Vereinigung der beiden Mengen L_1 und L_2 zu $M = L_1 \cup L_2$.

Aufgabe 93 b

Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 1 \right\}$ und beschreiben Sie diese verbal.

Lösung:

Sei $z = x + iy$. Dann gilt

$$w := \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2 - i^2 y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\,\frac{y}{x^2+y^2}$$

und damit folgt:

$$\begin{aligned}
& \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{x}{x^2+y^2} = 1 && \mid \cdot (x^2+y^2) \\
\Leftrightarrow \quad & x = x^2 + y^2 && \mid -x \\
\Leftrightarrow \quad & 0 = x^2 - 1x + y^2 && \mid \text{binomische Ergänzung} \\
\Leftrightarrow \quad & 0 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + y^2 && \mid +\frac{1}{4} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2
\end{aligned}$$

Das sind alle Punkte in der komplexen Ebene, die auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt $M(\frac{1}{2} \mid 0)$ und Radius $R = \frac{1}{2}$ liegen.

Aufgabe 93 c

Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \;\middle|\; \frac{6}{|z|} - |z| = 1 \right\}$ und beschreiben Sie diese verbal.

Lösung:
Sei $z = x + iy$. Dann ist:

$$\begin{aligned} & \frac{6}{|z|} - |z| = 1 && | \cdot |z| \\ \Leftrightarrow \quad & 6 - |z|^2 = |z| && | + |z|^2 - 6 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = |z|^2 + |z| - 6 && | \; p, q \text{ - Formel} \\ \Leftrightarrow \quad & |z|_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} \\ \Leftrightarrow \quad & |z|_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Damit ergeben sich die zwei Lösungen $|z| = 2$ und $|z| = -3$. Die Lösung $|z| = -3$ entfällt, da der Betrag einer komplexen Zahl nicht negativ sein kann. Also ist nur die Lösung $|z| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$ zulässig. Das sind alle komplexen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene, die auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt $M(0 \mid 0)$ und dem Radius $R = 2$ liegen.

Aufgabe 93 d

Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \;\middle|\; \frac{z}{\overline{z}} = 1 \right\}$ und beschreiben Sie diese verbal.

Lösung:
Sei $z = x + iy$. Dann ist:

$$\begin{aligned} & \frac{z}{\overline{z}} = 1 && | \cdot \overline{z} \\ \Leftrightarrow \quad & x + iy = x - iy && | -x + iy \\ \Leftrightarrow \quad & i2y = 0 \end{aligned}$$

Der Imaginärteil von z muss also verschwinden, wobei der Realteil von z beliebig gewählt werden darf. Dann besteht die Lösungsmenge M aus allen komplexen Zahlen der Gaußschen Zahlenebene, außer $z = 0$, die auf der reellen Achse liegen.

Aufgabe 93 e

Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $M = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z + i| + |z - i| = 4 \}$ und beschreiben Sie diese verbal.

Lösung:
Sei $z = x + iy$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
& 4 = |z+i| + |z-i| \\
\Leftrightarrow \quad & 4 = |x+iy+i| + |x+iy-i| \\
\Leftrightarrow \quad & 4 = \sqrt{x^2+(y+1)^2} + \sqrt{x^2+(y-1)^2} \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{x^2+(y+1)^2} = 4 - \sqrt{x^2+(y-1)^2} \\
\Leftrightarrow \quad & x^2+(y+1)^2 = 16 - 8\sqrt{x^2+(y-1)^2} + x^2 + (y-1)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & (y+1)^2 - (y-1)^2 - 16 = -8\sqrt{x^2+(y-1)^2} \\
\Leftrightarrow \quad & y^2 + 2y + 1 - y^2 + 2y - 1 - 16 = -8\sqrt{x^2+(y-1)^2} \\
\Leftrightarrow \quad & 4y - 16 = -8\sqrt{x^2+(y-1)^2} \\
\Leftrightarrow \quad & 2 - \frac{1}{2}y = \sqrt{x^2+(y-1)^2} \\
\Leftrightarrow \quad & 4 - 2y + \frac{1}{4}y^2 = x^2 + (y-1)^2 \\
\Rightarrow \quad & 3 = x^2 + \frac{3}{4}y^2 \\
\Rightarrow \quad & 1 = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4}
\end{aligned}
$$

Dann besteht die Lösungsmenge M aus allen komplexen Zahlen, die in der Gaußschen Zahlenebene auf der Ellipse mit dem Mittelpunkt $M(0 \mid 0)$ und den beiden Halbachsen $a = \sqrt{3}$ und $b = 2$ liegen.

Aufgabe 93 f

Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $M = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z+1| < 2 \}$ und beschreiben Sie diese verbal.

Lösung:
Sei $z = x + iy$. Dann ist:

$$
\begin{aligned}
& |z+1| < 2 \\
\Leftrightarrow \quad & |x+iy+1| < 2 \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{(x+1)^2+y^2} < 2 \quad | \ (\ )^2 \\
\Leftrightarrow \quad & (x+1)^2 + y^2 < 4
\end{aligned}
$$

Dann besteht die Lösungsmenge M aus allen komplexen Zahlen, die in der Gaußschen Zahlenebene innerhalb des Kreises mit dem Mittelpunkt $M(0 \mid 0)$ und dem Radius $R = 2$ liegen, wobei die Randpunkte nicht zur Lösungsmenge gehören.

Aufgabe 93 g

Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $M = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-i| \geq |z+2+i| \}$ und beschreiben Sie diese verbal.

Lösung:
Sei $z = x+iy$. Dann ist:

$$
\begin{aligned}
& |z-i| \geq |z+2+i| \\
\Leftrightarrow \quad & |x+iy-i| \geq |x+iy+2+i| \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{x^2+(y-1)^2} \geq \sqrt{(x+2)^2+(y+1)^2} && |\,(\,)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2+(y-1)^2 \geq (x+2)^2+(y+1)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2+y^2-2y+1 \geq x^2+4x+4+y^2+2y+1 && |\,-x^2-y^2-4x+2y-5 \\
\Leftrightarrow \quad & -4x-4 \geq 4y && |\,:4 \\
\Leftrightarrow \quad & -x-1 \geq y
\end{aligned}
$$

Dann besteht die Lösungsmenge M aus allen komplexen Zahlen, die in der Gaußschen Zahlenebene unterhalb oder auf der Geraden $y = -x-1$ liegen.

Aufgabe 93 h

Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - e^{i\frac{\pi}{2}}| \geq 1 \right\}$ und beschreiben Sie diese verbal.

Lösung:
Sei $z = x+iy$. Dann ist:

$$
\begin{aligned}
& \left| z - e^{i\frac{\pi}{2}} \right| \geq 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \left| z - \left[\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + i \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} \right] \right| \geq 1 \\
\Leftrightarrow \quad & |x+iy-i| \geq 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{x^2+(y-1)^2} \geq 1 && |\,(\,)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2+(y-1)^2 \geq 1
\end{aligned}
$$

Dann besteht die Lösungsmenge M aus allen komplexen Zahlen, die in der Gaußschen Zahlenebene außerhalb oder auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt $M(0\,|\,1)$ und dem Radius $R = 1$ liegen.

Aufgabe 93 i

Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \left| \frac{2iz+4}{(1+i)z} \right|^2 \leq 3 \right\}$ und beschreiben Sie diese verbal.

Lösung:
Sei $z = x + iy$. Dann ist:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2iz+4}{(1+i)z} \right|^2 \leq 3 \\
\Leftrightarrow \quad & \left(\frac{|\,2i(x+iy)+4\,|}{|\,(1+i)(x+iy)\,|} \right)^2 \leq 3 \\
\Leftrightarrow \quad & \left(\frac{|\,2ix+2i^2y+4\,|}{|\,x+iy+ix+i^2y\,|} \right)^2 \leq 3 \\
\Leftrightarrow \quad & \left(\frac{|\,4-2y+i2x\,|}{|\,x-y+i(x+y)\,|} \right)^2 \leq 3 \\
\Leftrightarrow \quad & \left(\frac{\sqrt{(4-2y)^2+(2x)^2}}{\sqrt{(x-y)^2+(x+y)^2}} \right)^2 \leq 3 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{(4-2y)^2+(2x)^2}{(x-y)^2+(x+y)^2} \leq 3 \\
\Leftrightarrow \quad & 16-16y+4y^2+4x^2 \leq 6x^2+6y^2 \\
\Leftrightarrow \quad & 16 \leq 2x^2+2y^2+16y \\
\Leftrightarrow \quad & 8 \leq x^2+y^2+8y \\
\Leftrightarrow \quad & 8 \leq x^2+(y+4)^2-16 \\
\Leftrightarrow \quad & 24 \leq x^2+(y+4)^2
\end{aligned}$$

Dann besteht die Lösungsmenge M aus allen komplexen Zahlen, die in der Gaußschen Zahlenebene außerhalb oder auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt $M(0 \mid -4)$ und dem Radius $R = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ liegen.

Aufgabe 93 j

Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $M = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = |\,z\,| \}$ und beschreiben Sie diese verbal.

Lösung:
Sei $z = x + iy$. Dann ist:

$$\begin{aligned}
& \mathrm{Re}(z) = |\,z\,| \\
\Leftrightarrow \quad & x = \sqrt{x^2+y^2} && |\,(\,)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 = x^2+y^2 && |\,-x^2 \\
\Leftrightarrow \quad & 0 = y^2 && |\,\sqrt{} \\
\Leftrightarrow \quad & 0 = y
\end{aligned}$$

Die Lösungsmenge M besteht aus allen komplexen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene, für die der Imaginärteil verschwindet und der Realteil wegen $\mathrm{Re}(x+i0) = |x+i0|$ größer oder gleich null ist.

Aufgabe 93 k

Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $M = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |(2+i)(z-1)| \leq |1-2i|\}$ und beschreiben Sie diese verbal.

Lösung:
Sei $z = x+iy$. Dann ist:

$$
\begin{aligned}
& |(2+i)(z-1)| \leq |1-2i| \\
\Leftrightarrow \quad & |(2+i)(x+iy-1)| \leq |1-2i| \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{2^2+1^2}\sqrt{(x-1)^2+y^2} \leq \sqrt{1^2+(-2)^2} \quad |\,(\,)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & 5\left((x-1)^2+y^2\right) \leq 5 \quad |:5 \\
\Leftrightarrow \quad & (x-1)^2+y^2 \leq 1
\end{aligned}
$$

Dann besteht die Lösungsmenge M aus allen komplexen Zahlen, die in der Gaußschen Zahlenebene innerhalb oder auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt $M(1\,|\,0)$ und dem Radius $R=1$ liegen.

Aufgabe 93 l

Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $M = \left\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - e^{i\frac{\pi}{4}}| \geq 2\right\}$ und beschreiben Sie diese verbal.

Lösung:
Sei $z = x+iy$. Dann ist:

$$
\begin{aligned}
& \left|z - e^{i\frac{\pi}{4}}\right| \geq 2 \\
\Leftrightarrow \quad & \left|z - \Big[\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}} + i\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}}\Big]\right| \geq 2 \\
\Leftrightarrow \quad & \left|x+iy-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right| \geq 2 \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \geq 2 \,|\, \left|\,(\,)^2\right. \\
\Leftrightarrow \quad & \left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \geq 4
\end{aligned}
$$

Dann besteht die Lösungsmenge M aus allen komplexen Zahlen, die in der Gaußschen Zahlenebene außerhalb oder auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,\middle|\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ und dem Radius $R=2$ liegen.

Aufgabe 93 m

Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $M = \{ z \in \mathbb{C} \mid | (1+i)(z-1) | \leq | 1-i | \}$ und beschreiben Sie diese verbal.

Lösung:
Sei $z = x + iy$. Dann ist:

$$\begin{aligned}
& | (1+i)(z-1) | \leq | 1-i | \\
\Leftrightarrow \quad & | (1+i)(x+iy-1) | \leq | 1-i | \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{1^2+1^2}\sqrt{(x-1)^2+y^2} \leq \sqrt{1^2+(-1)^2} \quad | (\,)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & 2((x-1)^2+y^2) \leq 2 \quad | :2 \\
\Leftrightarrow \quad & (x-1)^2+y^2 \leq 1
\end{aligned}$$

Dann besteht die Lösungsmenge M aus allen komplexen Zahlen, die in der Gaußschen Zahlenebene innerhalb oder auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt $M(1 \mid 0)$ und dem Radius $R = 1$ liegen.

Aufgabe 93 n

Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $M = \{ z \in \mathbb{C} \mid | z^2 | + | z | = 0 \}$ und beschreiben Sie diese verbal.

Lösung:
Sei $z = x + iy$. Dann gilt

$$| z^2 | + | z | = 0 \quad \Leftrightarrow \quad | z |^2 + | z | = 0 \quad \Leftrightarrow \quad | z | \cdot (| z | + 1) = 0.$$

Dieses Produkt wird null, wenn einer der beiden Faktoren null ist. Dann ist $| z | = 0$ oder $| z | + 1 = 0$. Nur die erste Gleichung besitzt eine Lösung, nämlich $z = 0$. Dann besteht die Lösungsmenge dieser Gleichung nur aus dem einzigen Punkt $z = 0 + 0 \cdot i$.

Aufgabe 94 a

Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $M = \{ z \in \mathbb{C} \mid z = i + 2(1+i)t,\ t \in \mathbb{R} \}$ und beschreiben Sie diese verbal.

Lösung:
Sei $z = x + iy$. Dann gilt

$$z = i + 2(1+i)t \quad \Leftrightarrow \quad z = i + 2t + i2t \quad \Leftrightarrow \quad z = 2t + i(1+2t).$$

Also ist der Realteil $x = 2t$ und der Imaginärteil $y = 1 + 2t$. Löst man den Realteil nach dem Parameter t auf und setzt das in den Imaginärteil ein, dann erhält man die Gleichung $y = 1 + x$. Dann ergibt sich die Lösungsmenge M aus allen komplexen Zahlen der Gaußschen Zahlenebene die auf der Geraden $y = 1 + x$ liegen.

Aufgabe 94 b

Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \;\middle|\; \left|1 + \frac{1}{z}\right| \leq 1 \right\}$ und beschreiben Sie diese verbal.

Lösung:

Sei $z = x + iy$. Dann ist:

$$
\begin{aligned}
& \left|1 + \frac{1}{z}\right| \leq 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \left|\frac{z+1}{z}\right| \leq 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{|x+iy+1|}{|x+iy|} \leq 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1 && |\,(\,)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{(x+1)^2+y^2}{x^2+y^2} \leq 1 && |\cdot(x^2+y^2) \\
\Leftrightarrow \quad & (x+1)^2+y^2 \leq x^2+y^2 && |\,-x^2-y^2 \\
\Leftrightarrow \quad & 2x+1 \leq 0 && |\,-1 \\
\Leftrightarrow \quad & 2x \leq -1 && |\,:2 \\
\Leftrightarrow \quad & x \leq -\frac{1}{2} \quad \wedge \quad y \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Dann besteht die Lösungsmenge M aus allen komplexen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene, die links oder auf der Geraden $x = -\frac{1}{2}$ liegen.

Aufgabe 94 c

Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\} \;\middle|\; \mathrm{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) \geq 1 \right\}$ und beschreiben Sie diese verbal.

Lösung:

Sei $z = x + iy$. Dann gilt zunächst

$$
\begin{aligned}
w := \frac{z-1}{z+1} &= \frac{x+iy-1}{x+iy+1} = \frac{x-1+iy}{x+1+iy} \cdot \frac{x+1-iy}{x+1-iy} \\
&= \frac{x^2+x-ixy-x-1+iy+ixy+iy-i^2y^2}{(x+1)^2-i^2y^2} = \frac{x^2+y^2-1+i2y}{(x+1)^2+y^2} \\
&= \frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2} + i\,\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}.
\end{aligned}
$$

Weiter ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2} \geq 1 && \left| \cdot \left((x+1)^2+y^2\right)\right. \\ \Leftrightarrow \quad & x^2+y^2-1 \geq x^2+2x+1+y^2 && \left| -x^2-y^2-1\right. \\ \Leftrightarrow \quad & -1 \geq x \quad \wedge \quad y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Das sind alle komplexen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene, die links oder auf der Geraden $x = -1$ liegen.

Aufgabe 94 d

Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathrm{Re}\left(\frac{z+i}{i+1}\right) \leq \frac{1}{2} \right\}$ und beschreiben Sie diese verbal.

Lösung:

Sei $z = x + iy$. Dann gilt zunächst

$$w := \frac{z+i}{i+1} = \frac{x+iy+i}{i+1} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{x+iy+i-ix-i^2y-i^2}{1-i^2} = \frac{x+y+1}{2} + i\frac{y-x+1}{2}.$$

Die Bedingung $\mathrm{Re}(w) \leq \frac{1}{2}$ ist äquivalent zu:

$$\begin{aligned} & \frac{x+y+1}{2} \leq \frac{1}{2} && \left| \cdot 2\right. \\ \Leftrightarrow \quad & x+y+1 \leq 1 && \left| -x-1\right. \\ \Leftrightarrow \quad & y \leq -x \end{aligned}$$

Das sind alle komplexen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene, die unterhalb oder auf der Geraden $y = -x$ liegen.

Aufgabe 94 e

Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \;\middle|\; \mathrm{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = r,\ r \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \right\}$ und beschreiben Sie diese verbal.

Lösung:

Sei $z = x + iy$. Dann gilt zunächst

$$\begin{aligned} w := \frac{z+1}{z-1} &= \frac{x+iy+1}{x+iy-1} = \frac{x+1+iy}{x-1+iy} \cdot \frac{x-1-iy}{x-1-iy} \\ &= \frac{x^2-x-ixy+x-1-iy+ixy-iy-i^2y^2}{(x-1)^2-i^2y^2} = \frac{x^2+y^2-1-i2y}{(x-1)^2+y^2} \\ &= \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2} - i\frac{2y}{(x-1)^2+y^2}. \end{aligned}$$

Die Bedingung $\mathrm{Re}(w) = r$ ist äquivalent zu:

$$\frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2} = r \qquad | \cdot \left((x-1)^2+y^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2+y^2-1 = r\left((x-1)^2+y^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2+y^2-1 = rx^2-2rx+r+ry^2 \qquad | -rx^2-ry^2+2rx+1$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2(1-r)+y^2(1-r)+2rx = r+1 \qquad | :(1-r)$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2+y^2+\frac{2r}{1-r}x = \frac{1+r}{1-r} \qquad | \text{ binomische Ergänzung}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x+\frac{r}{1-r}\right)^2+y^2-\left(\frac{r}{1-r}\right)^2 = \frac{1+r}{1-r} \qquad | +\left(\frac{r}{1-r}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x+\frac{r}{1-r}\right)^2+y^2 = \frac{1+r}{1-r}+\frac{r^2}{(1-r)^2} \qquad | \text{ Hauptnenner bilden}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x+\frac{r}{1-r}\right)^2+y^2 = \frac{(1-r)(1+r)+r^2}{(1-r)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x+\frac{r}{1-r}\right)^2+y^2 = \frac{1-r^2+r^2}{(1-r)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x+\frac{r}{1-r}\right)^2+y^2 = \frac{1}{(1-r)^2}$$

Dann besteht die Lösungsmenge M aus allen komplexen Zahlen, die in der Gaußschen Zahlenebene auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt $M\left(-\frac{r}{1-r} \mid 0\right)$ und dem Radius $R = \frac{1}{|1-r|}$ liegen.

Aufgabe 94 f

Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $M = \{ z \in \mathbb{C} \mid 2 = |z-1| \}$ und beschreiben Sie diese verbal.

Lösung:

Sei $z = x+iy$. Dann gilt

$$|z-1| = |x+iy-1| = |x-1+iy| = \sqrt{(x-1)^2+y^2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2+y^2 = 4.$$

Dann besteht die Lösungsmenge M aus allen komplexen Zahlen, die in der Gaußschen Zahlenebene auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt $M(1 \mid 0)$ und dem Radius $R = 2$ liegen.

Aufgabe 94 g

Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $M = \{ z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| \leq 4 \}$ und beschreiben Sie diese verbal.

Lösung:

Sei $z = x+iy$. Dann gilt:

$$|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad |x| + |y| \leq 4 \quad (\star)$$

1. Fall

Für $x, y \geq 0$ ist $|x| = x$ und $|y| = y$. Aus der Ungleichung $(\star)$ folgt in diesem Fall $x + y \leq 4 \Leftrightarrow y \leq -x + 4$. Die erste Lösungsmenge besteht damit aus allen komplexen Zahlen, die im ersten Quadranten der Gaußschen Zahlenebene unterhalb oder auf der Geraden $y = -x + 4$ liegen.

$$L_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge y \leq -x + 4\}$$

2. Fall

Für $x < 0$ und $y \geq 0$ ist $|x| = -x$ und $|y| = y$. Aus der Ungleichung $(\star)$ folgt in diesem Fall $-x + y \leq 4 \Leftrightarrow y \leq x + 4$. Die zweite Lösungsmenge besteht aus allen komplexen Zahlen, die im zweiten Quadranten der Gaußschen Zahlenebene unterhalb oder auf der Geraden $y = x + 4$ liegen.

$$L_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid x < 0 \wedge y \geq 0 \wedge y \leq x + 4\}$$

3. Fall

Für $x < 0$ und $y < 0$ ist $|x| = -x$ und $|y| = -y$. Aus der Ungleichung $(\star)$ folgt in diesem Fall $-x - y \leq 4 \Leftrightarrow y \geq -x - 4$. Die dritte Lösungsmenge besteht aus allen komplexen Zahlen, die im dritten Quadranten der Gaußschen Zahlenebene oberhalb oder auf der Geraden $y = -x - 4$ liegen.

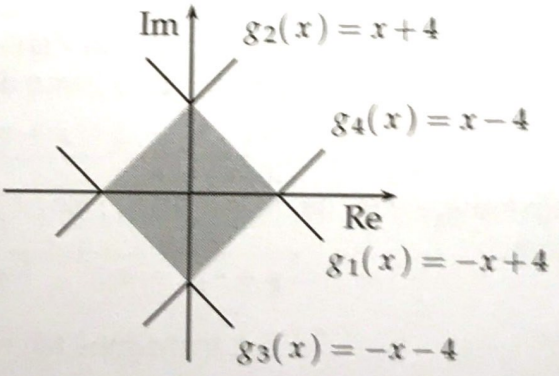
$$L_3 := \{z \in \mathbb{C} \mid x < 0 \wedge y < 0 \wedge y \geq -x - 4\}$$

4. Fall

Für $x \geq 0$ und $y < 0$ ist $|x| = x$ und $|y| = -y$. Aus der Ungleichung $(\star)$ folgt in diesem Fall $x - y \leq 4 \Leftrightarrow y \geq x - 4$. Dann besteht die vierte Lösungsmenge aus allen komplexen Zahlen, die im vierten Quadranten der Gaußschen Zahlenebene oberhalb oder auf der Geraden $y = x - 4$ liegen.

$$L_4 := \{z \in \mathbb{C} \mid x \geq 0 \wedge y < 0 \wedge y \geq x - 4\}$$

Die Vereinigung der vier Mengen $L_1, \ldots, L_4$ ergibt schließlich die Lösungsmenge M, die in der folgenden Abbildung dargestellt ist.



Aufgabe 94 h

Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $M = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z+1-i| \leq 2 \}$ und beschreiben Sie diese verbal.

Lösung:

Sei $z = x + iy$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & |z+1-i| \leq 2 \\ \Leftrightarrow \quad & |x+iy+1-i| \leq 2 \\ \Leftrightarrow \quad & |x+1+i(y-1)| \leq 2 \\ \Leftrightarrow \quad & \sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2} \leq 2 \quad | \,(\,)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & (x+1)^2+(y-1)^2 \leq 4 \end{aligned}$$

Dann besteht die Lösungsmenge M aus allen komplexen Zahlen, die in der Gaußschen Zahlenebene innerhalb oder auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt $M(-1 \mid 1)$ und dem Radius $R = 2$ liegen.

Aufgabe 94 i

Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $M = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = |z| \}$ und beschreiben Sie diese verbal.

Lösung:

Sei $z = x + iy$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \mathrm{Im}(z) = |z| \\ \Leftrightarrow \quad & y = \sqrt{x^2+y^2} \quad | \,(\,)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & y^2 = x^2+y^2 \quad | -y^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = x^2 \quad | \sqrt{\ } \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = x \quad \wedge \quad y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge M besteht aus allen komplexen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene, für die der Realteil verschwindet und der Imaginärteil wegen $\mathrm{Im}(0+iy) = |0+iy|$ größer oder gleich null ist.

Aufgabe 94 j

Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $M = \{ z \in \mathbb{C} \mid 1 > |z+1-2i| \}$ und beschreiben Sie diese verbal.

Lösung:

Sei $z = x + iy$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
& |z+1-2i| < 1 \\
\Leftrightarrow \quad & |x+iy+1-2i| < 1 \\
\Leftrightarrow \quad & |x+1+i(y-2)| < 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2} < 1 \quad | \,(\,)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & (x+1)^2+(y-2)^2 < 1
\end{aligned}
$$

Dann besteht die Lösungsmenge M aus allen komplexen Zahlen, die in der Gaußschen Zahlenebene innerhalb des Kreises mit dem Mittelpunkt $M(-1 \mid 2)$ und dem Radius $R = 1$ liegen.

Aufgabe 94 k

Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $M = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}((1+2i)z) = 0 \}$ und beschreiben Sie diese verbal.

Lösung:

Sei $z = x + iy$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{Im}((1+2i)z) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \mathrm{Im}((1+2i)(x+iy)) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \mathrm{Im}(x-2y+i(2x+y)) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 2x+y = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & y = -2x
\end{aligned}
$$

Dann besteht die Lösungsmenge M aus allen komplexen Zahlen, die in der Gaußschen Zahlenebene auf der Geraden $y = -2x$ liegen.

Aufgabe 94 l

Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $M = \{ z \in \mathbb{C} \mid |4z+3-i| \leq 5 \}$ und beschreiben Sie diese verbal.

Lösung:

Sei $z = x + iy$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
& |4z+3-i| \leq 5 \\
\Leftrightarrow \quad & |4(x+iy)+3-i| \leq 5 \\
\Leftrightarrow \quad & |4x+3+i(4y-1)| \leq 5 \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{(4x+3)^2+(4y-1)^2} \leq 5 \quad | \,(\,)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & (4x+3)^2+(4y-1)^2 \leq 25 \\
\Leftrightarrow \quad & 16x^2+24x+9+16y^2-8y+1 \leq 25 \quad | -10 \\
\Leftrightarrow \quad & 16x^2+24x+16y^2-8y \leq 15 \quad | : 16 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2+\frac{3}{2}x+y^2-\frac{1}{2}y \leq \frac{15}{16} \quad | \text{ binomische Ergänzung}
\end{aligned}
$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x+\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \left(y-\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} \le \frac{15}{16} \quad \Big| +\frac{10}{16}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x+\frac{3}{4}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{4}\right)^2 \le \frac{25}{16}$$

Dann besteht die Lösungsmenge M aus allen komplexen Zahlen, die in der Gaußschen Zahlenebene innerhalb oder auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt $M\left(-\frac{3}{4} \,\middle|\, \frac{1}{4}\right)$ und dem Radius $R = \frac{5}{4}$ liegen.

Aufgabe 94 m

Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \,\middle|\, \mathrm{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \ge 2 \right\}$ und beschreiben Sie diese verbal.

Lösung:

Sei $z = x + iy$. Dann gilt zunächst

$$\begin{aligned} w := \frac{z+1}{z-1} &= \frac{x+iy+1}{x+iy-1} = \frac{x+1+iy}{x-1+iy} \cdot \frac{x-1-iy}{x-1-iy} \\ &= \frac{x^2 - x - ixy + x - 1 - iy + ixy - iy - i^2y^2}{(x-1)^2 - i^2y^2} = \frac{x^2+y^2-1-i2y}{(x-1)^2+y^2} \\ &= \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2} - i\,\frac{2y}{(x-1)^2+y^2}. \end{aligned}$$

Die Bedingung $\mathrm{Re}(w) \ge 2$ ist dann äquivalent zu:

$$\begin{aligned} & \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2} \ge 2 && \Big| \cdot \left((x-1)^2+y^2\right) \\ \Leftrightarrow \quad & x^2+y^2-1 \ge 2\left((x-1)^2+y^2\right) \\ \Leftrightarrow \quad & x^2+y^2-1 \ge 2x^2 - 4x + 2 + 2y^2 && | -2x^2 - 2y^2 + 4x + 1 \\ \Leftrightarrow \quad & -x^2 - y^2 + 4x \ge 3 && | : (-1) \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - 4x + y^2 \le -3 && | \text{ binomische Ergänzung} \\ \Leftrightarrow \quad & (x-2)^2 - 4 + y^2 \le -3 && | +4 \\ \Leftrightarrow \quad & (x-2)^2 + y^2 \le 1 \end{aligned}$$

Dann besteht die Lösungsmenge M aus allen komplexen Zahlen, die in der Gaußschen Zahlenebene innerhalb oder auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt $M(2 \mid 0)$ und dem Radius $R = 1$ liegen.

Aufgabe 95 a

Bestimmen Sie sämtliche Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $-3\,\overline{z} + z - 2iz = 4i$.

Lösung:
Sei $z = x + iy$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & -3\,\overline{z} + z - i2z = 4i \\ \Leftrightarrow \quad & -3(x - iy) + x + iy - i2(x + iy) = 4i \\ \Leftrightarrow \quad & -3x + i3y + x + iy - i2x - i^2 2y = 4i \\ \Leftrightarrow \quad & -2x + 2y + i(4y - 2x) = 0 + i4 \end{aligned}$$

Der Vergleich von Real- und Imaginärteil auf beiden Seiten der Gleichung liefert das lineare Gleichungssystem:

$$I)\ -2x + 2y = 0 \qquad II)\ 4y - 2x = 4$$

Aus Gleichung $I)$ folgt sofort $x = y$. Setzt man das in die Gleichung $II)$ ein, dann ergibt sich $2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$ und damit $y = 2$. Also lautet die Lösung der Gleichung $z = 2 + 2i$.

Aufgabe 95 b

Bestimmen Sie sämtliche Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^2 - i\,\overline{z} = 0$.

Lösung:
Sei $z = x + iy$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & z^2 - i\overline{z} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (x + iy)^2 - i(x - iy) = 0 + i \cdot 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + i2xy + i^2 y^2 - ix + i^2 y = 0 + i \cdot 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - y^2 - y + i(2xy - x) = 0 + i \cdot 0 \end{aligned}$$

Der Vergleich von Real- und Imaginärteil auf beiden Seiten der Gleichung liefert das nichtlineare Gleichungssystem:

$$I)\ x^2 - y^2 - y = 0 \qquad II)\ 2xy - x = 0$$

Die zweite Gleichung lässt sich faktorisieren zu $x(2y - 1) = 0$. Dieses Produkt ist null, wenn einer der beiden Faktoren null ist. Das ist genau dann der Fall, wenn $x = 0$ oder $y = \frac{1}{2}$ gilt. Für den Fall $x = 0$ erhält man durch Einsetzen in die erste Gleichung:

$$-y^2 - y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y(-y - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = 0 \ \vee\ y_2 = -1$$

Damit sind die ersten zwei Lösungen $z_1 = 0$ und $z_2 = -i$ gefunden. Für den Fall $y = \frac{1}{2}$ erhält man durch Einsetzen in die erste Gleichung:

$$x^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Damit ergeben sich die dritte und vierte Lösung zu $z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ und $z_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

Aufgabe 95 c

Bestimmen Sie sämtliche Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $2z\overline{z} = 3$.

Lösung:

Sei $z = x + iy$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & 2z\overline{z} = 3 \\ \Leftrightarrow \quad & 2(x+iy)(x-iy) = 3 \\ \Leftrightarrow \quad & 2(x^2 - i^2 y^2) = 3 \\ \Leftrightarrow \quad & 2(x^2 + y^2) = 3 \quad | : 2 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + y^2 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Dann besteht die Lösungsmenge aus allen komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, die in der Gaußschen Zahlenebene auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt $M(0 \mid 0)$ und dem Radius $R = \sqrt{\frac{3}{2}}$ liegen.

Aufgabe 95 d

Bestimmen Sie sämtliche Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $\frac{5}{2}\overline{z} + 3i\overline{z} + \frac{1}{2}z - 2iz = 7 - 5i$.

Lösung:

Sei $z = x + iy$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{5}{2}\overline{z} + 3i\overline{z} + \frac{1}{2}z - 2iz = 7 - 5i \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{5}{2}(x-iy) + 3i(x-iy) + \frac{1}{2}(x+iy) - 2i(x+iy) = 7 - 5i \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{5}{2}x - i\frac{5}{2}y + i3x - i^2 3y + \frac{1}{2}x + i\frac{1}{2}y - i2x - i^2 2y = 7 - 5i \\ \Leftrightarrow \quad & 3x + 5y + i(x - 2y) = 7 - 5i \end{aligned}$$

Der Vergleich von Real- und Imaginärteil auf beiden Seiten der Gleichung liefert das lineare Gleichungssystem:

$$I)\ 3x + 5y = 7 \qquad II)\ x - 2y = -5$$

Aus der zweiten Gleichung erhält man sofort $x = 2y - 5$. Setzt man das in die erste Gleichung ein, dann ergibt sich

$$3(2y-5) + 5y = 7 \quad \Leftrightarrow \quad 11y = 22 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2.$$

$y = 2$ in $x = 2y - 5$ eingesetzt ergibt $x = -1$. Damit lautet die gesuchte Lösung der Gleichung $z = -1 + 2i$.

Aufgabe 95 e

Bestimmen Sie sämtliche Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $|z| = z \cdot \bar{z}$.

Lösung:

Sei $z = x + iy$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
& |z| = z \cdot \bar{z} \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{x^2+y^2} = (x+iy)(x-iy) \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{x^2+y^2} = x^2 - i^2 y^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{x^2+y^2} = x^2 + y^2 && | \ (\ )^2 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2+y^2 = (x^2+y^2)^2 && | \ -(x^2+y^2) \\
\Leftrightarrow \quad & 0 = (x^2+y^2)^2 - (x^2+y^2) && | \text{ faktorisieren} \\
\Leftrightarrow \quad & 0 = (x^2+y^2)(x^2+y^2-1)
\end{aligned}
$$

Das Produkt ist null, wenn einer der beiden Faktoren null ist. Der Faktor x^2+y^2 kann nur für $x = 0$ und $y = 0$ verschwinden. Dann ist die erste Lösung $z_1 = 0$. Für den zweiten Faktor gilt $x^2+y^2-1 = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 1$. Das sind alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, die in der Gaußschen Zahlenebene auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt $M(0\,|\,0)$ und dem Radius $R = 1$ liegen. Insgesamt erhält man für die Gleichung also die Lösungsmenge $L = \{ z \in \mathbb{C} \mid z = 0 \ \vee \ x^2+y^2 = 1 \}$.

Aufgabe 95 f

Bestimmen Sie sämtliche Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^2 + \bar{z} + z = 1$.

Lösung:

Sei $z = x + iy$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
& z^2 + \bar{z} + z = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & (x+iy)^2 + x - iy + x + iy = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 + 2ixy + i^2 y^2 + 2x = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 - y^2 + 2x + i2xy = 1 + i \cdot 0
\end{aligned}
$$

Der Vergleich von Real- und Imaginärteil auf beiden Seiten der Gleichung liefert das nichtlineare Gleichungssystem:

$$I) \ x^2 - y^2 + 2x = 1 \qquad II) \ 2xy = 0$$

Die zweite Gleichung wird für $x = 0$ oder $y = 0$ erfüllt. Setzt man $x = 0$ in die erste Gleichung ein, dann ergibt $-y^2 = 1$ einen Widerspruch. Setzt man $y = 0$ in die erste Gleichung ein, dann folgt mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen

$$x^2 + 2x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Für $y = 0$ ergeben sich damit die beiden reellen Lösungen $z_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$.

Aufgabe 96

Bestimmen Sie die Lösungsmenge in $\mathbb{C}$ für die Gleichung $z^2 - 2z + 1 - 8i = 0$ und geben Sie die Lösungen in der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an.

Hinweis: $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Lösung:

Zunächst sei $w := 8i$. Dann ist der Betrag $|w| = 8$ und der Phasenwinkel $\varphi = \frac{\pi}{2}$, weil w auf der positiven imaginären Achse in der Gaußschen Zahlenebene liegt. In der Exponentialdarstellung lautet w dann $w = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$. Die Gleichung $z^2 - 2z + 1 - 8i = 0$ lässt sich nun mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen lösen. Diese liefert die Lösungen $z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 1 + 8i} = 1 \pm \sqrt{8i}$. Mit der Hilfsvariablen w folgt

$$z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{8e^{i\frac{\pi}{2}}} = 1 \pm 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 \pm 2\sqrt{2}\left[\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}} + i\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}}\right]$$

$$= 1 \pm 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \Rightarrow \quad z_1 = 3 + 2i \ \vee \ z_2 = -1 - 2i.$$

Aufgabe 97 a

Lösen Sie die quadratische Gleichung $z^2 = 4z - 8$ in $\mathbb{C}$ und geben Sie die Lösung in den Formen $z = x + iy$ und $z = r \cdot e^{i\varphi}$ an $(x, y \in \mathbb{R} \quad \varphi \in [0, 2\pi])$.

Lösung:

Mithilfe der p, q - Formel ergeben sich aus $z^2 - 4z + 8 = 0$ die Lösungen

$$z_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 8} = 2 \pm \sqrt{-4} = 2 \pm 2i.$$

Dann sind $z_1 = 2 + 2i$ und $z_2 = 2 - 2i$ die zwei zueinander konjugiert komplexen Lösungen dieser Gleichung in algebraischer Form.

Für z_1 ist der Betrag $|z_1| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ und der Phasenwinkel $\varphi = \frac{\pi}{4}$, da z_1 auf der Winkelhalbierenden im ersten Quadranten der Gaußschen Zahlenebene liegt. Damit sind $z_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ und $z_2 = \overline{z_1} = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$.

Aufgabe 97 b

Lösen Sie die quadratische Gleichung $z^2 + \sqrt{3} \cdot z + 3 = 0$ in $\mathbb{C}$ und geben Sie die Lösung in den Formen $z = x + iy$ und $z = r \cdot e^{i\varphi}$ an $(x, y \in \mathbb{R} \quad \varphi \in [0, 2\pi])$.

Lösung:

Mithilfe der p, q - Formel ergeben sich für $z^2 + \sqrt{3} \cdot z + 3 = 0$ die Lösungen

$$z_{1,2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{12}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{3}{2}i.$$

Dann sind $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ und $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$ die zwei zueinander konjugiert komplexen Lösungen dieser Gleichung in algebraischer Form.

Für z_1 ist der Betrag $|z_1| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{3}$ und der Phasenwinkel $\varphi = \arctan\left(\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + \pi = \arctan(-\sqrt{3}) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$. Damit lauten die Lösungen in der Exponentialform $z_1 = \sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$ und $z_2 = \overline{z_1} = \sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{3}e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

Aufgabe 97 c

Lösen Sie die quadratische Gleichung $z^2 - 2\left(z - \frac{2}{3}\right) = 0$ in $\mathbb{C}$ und geben Sie die Lösung in den Formen $z = x + iy$ und $z = r \cdot e^{i\varphi}$ an $(x, y \in \mathbb{R} \quad \varphi \in [0, 2\pi])$.

Lösung:

Mithilfe der p, q - Formel ergeben sich für $z^2 - 2\left(z - \frac{2}{3}\right) = z^2 - 2z + \frac{4}{3} = 0$ die Lösungen

$$z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{3}} = 1 \pm \sqrt{-\frac{1}{3}} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}i.$$

Dann sind $z_1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}i$ und $z_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}i$ die zwei zueinander konjugiert komplexen Lösungen dieser Gleichung in algebraischer Form.

Für z_1 ist der Betrag $|z_1| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ und der Phasenwinkel $\varphi = \arctan\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1}\right) = \frac{\pi}{6}$. Damit sind $z_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}$ und $z_2 = \overline{z_1} = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{11\pi}{6}}$.

Aufgabe 98 a

Bestimmen Sie von der quadratischen Gleichung $z^2 + (1 - 2i)z - 2i = 0$ sämtliche Lösungen $z \in \mathbb{C}$.

Lösung:

Mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen ergibt sich zunächst

$$z_{1,2} = -\frac{1}{2} + i \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} - i\right)^2 + 2i} = -\frac{1}{2} + i \pm \sqrt{\frac{1}{4} - i + i^2 + 2i} = -\frac{1}{2} + i \pm \sqrt{-\frac{3}{4} + i}.$$

Sei $w^2 := (a + ib)^2 = a^2 - b^2 + i2ab = -\frac{3}{4} + i$. Dann liefert der Vergleich von Real- und Imaginärteil auf beiden Seiten der Gleichung das nichtlineare Gleichungssystem:

$$I)\ a^2 - b^2 = -\frac{3}{4} \qquad II)\ 2ab = 1$$

Aus Gleichung $II)$ folgt $b = \frac{1}{2a}$. Eingesetzt in Gleichung $I)$ liefert dann:

$$a^2 - \left(\frac{1}{2a}\right)^2 = -\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 - \frac{1}{4a^2} = -\frac{3}{4} \qquad | \cdot 4a^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 4a^4 - 1 = -3a^2 \qquad | +3a^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 4a^4 + 3a^2 - 1 = 0 \qquad | : 4$$

$$\Leftrightarrow \quad a^4 + \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4} = 0 \qquad | \text{ binomische Ergänzung}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(a^2 + \frac{3}{8}\right)^2 - \frac{9}{64} - \frac{1}{4} = 0 \qquad | +\frac{25}{64}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(a^2 + \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{25}{64} \qquad | \sqrt{\ }$$

$$\Leftrightarrow \quad a_{1,2}^2 + \frac{3}{8} = \pm\sqrt{\frac{25}{64}} \qquad | -\frac{3}{8}$$

$$\Leftrightarrow \quad a_{1,2}^2 = -\frac{3}{8} \pm \frac{5}{8}$$

Da $a_{1,2}^2 > 0$ sein muss, kommt nur die Lösung $a^2 = \frac{1}{4}$ infrage. Damit ergibt sich $a = \frac{1}{2}$ und $b = \frac{1}{2a} = 1$. Die Lösung der obigen quadratischen Gleichung ist mit $w = \frac{1}{2} + i$

$$z_{1,2} = -\frac{1}{2} + i \pm \sqrt{w^2} = -\frac{1}{2} + i \pm w = -\frac{1}{2} + i \pm \left(\frac{1}{2} + i\right) \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = 2i \ \vee \ z_2 = -1.$$

Aufgabe 98 b

Bestimmen Sie von der quadratischen Gleichung $z^2 - 2iz + 8 = 0$ sämtliche Lösungen $z \in \mathbb{C}$.

Lösung:

Mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen ergibt sich

$$z_{1,2} = i \pm \sqrt{(-i)^2 - 8} = i \pm \sqrt{-9} = i \pm 3\sqrt{-1} = i \pm 3i.$$

Also sind $z_1 = 4i$ und $z_2 = -2i$ die gesuchten Lösungen.

Aufgabe 98 c

Bestimmen Sie von der quadratischen Gleichung $z^2 - z + iz - i = 0$ sämtliche Lösungen $z \in \mathbb{C}$.

Lösung:

Zunächst betrachte man die komplexe Zahl $w := \frac{1}{2}i$ und formt diese in die Exponentialform um. Der Betrag von w ist $|w| = \frac{1}{2}$ und der Phasenwinkel $\varphi = \frac{\pi}{2}$, da die komplexe Zahl w auf der positiven imaginären Achse in der Gaußschen Zahlenebene liegt. Dann ist $w = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$. Für die Gleichung $z^2 + (i-1)z - i = 0$ ergibt sich mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{i}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + i} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}i^2 - \frac{1}{2}i + \frac{1}{4} + i} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2}i}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \pm \sqrt{w} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}} + i\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}}\Big] = \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \pm \left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right).$$

Also lauten die Lösungen $z_1 = 1$ und $z_2 = -i$.

Aufgabe 98 d

Bestimmen Sie von der quadratischen Gleichung $z^2(1+i) = 2z$ sämtliche Lösungen $z \in \mathbb{C}$.

Lösung:

$$z^2(1+i) - 2z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z[z(1+i) - 2] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = 0 \ \vee \ z(1+i) - 2 = 0$$

Aus $z(1+i) - 2 = 0$ ergibt sich die zweite Lösung zu

$$z_2 = \frac{2}{1+i} = \frac{2}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{2-2i}{1-i^2} = \frac{2-2i}{2} = 1 - i.$$

Aufgabe 98 e

Bestimmen Sie von der quadratischen Gleichung $iz^2 + (2+i)z = i - 1$ sämtliche Lösungen $z \in \mathbb{C}$.

Lösung:

$$\begin{aligned} & i - 1 = iz^2 + (2+i)z && | \cdot(-i) \\ \Leftrightarrow \quad & 1 + i = z^2 + (1-2i)z && | -1 - i \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = z^2 + (1-2i)z - 1 - i \ | \ p, q\text{- Formel} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad z_{1,2} = -\frac{1}{2} + i \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} - i\right)^2 + 1 + i} = -\frac{1}{2} + i \pm \sqrt{\frac{1}{4} - i + i^2 + 1 + i}$$

$$= -\frac{1}{2} + i \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2} + i \pm \frac{1}{2}$$

Dann sind die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung $z_1 = i$ und $z_2 = -1 + i$.

Aufgabe 98 f

Bestimmen Sie von der quadratischen Gleichung $z^2 - 2z + 5 = 0$ sämtliche Lösungen $z \in \mathbb{C}$.

Lösung:
Anwendung der p, q - Formel ergibt $z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm \sqrt{-4} = 1 \pm 2i$. Dann lauten die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung $z_1 = 1 + 2i$ und $z_2 = 1 - 2i$.

Aufgabe 98 g

Bestimmen Sie von der quadratischen Gleichung $z^2 + (1+i)z + 2 - i = 0$ sämtliche Lösungen $z \in \mathbb{C}$.

Lösung:
Mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen ergibt sich zunächst

$$z_{1,2} = -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right)^2 - 2 + i} = -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{4}i^2 - 2 + i}$$
$$= -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2} \pm \sqrt{-2 + \frac{3}{2}i}.$$

Sei $w^2 := (a + ib)^2 = a^2 - b^2 + i2ab = -2 + \frac{3}{2}i$. Dann liefert der Vergleich von Real- und Imaginärteil auf beiden Seiten der Gleichung das nichtlineare Gleichungssystem:

$$I)\ a^2 - b^2 = -2 \qquad II)\ 2ab = \frac{3}{2}$$

Aus Gleichung $II)$ folgt $b = \frac{3}{4a}$. Eingesetzt in Gleichung $I)$ liefert dann:

$$a^2 - \left(\frac{3}{4a}\right)^2 = -2$$
$$\Leftrightarrow \quad a^2 - \frac{9}{16a^2} = -2 \qquad | \cdot 16a^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 16a^4 - 9 = -32a^2 \qquad | +32a^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 16a^4 + 32a^2 - 9 = 0 \qquad | : 16$$
$$\Leftrightarrow \quad a^4 + 2a^2 - \frac{9}{16} = 0 \qquad | \text{ binomische Ergänzung}$$
$$\Leftrightarrow \quad (a^2+1)^2 - 1 - \frac{9}{16} = 0 \qquad | +\frac{25}{16}$$
$$\Leftrightarrow \quad (a^2+1)^2 = \frac{25}{16} \qquad | \sqrt{\ }$$
$$\Leftrightarrow \quad a_{1,2}^2 + 1 = \pm\sqrt{\frac{25}{16}} \qquad | -1$$
$$\Leftrightarrow \quad a_{1,2}^2 = -1 \pm \frac{5}{4}$$

Da $a_{1,2}^2 > 0$ sein muss, kommt nur die Lösung $a^2 = \frac{1}{4}$ infrage. Damit ist dann $a = \frac{1}{2}$ und $b = \frac{3}{4a} = \frac{3}{2}$. Die Lösung der quadratischen Gleichung ergibt sich mit $w = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ zu

$$z_{1,2} = -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2} \pm \sqrt{w^2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \pm w = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \pm \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right).$$

Also ist $z_1 = i$ oder $z_2 = -1 - 2i$.

Aufgabe 98 h

Bestimmen Sie von der quadratischen Gleichung $z^2 + 6z + 2i + 9 = 0$ sämtliche Lösungen $z \in \mathbb{C}$.

Lösung:

Zunächst betrachte man die komplexe Zahl $w := -2i$ und formt diese in die Exponentialform um. Der Betrag von w ist $|w| = 2$ und der Phasenwinkel $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, da die komplexe Zahl w auf der negativen imaginären Achse in der Gaußschen Zahlenebene liegt. Dann ist $w = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$. Mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen folgt

$$z_{1,2} = -3 \pm \sqrt{3^2 - 2i - 9} = -3 \pm \sqrt{-2i} = -3 \pm \sqrt{w} = -3 \pm \sqrt{2e^{-i\frac{\pi}{2}}} = -3 \pm \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$
$$= -3 \pm \sqrt{2}\left[\underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}} + i\underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}_{=-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right] = -3 \pm \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3 \pm (1 - i).$$

Also lauten die Lösungen der quadratischen Gleichung $z_1 = -2 - i$ und $z_2 = -4 + i$.

Aufgabe 98 i

Bestimmen Sie von der quadratischen Gleichung $z^2 - 4z + 5 = 0$ sämtliche Lösungen $z \in \mathbb{C}$.

Lösung:

Anwendung der p, q - Formel ergibt $z_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 5} = 2 \pm \sqrt{-1} = 2 \pm i$. Also lauten die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung $z_1 = 2 + i$ und $z_2 = 2 - i$.

Aufgabe 98 j

Bestimmen Sie von der quadratischen Gleichung $z^2 + (1 + i)z - (6 + 2i) = 0$ sämtliche Lösungen $z \in \mathbb{C}$.

Lösung:

Mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen folgt zunächst

$$z_{1,2} = -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right)^2 + 6 + 2i} = -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{4}i^2 + 6 + 2i}$$
$$= -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2} \pm \sqrt{6 + \frac{5}{2}i}.$$

Sei $w^2 := (a+ib)^2 = a^2 - b^2 + i\,2ab = 6 + \frac{5}{2}i$. Dann liefert der Vergleich von Real- und Imaginärteil auf beiden Seiten der Gleichung das nichtlineare Gleichungssystem:

$$I)\ a^2 - b^2 = 6 \qquad\qquad II)\ 2ab = \frac{5}{2}$$

Aus Gleichung $II)$ folgt $b = \frac{5}{4a}$. Eingesetzt in Gleichung $I)$ liefert dann:

$$\begin{aligned}
& a^2 - \left(\frac{5}{4a}\right)^2 = 6 \\
\Leftrightarrow \quad & a^2 - \frac{25}{16a^2} = 6 && | \cdot 16a^2 \\
\Leftrightarrow \quad & 16a^4 - 25 = 96a^2 && | -96a^2 \\
\Leftrightarrow \quad & 16a^4 - 96a^2 - 25 = 0 && | : 16 \\
\Leftrightarrow \quad & a^4 - 6a^2 - \frac{25}{16} = 0 && | \text{ binomische Ergänzung} \\
\Leftrightarrow \quad & (a^2-3)^2 - 9 - \frac{25}{16} = 0 && | + \frac{169}{16} \\
\Leftrightarrow \quad & (a^2-3)^2 = \frac{169}{16} && | \sqrt{\ } \\
\Leftrightarrow \quad & a^2_{1,2} - 3 = \pm\sqrt{\frac{169}{16}} && | +3 \\
\Leftrightarrow \quad & a^2_{1,2} = 3 \pm \frac{13}{4}
\end{aligned}$$

Da $a^2_{1,2} > 0$ sein muss, kommt nur die Lösung $a^2 = \frac{25}{4}$ infrage. Damit ist dann $a = \frac{5}{2}$ und $b = \frac{5}{4a} = \frac{1}{2}$. Die Lösung der obigen quadratischen Gleichung ist mit $w = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}i$

$$z_{1,2} = -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2} \pm \sqrt{w^2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \pm w = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \pm \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}i\right).$$

Also lauten die Lösungen $z_1 = 2$ und $z_2 = -3 - i$.

Aufgabe 98 k

Bestimmen Sie von der quadratischen Gleichung $z^2 + 2iz - 1 + i = 0$ sämtliche Lösungen $z \in \mathbb{C}$.

Lösung:

Zunächst wird die komplexe Zahl $w := -i$ in die Exponentialform umgeformt. Der Betrag von w ist $|w| = 1$ und der Phasenwinkel $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, da die komplexe Zahl w auf der negativen imaginären Achse in der Gaußschen Zahlenebene liegt. Dann ist $w = e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

Mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen ergibt sich

$$z_{1,2} = -i \pm \sqrt{i^2 + 1 - i} = -i \pm \sqrt{-i} = -i \pm \sqrt{w} = -i \pm \sqrt{e^{-i\frac{\pi}{2}}} = -i \pm e^{-i\frac{\pi}{4}}$$
$$= -i \pm \Big[\underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}} + i \underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}_{=-\frac{1}{\sqrt{2}}}\Big] = -i \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Dann lauten die beiden Lösungen $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ und $z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)$.

Aufgabe 98 I

Bestimmen Sie von der quadratischen Gleichung $z^2 - 3z + (3+i) = 0$ sämtliche Lösungen $z \in \mathbb{C}$.

Lösung:

Mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen ergibt sich zunächst

$$z_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 3 - i} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 3 - i} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4} - i}.$$

Sei $w^2 := (a+ib)^2 = a^2 - b^2 + i2ab = -\frac{3}{4} - i$. Dann liefert der Vergleich von Real- und Imaginärteil auf beiden Seiten der Gleichung das nichtlineare Gleichungssystem:

$$I)\ a^2 - b^2 = -\frac{3}{4} \qquad II)\ 2ab = -1$$

Aus Gleichung $II)$ folgt $b = -\frac{1}{2a}$. Eingesetzt in Gleichung $I)$ liefert dann:

$$\begin{aligned}
& a^2 - \left(-\frac{1}{2a}\right)^2 = -\frac{3}{4} \\
\Leftrightarrow \quad & a^2 - \frac{1}{4a^2} = -\frac{3}{4} && | \cdot 4a^2 \\
\Leftrightarrow \quad & 4a^4 - 1 = -3a^2 && | +3a^2 \\
\Leftrightarrow \quad & 4a^4 + 3a^2 - 1 = 0 && | : 4 \\
\Leftrightarrow \quad & a^4 + \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4} = 0 && | \text{ binomische Ergänzung} \\
\Leftrightarrow \quad & \left(a^2 + \frac{3}{8}\right)^2 - \frac{9}{64} - \frac{1}{4} = 0 && | +\frac{25}{64} \\
\Leftrightarrow \quad & \left(a^2 + \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{25}{64} && | \sqrt{\ } \\
\Leftrightarrow \quad & a^2_{1,2} + \frac{3}{8} = \pm\sqrt{\frac{25}{64}} && | -\frac{3}{8} \\
\Leftrightarrow \quad & a^2_{1,2} = -\frac{3}{8} \pm \frac{5}{8}
\end{aligned}$$

Da $a_{1,2}^2 > 0$ sein muss, kommt nur die Lösung $a^2 = \frac{1}{4}$ infrage. Dann ist $a = \frac{1}{2}$ und $b = -\frac{1}{2a} = -1$. Die Lösung der quadratischen Gleichung ist mit $w = \frac{1}{2} - i$

$$z_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{w^2} = \frac{3}{2} \pm w = \frac{3}{2} \pm \left(\frac{1}{2} - i\right) \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = 2 - i \ \vee \ z_2 = 1 + i.$$

Aufgabe 98 m

Bestimmen Sie von der quadratischen Gleichung $z^2 - 2iz + 2z + 2i = 0$ sämtliche Lösungen $z \in \mathbb{C}$.

Lösung:

Zunächst wird die komplexe Zahl $w := -4i$ in die Exponentialform umgeformt. Der Betrag von w ist $|w| = 4$ und der Phasenwinkel $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, da die komplexe Zahl w auf der negativen imaginären Achse in der Gaußschen Zahlenebene liegt. Dann ist $w = 4e^{-i\frac{\pi}{2}}$. Mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen folgt

$$z_{1,2} = -1 + i \pm \sqrt{(1-i)^2 - 2i} = -1 + i \pm \sqrt{-4i} = -1 + i \pm \sqrt{w}$$

$$= -1 + i \pm \sqrt{4e^{-i\frac{\pi}{2}}} = -1 + i \pm 2e^{-i\frac{\pi}{4}} = -1 + i \pm 2\left[\underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}} + i\underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}_{=-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right]$$

$$= -1 + i \pm 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1 + i \pm (\sqrt{2} - i\sqrt{2}).$$

Also lauten die Lösungen der quadratischen Gleichung $z_1 = -1 + \sqrt{2} + i(1 - \sqrt{2})$ und $z_2 = -1 - \sqrt{2} + i(1 + \sqrt{2})$.

Aufgabe 98 n

Bestimmen Sie von der quadratischen Gleichung $z(z+6) = -13$ sämtliche Lösungen $z \in \mathbb{C}$.

Lösung:

Aus $z^2 + 6z + 13 = 0$ folgt mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen

$$z_{1,2} = -3 \pm \sqrt{3^2 - 13} = -3 \pm \sqrt{-4} = -3 \pm 2\sqrt{-1} = -3 \pm 2i.$$

Damit ergeben sich die beiden Lösungen $z_1 = -3 + 2i$ und $z_2 = -3 - 2i$.

Aufgabe 99 a

Lösen Sie die quadratische Gleichung $z^2 - 2z + 2 = 0$. Die beiden Lösungen seien z_1 und z_2.

Lösung:

Mithilfe der p, q - Formel findet man die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung zu $z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i$.

Aufgabe 99 b

Sind z_1+z_2 oder z_1-z_2 oder $z_1\cdot z_2$ reell?

Lösung:
Es sind $z_1+z_2=1+i+1-i=2$ reell und $z_1-z_2=1+i-1+i=2i$ komplex sowie $z_1\cdot z_2=(1+i)(1-i)=1-i^2=2$ reell.

Aufgabe 100

Sei $c\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ eine komplexe Zahl und $n\in\mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Wie viele verschiedene komplexe Lösungen $z\in\mathbb{C}$ besitzt die Gleichung $z^n=c$?

Lösung:
Die Gleichung $z^n=c$ besitzt n verschiedene Lösungen in $\mathbb{C}$. Die Lösungen dieser Gleichung lauten

$$z_k=\sqrt[n]{|c|}\;e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}\quad\text{mit}\quad k\in\{0,1,2,\ldots,n-1\}.$$

Diese Lösungen liegen alle auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt $M(0,0)$ und dem Radius $r=|c|$ in der komplexen Ebene. Der Phasenwinkel zwischen den einzelnen Lösungen beträgt jeweils $\frac{2\pi}{n}$.

Aufgabe 101 a

Es sei w eine komplexe Zahl und $z_1=\sqrt{2}\,(1+i)$ eine Lösung der Gleichung $z^3=w$. Bestimmen Sie w und alle weiteren Lösungen der Gleichung.

Lösung:
w ergibt sich aus

$$\begin{aligned}w=z_1^3&=(\sqrt{2}(1+i))^3=2\sqrt{2}(1+i)^2(1+i)=2\sqrt{2}(1+2i+i^2)(1+i)\\&=2\sqrt{2}(2i)(1+i)=2\sqrt{2}(2i+2i^2)=-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i.\end{aligned}$$

Die Lösung z_1 lautet in Exponentialform $z_1=2e^{i\frac{\pi}{4}}$, weil z_1 auf der Winkelhalbierenden im ersten Quadranten der Gaußschen Zahlenebene liegt und der Betrag $|z_1|=2$ ist. Die drei Lösungen müssen auf einem Kreis in der komplexen Ebene mit dem Radius $r=2$ liegen und jeweils einen Winkel von $\varphi=\frac{2\pi}{3}$ miteinander bilden. Daher ergeben sich die beiden weiteren Lösungen der Gleichung zu

$$z_2=2e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)}=2e^{i\frac{11\pi}{12}}\quad\text{und}\quad z_3=2e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)}=2e^{i\frac{19\pi}{12}}.$$

Aufgabe 101 b

Sei $w\in\mathbb{C}$ und sei $z_1=1+i$ eine Lösung der Gleichung $z^4-w=0$. Bestimmen Sie w und alle weiteren Lösungen der Gleichung.

Lösung:
w ergibt sich aus

$w = z_1^4 = (1+i)^4 = (1+i)^2(1+i)^2 = (1+2i+i^2)(1+2i+i^2) = (2i)(2i) = -4.$

Die vier Lösungen müssen alle auf einem Kreis in der komplexen Ebene mit dem Radius $r = \sqrt{2}$ liegen und jeweils einen Winkel von $\varphi = \frac{\pi}{2}$ miteinander bilden. Die Lösung z_1 lautet in Exponentialform $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, weil z_1 auf der Winkelhalbierenden im ersten Quadranten der Gaußschen Zahlenebene liegt und der Betrag $|z_1| = \sqrt{2}$ ist. Daher ergeben sich die drei weiteren Lösungen der Gleichung zu

$z_2 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ und $z_3 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ und
$z_4 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$.

Aufgabe 101 c

Eine Lösung der Gleichung $z^4 = -7+24i$ ist $z_0 = 2+i$. Geben Sie die weiteren Lösungen an.

Lösung:

z_0 hat den Betrag $|z_0| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$ und den Phasenwinkel $\varphi = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0{,}43$. Dann müssen alle vier Lösungen der Gleichung auf einem Kreis in der komplexen Ebene mit dem Radius $r = \sqrt{5}$ liegen und sich jeweils um den Winkel $\varphi = \frac{\pi}{2}$ unterscheiden. Die drei weiteren Lösungen lauten dann

$z_1 \approx \sqrt{5}e^{i(0{,}43+\frac{\pi}{2})}$ und $z_2 \approx \sqrt{5}e^{i0{,}43+\pi}$ und $z_3 \approx \sqrt{5}e^{i(0{,}43+\frac{3\pi}{2})}$.

Aufgabe 102 a

Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^3 = -27$ und stellen Sie diese in der Form $z = x+iy$ dar.

Lösung:

Es gilt $z^3 = -27 = 27e^{i\pi}$, da die Zahl -27 auf der negativen reellen Achse liegt. Dann lauten die drei Lösungen der Gleichung

$$z_k = \sqrt[3]{27}\,e^{i\frac{\pi+2k\pi}{3}} = 3\left[\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)\right] \quad \text{für} \quad k \in \{0,1,2\}.$$

Die einzelnen Lösungen sind

$$z_0 = 3\Big[\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{=\frac{1}{2}} + i\,\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{=\frac{\sqrt{3}}{2}}\Big] = \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}, \qquad z_1 = 3\,(\underbrace{\cos\pi}_{=-1} + i\,\underbrace{\sin\pi}_{=0}) = -3,$$

$$z_2 = 3\Big[\underbrace{\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)}_{=\frac{1}{2}} + i\,\underbrace{\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)}_{=-\frac{\sqrt{3}}{2}}\Big] = \frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Aufgabe 102 b

Bestimmen Sie sämtliche Lösungen $z \in \mathbb{C}$ von $z^4 + 8(i\sqrt{3} - 1) = 0$. Geben Sie jede Lösung sowohl in Polarkoordinaten, als auch in der Form $z = x + iy$ mit reellen x und y an.

Lösung:
Für die komplexe Zahl $w := 8 - i8\sqrt{3}$ gilt

$$|w| = \sqrt{8^2 + (-8\sqrt{3})^2} = \sqrt{64 + 192} = \sqrt{256} = 16 \quad \text{und} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{-8\sqrt{3}}{8}\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

Die Gleichung $z^4 = w$ hat dann für $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ die vier Lösungen

$$z_k = \sqrt[4]{16}\, e^{i\frac{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4}} = 2\left[\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right)\right].$$

Also lauten die einzelnen Lösungen

$$z_0 = 2\left[\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)\right] \approx 1{,}93 - i\,0{,}52,$$
$$z_1 = 2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right] \approx 0{,}52 + i\,1{,}93,$$
$$z_2 = 2\left[\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right] \approx -1{,}93 + i\,0{,}52,$$
$$z_3 = 2\left[\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right] \approx -0{,}52 - i\,1{,}93.$$

Aufgabe 102 c

Bestimmen Sie alle Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $\overline{z}^2 = iz$ und skizzieren Sie diese in der Gaußschen Zahlenebene.

Lösung:
Sei $z = x + iy$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& \overline{z}^2 = iz \\
\Leftrightarrow \quad & (x - iy)^2 = i(x + iy) \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 - i2xy - y^2 = ix - y \qquad | -ix + y \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 - y^2 + y + i(-2xy - x) = 0 + i \cdot 0
\end{aligned}$$

Der Vergleich von Real- und Imaginärteil auf beiden Seiten der Gleichung liefert das nichtlineare Gleichungssystem:

$$I)\ x^2 - y^2 + y = 0 \qquad\qquad II)\ 2xy + x = 0$$

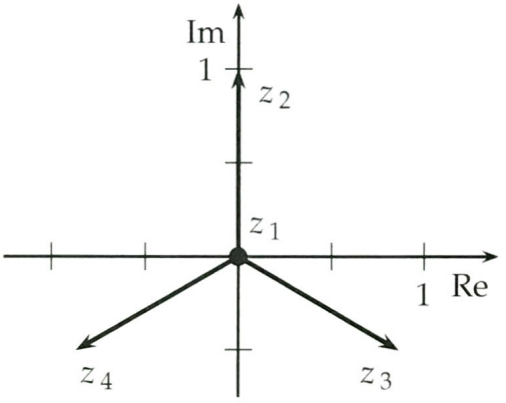
Die zweite Gleichung lässt sich faktorisieren zu $x(2y+1)=0$. Dieses Produkt ist null, wenn einer der beiden Faktoren null ist. Das ist genau dann der Fall, wenn $x=0$ oder $y=-\frac{1}{2}$ ist. Für den Fall $x=0$ erhält man durch Einsetzen in die erste Gleichung

$$-y^2+y=0 \quad \Leftrightarrow \quad y(-y+1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad y_1=0 \vee y_2=1.$$

Damit sind die ersten zwei Lösungen $z_1=0$ und $z_2=i$ gefunden. Für den Fall $y=-\frac{1}{2}$ erhält man durch Einsetzen in die erste Gleichung

$$x^2-\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2=\frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Damit ergeben sich die dritte und vierte Lösung zu $z_3=\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}$ und $z_4=-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}$. Die grafische Darstellung der vier Lösungen ist der folgenden Abbildung zu entnehmen.



Aufgabe 103 a

Geben Sie alle komplexen Lösungen $z\in\mathbb{C}$ der Gleichung $z^3=8i$ an und skizzieren Sie sie in der komplexen Zahlenebene.

Lösung:

Es ist $z^3=8i=8e^{i\frac{\pi}{2}}$, da die Zahl $8i$ auf der positiven imaginären Achse liegt. Dann lauten die drei Lösungen der Gleichung

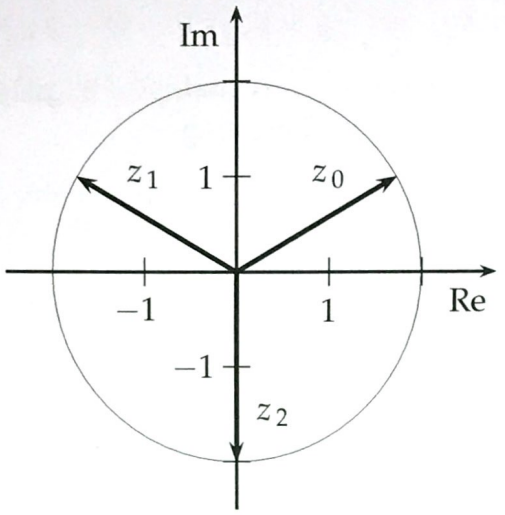
$$z_k=\sqrt[3]{8}\,e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}}=2\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)\right] \quad \text{für} \quad k\in\{0,1,2\}.$$

Die einzelnen Lösungen sind

$$z_0=2\Big[\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}_{=\frac{\sqrt{3}}{2}}+i\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}_{=\frac{1}{2}}\Big]=\sqrt{3}+i, \quad z_1=2\Big[\underbrace{\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)}_{=-\frac{\sqrt{3}}{2}}+i\underbrace{\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)}_{=\frac{1}{2}}\Big]=-\sqrt{3}+i,$$

$$z_2=2\Big[\underbrace{\cos\left(\frac{9\pi}{6}\right)}_{=0}+i\underbrace{\sin\left(\frac{9\pi}{6}\right)}_{=-1}\Big]=-2i.$$

Diese drei Lösungen liegen alle auf dem Ursprungskreis mit dem Radius $r = 2$ in der komplexen Ebene und der Winkel zwischen ihnen beträgt jeweils $120°$. Die grafische Darstellung dieser drei Lösungen ist der folgenden Abbildung zu entnehmen.



Aufgabe 103 b

Geben Sie alle komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^7 = i + 1$ an und skizzieren Sie sie in der komplexen Zahlenebene.

Lösung:

Für die komplexe Zahl $w := 1 + i$ ist der Betrag $|w| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ und der Phasenwinkel $\varphi = \frac{\pi}{4}$, da sie auf der Winkelhalbierenden im ersten Quadranten der Gaußschen Zahlenebene liegt. Dann lauten die sieben Lösungen der Gleichung

$$z_k = \sqrt[14]{2}\, e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{7}} = \sqrt[14]{2}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{7}\right)\right] \quad \text{für} \quad k \in \{0, \ldots, 6\}.$$

Die einzelnen Lösungen sind

$$z_0 = \sqrt[14]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{28}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{28}\right)\right] \approx 1{,}04 + i\,0{,}12,$$

$$z_1 = \sqrt[14]{2}\left[\cos\left(\frac{9\pi}{28}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{28}\right)\right] \approx 0{,}56 + i\,0{,}89,$$

$$z_2 = \sqrt[14]{2}\left[\cos\left(\frac{17\pi}{28}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{28}\right)\right] \approx -0{,}35 + i\,0{,}99,$$

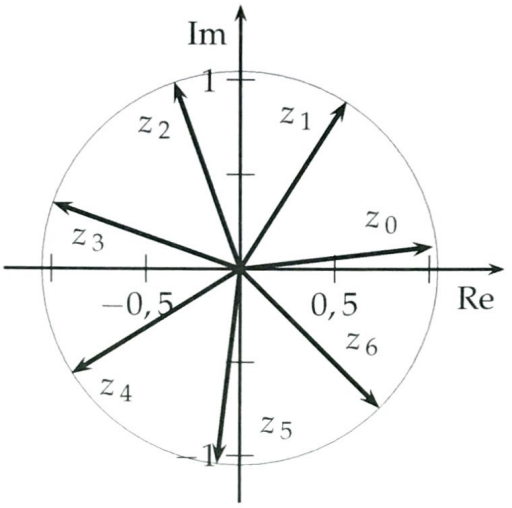
$$z_3 = \sqrt[14]{2}\left[\cos\left(\frac{25\pi}{28}\right) + i\sin\left(\frac{25\pi}{28}\right)\right] \approx -0.99 + i\,0{,}35,$$

$$z_4 = \sqrt[14]{2}\left[\cos\left(\frac{33\pi}{28}\right) + i\sin\left(\frac{33\pi}{28}\right)\right] \approx -0{,}89 - i\,0{,}56,$$

$$z_5 = \sqrt[14]{2}\left[\cos\left(\frac{41\pi}{28}\right) + i\sin\left(\frac{41\pi}{28}\right)\right] \approx -0{,}12 - i\,1{,}04,$$

$$z_6 = \sqrt[14]{2}\left[\cos\left(\frac{49\,\pi}{28}\right) + i\,\sin\left(\frac{49\,\pi}{28}\right)\right] \approx 0{,}74 - i\,0{,}74\,.$$

Diese sieben Lösungen liegen alle auf dem Ursprungskreis mit dem Radius $r = \sqrt[14]{2}$ in der komplexen Ebene, wobei der Winkel zwischen ihnen jeweils ca. $51{,}43°$ beträgt. Die grafische Darstellung dieser sieben Lösungen ist der folgenden Abbildung zu entnehmen.



Aufgabe 103 c

Geben Sie alle komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z + 2\,\overline{z} = 5 + iz$ an und skizzieren Sie sie in der komplexen Zahlenebene.

Lösung:

Sei $z = x + iy$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & z + 2\,\overline{z} = 5 + iz \\ \Leftrightarrow \quad & x + iy + 2\,(x - iy) = 5 + i\,(x + iy) \\ \Leftrightarrow \quad & x + iy + 2x - i2y = 5 + ix + i^2 y \quad | -ix + y \\ \Leftrightarrow \quad & 3x + y + i\,(-x - y) = 5 + i0 \end{aligned}$$

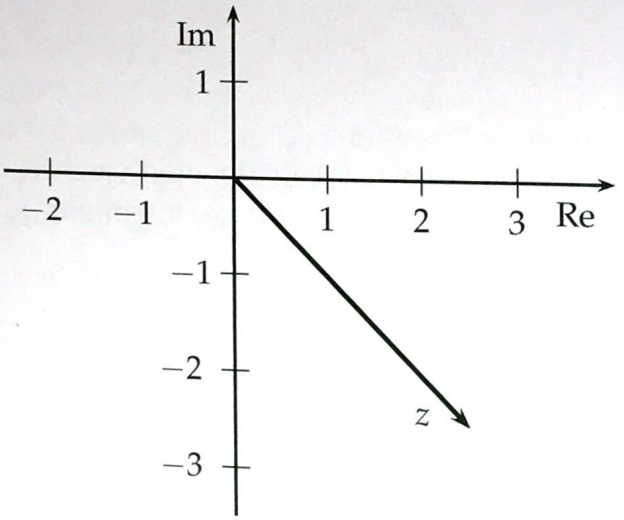
Der Vergleich von Real- und Imaginärteil auf beiden Seiten der Gleichung liefert das lineare Gleichungssystem:

$$I)\ 3x + y = 5 \qquad\qquad II)\ -x - y = 0$$

Aus der zweiten Gleichung erhält man sofort $x = -y$. Setzt man das in die erste Gleichung ein, dann ergibt sich

$$3\,(-y) + y = 5 \quad \Leftrightarrow \quad -2y = 5 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{5}{2}\,.$$

$y = -\frac{5}{2}$ in $x = -y$ eingesetzt ergibt dann $x = \frac{5}{2}$. Damit lautet die gesuchte Lösung der Gleichung $z = \frac{5}{2} - i\,\frac{5}{2}$, deren grafische Darstellung die nachfolgende Abbildung zeigt.



Aufgabe 103 d

Geben Sie alle komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$ an und skizzieren Sie sie in der komplexen Zahlenebene.

Lösung:

Für die komplexe Zahl $w := -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$ gilt zunächst

$$|\,w\,| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{1} = 1 \quad \text{und} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}\right) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\,\pi}{3}.$$

Dann lauten die vier Lösungen der Gleichung

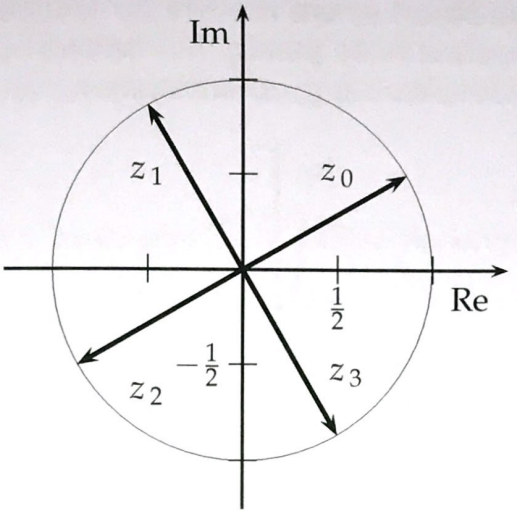
$$z_k = \sqrt[4]{1}\; e^{\,i\,\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4}} = \cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\,\pi}{4}\right) + i\,\sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\,\pi}{4}\right) \quad \text{für} \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Die einzelnen Lösungen sind also

$$z_0 = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}_{=\frac{\sqrt{3}}{2}} + i\,\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}_{=\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}, \qquad z_1 = \underbrace{\cos\left(\frac{2\,\pi}{3}\right)}_{=-\frac{1}{2}} + i\,\underbrace{\sin\left(\frac{2\,\pi}{3}\right)}_{=\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$z_2 = \underbrace{\cos\left(\frac{7\,\pi}{6}\right)}_{=-\frac{\sqrt{3}}{2}} + i\,\underbrace{\sin\left(\frac{7\,\pi}{6}\right)}_{=-\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1}{2}, \quad z_3 = \underbrace{\cos\left(\frac{5\,\pi}{3}\right)}_{=\frac{1}{2}} + i\,\underbrace{\sin\left(\frac{5\,\pi}{3}\right)}_{=-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Diese vier Lösungen liegen alle auf dem Kreis mit dem Radius $r = 1$ in der komplexen Ebene, wobei der Winkel zwischen ihnen jeweils 90° beträgt. Die grafische Darstellung der vier Lösungen ist der nachfolgenden Abbildung zu entnehmen.



Aufgabe 103 e

Geben Sie alle komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^5 = 16\sqrt{2}(-1+i)$ an und skizzieren Sie sie in der komplexen Zahlenebene.

Lösung:

Für die komplexe Zahl $w := -16\sqrt{2} + i\,16\sqrt{2}$ ist der Betrag

$$|w| = \sqrt{(-16\sqrt{2})^2 + (16\sqrt{2})^2} = \sqrt{512+512} = \sqrt{1024} = 32$$

und der Phasenwinkel $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, da die komplexe Zahl w auf der Winkelhalbierenden im zweiten Quadranten der Gaußschen Zahlenebene liegt. Dann lauten die fünf Lösungen der Gleichung für $k \in \{0, 1, \ldots, 4\}$

$$z_k = \sqrt[5]{32}\, e^{i\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{5}} = 2\left[\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{5}\right)\right].$$

Die einzelnen Lösungen sind

$$z_0 = 2\left[\cos\left(\frac{3\pi}{20}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{20}\right)\right] \approx 1{,}78 + i\,0{,}91,$$

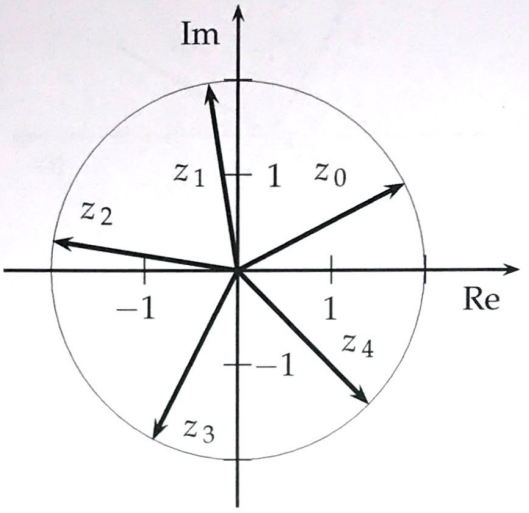
$$z_1 = 2\left[\cos\left(\frac{11\pi}{20}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{20}\right)\right] \approx -0{,}31 + i\,1{,}96,$$

$$z_2 = 2\left[\cos\left(\frac{19\pi}{20}\right) + i\sin\left(\frac{19\pi}{20}\right)\right] \approx -1{,}98 + i\,0{,}31,$$

$$z_3 = 2\left[\cos\left(\frac{27\pi}{20}\right) + i\sin\left(\frac{27\pi}{20}\right)\right] \approx -0{,}91 - i\,1{,}78,$$

$$z_4 = 2\left[\cos\left(\frac{35\pi}{20}\right) + i\sin\left(\frac{35\pi}{20}\right)\right] \approx 1{,}41 - i\,1{,}41.$$

Diese fünf Lösungen liegen alle auf einem Kreis in der komplexen Ebene mit dem Radius $r = 2$, wobei der Winkel zwischen ihnen jeweils $72°$ beträgt. Die grafische Darstellung der fünf Lösungen ist der folgenden Abbildung zu entnehmen.



Aufgabe 103 f

Geben Sie alle komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^3 = 1 + i$ an und skizzieren Sie sie in der komplexen Zahlenebene.

Lösung:

Für die komplexe Zahl $w := 1 + i$ ist der Betrag $|w| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ und der Phasenwinkel $\varphi = \frac{\pi}{4}$, da sie auf der Winkelhalbierenden im ersten Quadranten der Gaußschen Zahlenebene liegt. Dann lauten die drei Lösungen der Gleichung

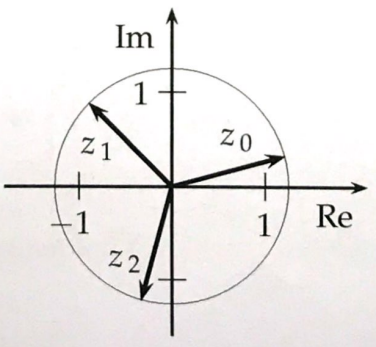
$$z_k = \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)\right] \quad \text{für} \quad k \in \{0, 1, 2\}.$$

Die einzelnen Lösungen sind

$$z_0 = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right] \approx 1{,}22 + i\,0{,}33,$$

$$z_1 = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] \approx -0{,}89 + i\,0{,}89,$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right] \approx -0{,}33 - i\,1{,}22.$$



Die drei Lösungen liegen alle auf dem Kreis in der komplexen Ebene mit dem Radius $r = \sqrt[3]{2}$, wobei der Winkel zwischen ihnen jeweils $120°$ beträgt. Die grafische Darstellung der drei Lösungen ist der vorstehenden Abbildung zu entnehmen.

Aufgabe 104 a

Berechnen Sie alle komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^4 + 2 - 2i = 0$.

Lösung:

Für die komplexe Zahl $w := -2 + 2i$ ist der Betrag $|w| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ und der Phasenwinkel $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, da sie auf der Winkelhalbierenden im zweiten Quadranten der Gaußschen Zahlenebene liegt. Dann lauten die vier Lösungen der Gleichung $z^4 = w$

$$z_k = \sqrt[4]{2\sqrt{2}}\, e^{i\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{4}} = \sqrt[8]{8}\left[\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)\right]$$

mit $k \in \{0, \ldots, 3\}$. Die einzelnen Lösungen sind

$$z_0 = \sqrt[8]{8}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{16}\right)\right] \approx 1{,}08 + i\,0{,}72,$$

$$z_1 = \sqrt[8]{8}\left[\cos\left(\frac{11\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{16}\right)\right] \approx -0{,}72 + i\,1{,}08,$$

$$z_2 = \sqrt[8]{8}\left[\cos\left(\frac{19\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{19\pi}{16}\right)\right] \approx -1{,}08 - i\,0{,}72,$$

$$z_3 = \sqrt[8]{8}\left[\cos\left(\frac{27\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{27\pi}{16}\right)\right] \approx 0{,}72 - i\,1{,}08.$$

Aufgabe 104 b

Berechnen Sie alle komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $(z - 3i)^6 + 64 = 0$.

Lösung:

Die Zahl $w = -64$ lautet in der Exponentialdarstellung $w = 64\,e^{i\pi}$, da sie auf der negativen reellen Achse in der Gaußschen Zahlenebene liegt. Dann gilt

$$(z-3i)^6 + 64 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z-3i)^6 = -64 \quad \Leftrightarrow \quad (z-3i)^6 = 64\,e^{i\pi}$$

und die Lösungen dieser Gleichung lauten

$$z_k - 3i = \sqrt[6]{64}\,e^{i\frac{\pi+2k\pi}{6}} \quad \Leftrightarrow \quad z_k = 3i + 2e^{i\frac{(2k+1)\pi}{6}} \quad \text{für} \quad k \in \{0,1,2,3,4,5\}.$$

Die einzelnen Lösungen sind

$$z_0 = 3i + 2\Big[\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}_{=\frac{\sqrt{3}}{2}} + i\,\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}_{=\frac{1}{2}}\Big] = 3i + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + 4i,$$

$$z_1 = 3i + 2\Big[\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + i\,\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}\Big] = 3i + 2(0+i) = 5i,$$

$$z_2 = 3i + 2\Big[\underbrace{\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)}_{=-\frac{\sqrt{3}}{2}} + i\underbrace{\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)}_{=\frac{1}{2}}\Big] = 3i + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + 4i,$$

$$z_3 = 3i + 2\Big[\underbrace{\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)}_{=-\frac{\sqrt{3}}{2}} + i\underbrace{\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)}_{=-\frac{1}{2}}\Big] = 3i + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + 2i,$$

$$z_4 = 3i + 2\Big[\underbrace{\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}_{=0} + i\underbrace{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}_{=-1}\Big] = 3i + 2(0 - i) = i,$$

$$z_5 = 3i + 2\Big[\underbrace{\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)}_{=\frac{\sqrt{3}}{2}} + i\underbrace{\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)}_{=-\frac{1}{2}}\Big] = 3i + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + 2i.$$

Aufgabe 104 c

Berechnen Sie alle komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $(1+i)z^3 - \sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi} = 0$.

Lösung:

Für die komplexe Zahl $w = 1 + i$ ist der Betrag $|w| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ und der Phasenwinkel $\varphi = \frac{\pi}{4}$, da die komplexe Zahl w auf der Winkelhalbierenden im ersten Quadranten der Gaußschen Zahlenebene liegt. Dann lautet die Zahl w in der Exponentialform $w = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ und die zu lösende Gleichung wird zu

$$\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z^3 - \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^3 - e^{i\frac{\pi}{2}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^3 = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

mit den Lösungen

$$z_k = e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right) \quad \text{für} \quad k \in \{0, 1, 2\}.$$

Die einzelnen Lösungen lauten also

$$z_0 = \Big[\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}_{=\frac{\sqrt{3}}{2}} + i\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}_{=\frac{1}{2}}\Big] = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$z_1 = \Big[\underbrace{\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)}_{=-\frac{\sqrt{3}}{2}} + i\underbrace{\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)}_{=\frac{1}{2}}\Big] = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$z_2 = \Big[\underbrace{\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}_{=0} + i\underbrace{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}_{=-1}\Big] = -i.$$

Aufgabe 105 a

Sei $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4$, $z \in \mathbb{C}$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3, a_4. Zeigen Sie: Ist z_0 eine Nullstelle des Polynoms p, dann ist $\overline{z}_0$ es auch.

Lösung:

Wegen $p(z_0) = 0 \Rightarrow \overline{p(z_0)} = 0$ und den Rechenregeln für die Konjugation komplexer Zahlen ergibt sich

$$0 = \overline{p(z_0)} = \overline{\sum_{j=0}^{4} a_j z_0^{\,j}} = \sum_{j=0}^{4} \overline{a_j z_0^{\,j}} = \sum_{j=0}^{4} a_j \overline{z_0^{\,j}} = \sum_{j=0}^{4} a_j \overline{z_0}^{\,j} = p(\overline{z_0}),$$

da das Polynom nach Voraussetzung nur reelle Koeffizienten besitzt.

Aufgabe 105 b

Zeigen Sie, dass das Polynom $p(z) = z^4 - 4z^3 + 14z^2 - 4z + 13$ in $z_0 = i$ eine Nullstelle hat, und bestimmen Sie alle weiteren Nullstellen von p.

Lösung:

Es gilt $p(i) = i^4 - 4i^3 + 14i^2 - 4i + 13 = 1 + 4i - 14 - 4i + 13 = 0$. Also ist $z_0 = i$ eine Nullstelle von p. Da das Polynom p nur reelle Koeffizienten besitzt, ist auch $z_1 = -i$ eine Nullstelle von p. Das Polynom enthält damit also die beiden Linearfaktoren

$$(z - i)(z + i) = z^2 - i^2 = z^2 + 1.$$

Um die weiteren Nullstellen von p zu ermitteln, wird jetzt eine Polynomdivision mit dem Term $z^2 + 1$ durchgeführt.

$$\begin{array}{l}
(z^4 - 4z^3 + 14z^2 - 4z + 13) : (z^2 + 1) = z^2 - 4z + 13 \\
\underline{-(z^4 \qquad\quad + z^2)} \\
0 \quad -4z^3 + 13z^2 \\
\underline{-(-4z^3 \qquad\quad - 4z)} \\
0 \quad\; 13z^2 \qquad + 13 \\
\underline{-(13z^2 \qquad + 13)} \\
0 \qquad\quad 0
\end{array}$$

Aus diesem Ergebnis folgen mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen die beiden weiteren Lösungen $z_{2,3} = 2 \pm \sqrt{4 - 13} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3i$.

Aufgabe 106

Gegeben sei ein Polynom sechsten Grades $P(z)$ mit reellen Koeffizienten.

a) Das Polynom habe Nullstellen bei $2 - i$, $1 + 3i$ und $5 - 2i$. Geben Sie alle Nullstellen des Polynoms an und stellen Sie $P(z)$ mit komplexen Linearfaktoren dar.

b) Welche Konstellationen für Nullstellen (Anzahl reeller bzw. komplexer Nullstellen) sind für ein Polynom sechsten Grades mit reellen Koeffizienten möglich?

Lösung zu a):
Weil das Polynom P nur reelle Koeffizienten hat, sind auch die konjugiert komplexen Lösungen Nullstellen des Polynoms P. Dann lautet die Linearfaktordarstellung von P mit beliebigen $a \in \mathbb{R}$

$$P(z) = a(z-2-i)(z-2+i)(z-1-3i)(z-1+3i)(z-5-2i)(z-5+2i).$$

Lösung zu b):
Ein Polynom 6. Grades mit reellen Koeffizienten hat nach dem Fundamentalsatz der Algebra genau sechs komplexe Nullstellen. Dann können maximal sechs reelle Nullstellen vorhanden sein. Falls eine Nullstelle komplex ist, muss auch die konjugiert komplexe Lösung eine Nullstelle des Polynoms sein. Also sind folgende Konstellationen der Nullstellen möglich:

1) sechs reelle und keine komplexe Nullstelle oder

2) vier reelle und zwei komplexe Nullstellen oder

3) zwei reelle und vier komplexe Nullstellen oder

4) keine reelle und sechs komplexe Nullstellen.

Aufgabe 107 a

Begründen Sie: Ist p ein Polynom mit reellen Koeffizienten und hat p nur komplexe Nullstellen (mit nicht verschwindenden Imaginärteilen), so ist der Grad von p gerade.

Lösung:
Jede komplexe Nullstelle eines Polynoms mit reellen Koeffizienten tritt auch immer konjugiert komplex auf. Wenn das Polynom nur komplexe Nullstellen mit nicht verschwindenden Imaginärteil hat, dann muss das Polynom gerade sein, weil es eine gerade Anzahl von Linearfaktoren besitzt.

Aufgabe 107 b

Bestimmen Sie alle Polynome 5. Grades mit reellen Koeffizienten, die in $2, 3i, 1-i$ Nullstellen haben.

Lösung:
Weil das Polynom nur reelle Koeffizienten hat, treten die beiden komplexen Nullstellen auch konjugiert komplex auf. Dann ist die Menge aller Polynome 5. Grades mit $a \in \mathbb{R}$ gegeben durch die Linearfaktordarstellung

$$p(z) = a(z-2)(z-3i)(z+3i)(z-1-i)(z-1+i).$$

Aufgabe 108 a

Sei $p(z)$ ein Polynom mit der Eigenschaft, dass mit jeder Nullstelle z_k auch die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}_k$ eine Nullstelle von $p(z)$ ist. Hat $p(z)$ dann reelle Koeffizienten? (Begründung oder Gegenbeispiel.)

Lösung:
Sei $p(z)$ ein Polynom vom Grad n sowie z_k beziehungsweise $\overline{z_k}$ zwei Nullstellen des Polynoms. Dann ergibt sich mit den Regeln der Konjugation von komplexen Zahlen

$$0 = p(\overline{z}_k) = \sum_{j=0}^{n} a_j \, \overline{z}_k^{\,j} = \sum_{j=0}^{n} \overline{\overline{a_j}} \, \overline{z_k^{\,j}} = \sum_{j=0}^{n} \overline{a_j \, z_k^{\,j}} = \overline{\sum_{j=0}^{n} a_j \, z_k^{\,j}} = \sum_{j=0}^{n} \overline{a_j} \, z_k^{\,j} = \sum_{j=0}^{n} a_j \, z_k^{\,j}.$$

Diese Gleichung ist nur dann erfüllbar, wenn für alle Koeffizienten $\overline{a_j} = a_j$ gilt. Das bedeutet aber, dass alle Koeffizienten reell sind.

Aufgabe 108 b

Gegeben sei das Polynom $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fünften Grades mit ausschließlich reellen Koeffizienten und den Nullstellen $z_1 = 1 - i$ beziehungsweise $z_2 = i$. Das Produkt aller fünf Nullstellen ist 1. Bestimmen Sie alle drei restlichen Nullstellen von p.

Lösung:
Das Polynom hat nur reelle Koeffizienten und somit tritt jede komplexe Nullstelle auch konjugiert komplex auf. Es sind also die vier Nullstellen $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 1 + i$, $z_3 = i$ und $z_4 = -i$ bekannt. Dann ergibt sich

$$\prod_{j=1}^{5} z_j = (1 - i)(1 + i)\, i\, (-i)\, z_5 = (1 - i^2)(-i^2)\, z_5 = 2 z_5 = 1.$$

Die fünfte Nullstelle ist also rein reell und lautet $z_5 = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 109

Sei p ein Polynom 5. Grades mit reellen Koeffizienten.

a) Wie viele Nullstellen besitzt p höchstens in $\mathbb{C}$?

b) Wie viele reelle Nullstellen besitzt p mindestens?

c) Das Polynom p habe eine doppelte Nullstelle bei i. Wie viele verschiedene Nullstellen besitzt das Polynom dann in $\mathbb{C}$?

Lösung zu a):
Da das Polynom nur reelle Koeffizienten hat, muss jede komplexe Nullstelle auch konjugiert komplex auftreten. Dann sind für ein Polynom 5. Grades nur maximal vier komplexe Nullstellen möglich. Seien z_1 und z_2 zwei Lösungen, dann sind auch $\overline{z_1}$ und $\overline{z_2}$ Lösungen des Polynoms.

Lösung zu b):
Nach Aufgabe a) hat ein Polynom 5. Grades maximal vier komplexe Lösungen. Damit muss es mindestens eine reelle Lösung geben.

Lösung zu c):
Wenn $z_{1,2} = i$ eine doppelte Nullstelle des Polynoms ist, dann muss auch die konjugiert komplexe Lösung $z_{3,4} = -i$ eine doppelte Nullstelle des Polynoms sein. Also gibt es demnach zwei verschiedene Nullstellen in $\mathbb{C}$ nämlich $z_1 = i$ und $z_2 = -i$ die jeweils doppelt auftreten.

Aufgabe 110 a

Berechnen Sie für die Gleichung $(z^5 + i)(z + z^2 + 3) = 0$ alle komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$.

Lösung:
Ein Produkt ist null, wenn einer der beiden Faktoren null wird.

$$(z^5 + i)(z^2 + z + 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^5 + i = 0 \ \vee \ z^2 + z + 3 = 0$$

Also gilt $z^5 = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$, da die Zahl $-i$ auf der negativen imaginären Achse liegt. Dann lauten die fünf Lösungen der Gleichung $z^5 = -i$

$$z_k = e^{i\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{5}} = \cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{5}\right) \quad \text{für} \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Die einzelnen Lösungen sind

$$\begin{aligned}
z_0 &= \cos\left(-\frac{\pi}{10}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right) \approx 0,95 - i\,0,31, \\
z_1 &= \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) \approx 0,59 + i\,0,81, \\
z_2 &= \cos\left(\frac{7\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{10}\right) \approx -0,59 + i\,0,81, \\
z_3 &= \cos\left(\frac{11\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{10}\right) \approx -0,95 - i\,0,31, \\
z_4 &= \cos\left(\frac{15\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{15\pi}{10}\right) = -i.
\end{aligned}$$

Für den zweiten Faktor $z^2 + z + 3$ der Gleichung ergibt sich mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen

$$z_{5,6} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{11}{4}} = -\frac{1}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{11}}{2}.$$

Also lauten die weiteren Lösungen $z_5 = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{11}}{2}$ und $z_6 = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{11}}{2}$.

Aufgabe 110 b

Berechnen Sie für die Gleichung $z^4 - 2z^2 + 17 = 0$ alle komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$.

Lösung:

$$\begin{aligned} & z^4 - 2z^2 + 17 = 0 && \mid \text{binomische Ergänzung} \\ \Leftrightarrow\ & (z^2-1)^2 - 1 + 17 = 0 && \mid -16 \\ \Leftrightarrow\ & (z^2-1)^2 = -16 && \mid \sqrt{\ } \\ \Leftrightarrow\ & z_{1,2}^2 - 1 = \pm\sqrt{-16} && \mid +1 \\ \Leftrightarrow\ & z_{1,2}^2 = 1 \pm 4i \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die vier Lösungen

$$z_1 = \sqrt{1+4i}, \quad z_2 = -\sqrt{1+4i}, \quad z_3 = \sqrt{1-4i}, \quad z_4 = -\sqrt{1-4i}.$$

Für $z_{1,2}$ sei $w^2 := (a+ib)^2 = a^2 - b^2 + i2ab = 1 + 4i$. Dann liefert der Vergleich von Real- und Imaginärteil auf beiden Seiten der Gleichung das nichtlineare Gleichungssystem:

$$I)\ a^2 - b^2 = 1 \qquad\qquad II)\ 2ab = 4$$

Aus Gleichung $II)$ folgt sofort $b = \frac{2}{a}$. Eingesetzt in Gleichung $I)$ ergibt:

$$\begin{aligned} & a^2 - \left(\frac{2}{a}\right)^2 = 1 \\ \Leftrightarrow\ & a^2 - \frac{4}{a^2} = 1 && \mid \cdot a^2 \\ \Leftrightarrow\ & a^4 - 4 = a^2 && \mid -a^2 \\ \Leftrightarrow\ & a^4 - a^2 - 4 = 0 && \mid \text{binomische Ergänzung} \\ \Leftrightarrow\ & \left(a^2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 4 = 0 && \mid +\frac{17}{4} \\ \Leftrightarrow\ & \left(a^2 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{17}{4} && \mid \sqrt{\ } \\ \Leftrightarrow\ & a_{1,2}^2 - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{17}{4}} && \mid +\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & a_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

Da $a_{1,2}^2 > 0$ sein muss, kommt nur die Lösung $a^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}$ infrage. Damit ist

$$a = \sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}} \quad \text{und} \quad b = \frac{2}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{17}}} \quad \text{also} \quad w = \sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}} + i\,\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{17}}}$$

$$\Rightarrow \quad z_{1,2} = \pm\sqrt{w^2} = \pm w = \pm\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}} + i\,\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{17}}}\right).$$

Für $z_{3,4}$ sei $w^2 := (a+ib)^2 = a^2 - b^2 + i2ab = 1 - 4i$. Dann liefert der Vergleich von Real- und Imaginärteil auf beiden Seiten der Gleichung das nichtlineare Gleichungssystem:

$$I)\ a^2 - b^2 = 1 \qquad II)\ 2ab = -4$$

Aus Gleichung $II)$ folgt sofort $b = -\frac{2}{a}$. Eingesetzt in Gleichung $I)$ liefert wieder die obige Gleichung

$$a^2 - \left(-\frac{2}{a}\right)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - \frac{4}{a^2} = 1 \quad \text{mit der Lösung} \quad a = \sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}}.$$

Also ist $b = -\frac{2}{a} = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{17}}}$ und damit $w = \sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}} - i\,\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{17}}}$.

Schließlich ergeben sich für die dritte und vierte Lösung

$$z_{3,4} = \pm\sqrt{w^2} = \pm w = \pm\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}} - i\,\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{17}}}\right).$$

Aufgabe 110 c

Berechnen Sie für die Gleichung $2z - iz^2 + z^3 = 0$ alle komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$.

Lösung:

Zunächst gilt

$$2z - iz^2 + z^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z(z^2 - iz + 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = 0 \ \vee\ z^2 - iz + 2 = 0.$$

Mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned} & 0 = z^2 - iz + 2 \\ \Leftrightarrow \quad & Z_{2,3} = \frac{i}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{i}{2}\right)^2 - 2} \\ \Leftrightarrow \quad & Z_{2,3} = \frac{i}{2} \pm \sqrt{-\frac{1}{4} - \frac{8}{4}} \\ \Leftrightarrow \quad & Z_{2,3} = \frac{i}{2} \pm \sqrt{-\frac{9}{4}} \\ \Leftrightarrow \quad & Z_{2,3} = \frac{i}{2} \pm \frac{3}{2}i \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man die Lösungen $z_1 = 0$, $z_2 = 2i$ und $z_3 = -i$.

Aufgabe 110 d

Berechnen Sie für die Gleichung $\left(z^3+\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)(z+i)=0$ alle komplexen Lösungen $z\in\mathbb{C}$.

Lösung:

Ein Produkt ist null, wenn einer der beiden Faktoren null wird.

$$\left(z^3+\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)(z+i)=0 \quad\Leftrightarrow\quad z^3+\frac{1-i}{\sqrt{2}}=0 \;\vee\; z+i=0$$

Sei $w:=-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\,\frac{1}{\sqrt{2}}$, dann ist der Betrag $|\,w\,|=\sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=\sqrt{1}=1$ und der Phasenwinkel $\varphi=\frac{3\pi}{4}$, da die komplexe Zahl w auf der Winkelhalbierenden im zweiten Quadranten in der Gaußschen Zahlenebene liegt. Dann lautet w in der Exponentialform $w=e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Zu lösen ist jetzt zunächst die Gleichung

$$z^3+\frac{1-i}{\sqrt{2}}=0 \quad\Leftrightarrow\quad z^3=-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\,\frac{1}{\sqrt{2}} \quad\Leftrightarrow\quad z^3=w \quad\Leftrightarrow\quad z^3=e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

Die Lösungen lauten

$$z_k=e^{i\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}}=\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)+i\,\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)\quad\text{für}\quad k\in\{0,1,2\}.$$

Die einzelnen Lösungen sind

$$z_0=\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}}+i\,\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}+i\,\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$z_1=\cos\left(\frac{11\,\pi}{12}\right)+i\,\sin\left(\frac{11\,\pi}{12}\right)\approx -0,97+0,26\,i,$$

$$z_2=\cos\left(\frac{19\,\pi}{12}\right)+i\,\sin\left(\frac{19\,\pi}{12}\right)\approx 0,26-0,97\,i.$$

Die vierte Lösung der Gleichung erhält man aus dem zweiten Faktor $z+i=0$ zu $z_3=-i$.

Aufgabe 110 e

Berechnen Sie für die Gleichung $z^3-3z^2i-3z+2i=0$ alle komplexen Lösungen $z\in\mathbb{C}$.

Lösung:

Um die Gleichung zu lösen, muss eine erste Lösung durch Probieren gefunden werden. Dazu betrachtet man zuerst die ganzzahligen Teiler des absoluten Gliedes $2i$. Das sind Zahlen aus der Menge $\{\pm1,\pm2,\pm i,\pm2i\}$. Einsetzen der Zahl $z_1=2i$ liefert

$$(2i)^3-3i(2i)^2-3(2i)+2i=-8i+12i-6i+2i=0.$$

Also ist $z_1=2i$ eine erste Lösung der Gleichung.

Anschließend wird eine Polynomdivision mit dem Linearfaktor $(z-2i)$ durchgeführt.

$$\begin{array}{l}(z^3-3iz^2-3z+2i):(z-2i)=z^2-iz-1\\ \underline{-(z^3-2iz^2)}\\ \quad 0\quad -iz^2-3z\\ \quad\ \underline{-(-iz^2-2z)}\\ \quad\qquad 0\quad -z+2i\\ \quad\qquad\ \underline{-(-z+2i)}\\ \quad\qquad\quad 0\quad 0\end{array}$$

Um die weiteren Lösungen der Gleichung zu erhalten, wird das Ergebnis der Polynomdivision null gesetzt. Mithilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen ergibt sich

$$z_{2,3}=\frac{i}{2}\pm\sqrt{\left(-\frac{i}{2}\right)^2+1}\quad\Leftrightarrow\quad z_{2,3}=\frac{i}{2}\pm\sqrt{\frac{3}{4}}\quad\Leftrightarrow\quad z_{2,3}=\frac{i}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Also lauten die beiden weiteren Lösungen $z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ und $z_3=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

Aufgabe 110 f

Berechnen Sie für die Gleichung $z^3-5z^2+12z-8=0$ alle komplexen Lösungen $z\in\mathbb{C}$.

Lösung:

Um die Gleichung $z^3-5z^2+12z-8=0$ zu lösen, muss eine erste Lösung durch Probieren gefunden werden. Da diese Gleichung nur reelle Koeffizienten hat, muss eine eventuell vorkommende komplexe Lösung auch konjugiert komplex auftreten. Also muss es mindestens eine reelle Lösung dieser Gleichung geben. Um diese reelle Lösung zu finden betrachtet man zuerst die ganzzahligen Teiler des absoluten Gliedes -8. Das sind die Zahlen aus der Menge $\{\pm1,\pm2,\pm4,\pm8\}$. Die reelle Zahl $z_1=1$ erfüllt diese Gleichung wegen

$$1^3-5\cdot1^2+12\cdot1-8=1-5+12-8=0.$$

Anschließend wird eine Polynomdivision mit dem Linearfaktor $(z-1)$ durchgeführt.

$$\begin{array}{l}(z^3-5z^2+12z-8):(z-1)=z^2-4z+8\\ \underline{-(z^3-1z^2)}\\ \quad 0\quad -4z^2+12z\\ \quad\ \underline{-(-4z^2+\ 4z)}\\ \quad\qquad 0\quad\ \ 8z-8\\ \quad\qquad\ \underline{-(8z-8)}\\ \quad\qquad\quad 0\quad 0\end{array}$$

Um die weiteren Lösungen der Gleichung zu erhalten wird das Ergebnis der Polynomdivision null gesetzt. Dann ergibt sich mithilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen

$$z_{2,3} = 2 \pm \sqrt{4-8} \quad \Leftrightarrow \quad z_{2,3} = 2 \pm \sqrt{-4} \quad \Leftrightarrow \quad z_{2,3} = 2 \pm 2i.$$

Also lauten die beiden weiteren Lösungen $z_2 = 2+2i$ und $z_3 = 2-2i$.

Aufgabe 111 a

Zeigen Sie, dass durch $z_0 = 2i$ eine Nullstelle des Polynoms

$$z^3 + (-4-i)z^2 + (5+5i)z - 6 - 6i = 0$$

gegeben ist. Berechnen Sie alle weiteren Nullstellen.

Lösung:

$z_0 = 2i$ in das Polynom eingesetzt liefert

$$\begin{aligned} p(2i) &= (2i)^3 + (-4-i)(2i)^2 + (5+5i)(2i) - 6 - 6i \\ &= -8i + 16 + 4i + 10i - 10 - 6 - 6i = 0. \end{aligned}$$

Also ist $z_0 = 2i$ eine Nullstelle des Polynoms. Um die weiteren Nullstellen des Polynoms zu erhalten, wird eine Polynomdivision mit dem Linearfaktor $(z-2i)$ durchgeführt.

$$\begin{array}{l} (z^3 + (-4-i)z^2 + (5+5i)z - 6 - 6i) : (z-2i) = z^2 + (-4+i)z + 3 - 3i \\ \underline{-(z^3 \qquad\quad - 2iz^2)} \\ \quad 0 \quad (-4+i)z^2 + (5+5i)z \\ \quad\; \underline{-((-4+i)z^2 + (2+8i)z)} \\ \qquad\quad 0 \qquad (3-3i)z - 6 - 6i \\ \qquad\quad\; \underline{-((3-3i)z - 6 - 6i)} \\ \qquad\qquad\quad 0 \qquad\quad 0 \end{array}$$

Aus der Lösung der Gleichung $z^2 + (-4+i)z + 3 - 3i = 0$ ergeben sich die beiden weiteren Nullstellen des Polynoms p zu

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= 2 - \frac{i}{2} \pm \sqrt{\left(-2 + \frac{i}{2}\right)^2 - 3 + 3i} = 2 - \frac{i}{2} \pm \sqrt{4 - 2i + \frac{i^2}{4} - 3 + 3i} \\ &= 2 - \frac{i}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4} + i}. \end{aligned}$$

Sei $w^2 := (a+ib)^2 = a^2 - b^2 + i2ab = \frac{3}{4} + i$ Dann liefert der Vergleich von Real- und Imaginärteil auf beiden Seiten der Gleichung das nichtlineare Gleichungssystem:

$$I)\ a^2 - b^2 = \frac{3}{4} \qquad\qquad II)\ 2ab = 1$$

Aus Gleichung $II)$ folgt $b = \frac{1}{2a}$. Eingesetzt in Gleichung $I)$ liefert das dann:

$$
\begin{aligned}
& a^2 - \left(\frac{1}{2a}\right)^2 = \frac{3}{4} \\
\Leftrightarrow \quad & a^2 - \frac{1}{4a^2} = \frac{3}{4} && | \cdot 4a^2 \\
\Leftrightarrow \quad & 4a^4 - 1 = 3a^2 && | -3a^2 \\
\Leftrightarrow \quad & 4a^4 - 3a^2 - 1 = 0 && | : 4 \\
\Leftrightarrow \quad & a^4 - \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4} = 0 && | \text{ binomische Ergänzung} \\
\Leftrightarrow \quad & \left(a^2 - \frac{3}{8}\right)^2 - \frac{9}{64} - \frac{1}{4} = 0 && | + \frac{25}{64} \\
\Leftrightarrow \quad & \left(a^2 - \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{25}{64} && | \sqrt{\ } \\
\Leftrightarrow \quad & a_{1,2}^2 - \frac{3}{8} = \pm\sqrt{\frac{25}{64}} && | + \frac{3}{8} \\
\Leftrightarrow \quad & a_{1,2}^2 = \frac{3}{8} \pm \frac{5}{8}
\end{aligned}
$$

Da $a_{1,2}^2 > 0$ sein muss, kommt nur die Lösung $a^2 = \frac{8}{8} = 1$ infrage. Damit ist $a = 1$ und $b = \frac{1}{2a} = \frac{1}{2}$. Die Lösung der quadratischen Gleichung ergibt sich mit $w = 1 + \frac{i}{2}$ zu

$$z_{1,2} = 2 - \frac{i}{2} \pm \sqrt{w^2} = 2 - \frac{i}{2} \pm w = 2 - \frac{i}{2} \pm \left(1 + \frac{i}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = 3 \ \vee \ z_2 = 1 - i.$$

Aufgabe 111 b

Gegeben sei das Polynom $p(z) = z^3 - 5z^2 + 8z - 6$. Zeigen Sie, dass $z_0 = 1 + i$ und $\overline{z}_0$ Nullstellen dieses Polynoms sind. Bestimmen Sie die weitere Nullstelle.

Lösung:

Setzt man $z_0 = 1 + i$ in das Polynom p ein, dann ergibt sich

$$
\begin{aligned}
p(1+i) &= (1+i)^3 - 5(1+i)^2 + 8(1+i) - 6 \\
&= (1+i)(1+i)^2 - 5(1+2i+i^2) + 8 + 8i - 6 \\
&= (1+i)(1+2i+i^2) - 5(2i) + 2 + 8i \\
&= (1+i)(2i) - 10i + 2 + 8i = 2i + 2i^2 - 2i + 2 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Weil das Polynom p nur reelle Koeffizienten hat, ist auch $z_1 = \overline{z_0} = 1 - i$ eine Nullstelle des Polynoms. Für die beiden Linearfaktoren gilt dann

$$(z - 1 - i)(z - 1 + i) = z^2 - z + iz - z + 1 - i - iz + i - i^2 = z^2 - 2z + 2.$$

Um die weitere Nullstelle des Polynoms zu erhalten, wird eine Polynomdivision mit dem Term $z^2 - 2z + 2$ durchgeführt.

$$
\begin{array}{rl}
 & (z^3-5z^2+8z-6):(z^2-2z+2)=z-3 \\
-&\underline{(z^3-2z^2+2z)} \\
 & 0\quad -3z^2+6z-6 \\
 & \quad -\underline{(-3z^2+6z-6)} \\
 & \qquad 0\quad 0\quad 0
\end{array}
$$

Die dritte Nullstelle des Polynoms p erhält man, indem das Ergebnis der Polynomdivision null gesetzt wird. Das liefert die rein reelle Lösung $z_2 = 3$.

Aufgabe 112 a

Finden Sie alle reellen und komplexen Nullstellen $z \in \mathbb{C}$ des reellen Polynoms

$$p(z) = 2z^4 - z^3 + 10z^2 - 4z + 8, \quad \text{wenn} \quad p\left(\frac{1+i\sqrt{15}}{4}\right) = 0 \quad \text{gilt.}$$

Lösung:

Das Polynom p hat nur reelle Koeffizienten und damit ist neben $z_1 = \frac{1+i\sqrt{15}}{4}$ auch die konjugiert komplexe Zahl $z_2 = \overline{z_1} = \frac{1-i\sqrt{15}}{4}$ eine Nullstelle des Polynoms p. Dann ergeben die beiden Linearfaktoren

$$\left(z - \frac{1+i\sqrt{15}}{4}\right)\left(z - \frac{1-i\sqrt{15}}{4}\right) =$$

$$z^2 - z\left(\frac{1-i\sqrt{15}}{4}\right) - z\left(\frac{1+i\sqrt{15}}{4}\right) + \left(\frac{1+i\sqrt{15}}{4}\right)\left(\frac{1-i\sqrt{15}}{4}\right) =$$

$$z^2 - \frac{1}{4}z + i\frac{\sqrt{15}}{4}z - \frac{1}{4}z - i\frac{\sqrt{15}}{4}z + \frac{1-i^2 15}{16} = z^2 - \frac{1}{2}z + 1.$$

Um jetzt die weiteren Nullstellen des Polynoms p zu finden, wird eine Polynomdivision mit dem Term $z^2 - \frac{1}{2}z + 1$ durchgeführt.

$$
\begin{array}{rl}
 & (2z^4 - z^3 + 10z^2 - 4z + 8) : (z^2 - \frac{1}{2}z + 1) = 2z^2 + 8 \\
-&\underline{(2z^4 - z^3 + \ 2z^2)} \\
 & 0\quad 0\quad 8z^2 - 4z + 8 \\
 & \qquad -\underline{(8z^2 - 4z + 8)} \\
 & \qquad\quad 0\quad 0\quad 0
\end{array}
$$

Die weiteren Nullstellen des Polynoms p erhält man, indem das Ergebnis der Polynomdivision null gesetzt wird. Dann folgt

$$2z^2 + 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 = -4 \quad \Leftrightarrow \quad z_{3,4} = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i.$$

Aufgabe 112 b

Finden Sie alle reellen und komplexen Nullstellen $z \in \mathbb{C}$ des reellen Polynoms

$$p(z) = z^4 - 3z^3 + 5z^2 - 4z + 2, \quad \text{wenn} \quad p\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \quad \text{gilt.}$$

Lösung:

Das Polynom p hat nur reelle Koeffizienten und damit ist neben $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ auch die konjugiert komplexe Zahl $z_2 = \overline{z_1} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ eine Nullstelle des Polynoms p. Dann ergeben die beiden Linearfaktoren

$$\left(z - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$z^2 - z\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) - z\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$z^2 - \frac{1}{2}z + i\frac{\sqrt{3}}{2}z - \frac{1}{2}z - i\frac{\sqrt{3}}{2}z + \frac{1-i^2 3}{4} = z^2 - z + 1.$$

Um jetzt die weiteren Nullstellen des Polynoms p zu finden, wird eine Polynomdivision mit dem Term $z^2 - z + 1$ durchgeführt.

$$\begin{array}{rl}
(z^4 - 3z^3 + 5z^2 - 4z + 2) : (z^2 - z + 1) = z^2 - 2z + 2 \\
\underline{-(z^4 - z^3 + z^2)} & \\
0 \; -2z^3 + 4z^2 - 4z & \\
\underline{-(-2z^3 + 2z^2 - 2z)} & \\
0 \quad 2z^2 - 2z + 2 & \\
\underline{-(2z^2 - 2z + 2)} & \\
0 \quad 0 \quad 0 &
\end{array}$$

Die weiteren Nullstellen des Polynoms p erhält man, indem das Ergebnis der Polynomdivision null gesetzt wird. Mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen folgt

$$z^2 - 2z + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z_{3,4} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i.$$

Aufgabe 113 a

Zerlegen Sie das Polynom $p(z) = z^5 + z^4 - 5z^3 + 10z^2 - 36z + 24$ mit $p(2i) = 0$ in Linearfaktoren.

Lösung:

Um die Linearfaktordarstellung von p zu finden, müssen zunächst die Nullstellen von p berechnet werden. Da dieses Polynom nur reelle Koeffizienten besitzt, ist neben $z_0 = 2i$ auch die konjugiert komplexe Zahl $z_1 = \overline{z_0} = -2i$ eine Nullstelle von p. Eine Polynomdivision mit den beiden Linearfaktoren $(z - 2i)(z + 2i) = z^2 + 4$ ergibt:

$$
\begin{array}{l}
(z^5+z^4-5z^3+10z^2-36z+24):(z^2+4)=z^3+z^2-9z+6 \\
-\underline{(z^5\qquad\quad+4z^3)} \\
\quad 0\quad z^4-9z^3 \\
\quad\ -\underline{(z^4\qquad\quad+4z^2)} \\
\quad\qquad 0\ -9z^3\ +6z^2 \\
\quad\qquad\ -\underline{(-9z^3\qquad\quad-36z)} \\
\quad\qquad\quad 0\qquad 6z^2+0\ \ +24 \\
\quad\qquad\quad\ -\underline{(6z^2\qquad\quad+24)} \\
\quad\qquad\quad\ \ 0\qquad\qquad\ 0
\end{array}
$$

Das Ergebnis dieser Polynomdivision wird für $z_2 = 2$ null, da $2^3+2^2-9\cdot 2+6=0$ ist. Dann ergibt eine weitere Polynomdivision mit dem Linearfaktor $(z-2)$:

$$
\begin{array}{l}
(z^3\ +z^2-9z+6):(z-2)=z^2+3z-3 \\
-\underline{(z^3-2z^2)} \\
\quad 0\quad 3z^2-9z \\
\quad\ -\underline{(3z^2-6z)} \\
\quad\qquad 0\quad -3z+6 \\
\quad\qquad\ -\underline{(-3z+6)} \\
\quad\qquad\quad\ 0\quad\ 0
\end{array}
$$

Mithilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen erhält man die beiden letzten Lösungen

$$z_{3,4} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{12}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{21}}{2}.$$

Die Linearfaktordarstellung von p lautet also

$$p(z) = (z-2i)(z+2i)(z-2)\left(z+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{21}}{2}\right)\left(z+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{21}}{2}\right).$$

Aufgabe 113 b

Zerlegen Sie das Polynom $p(z) = z^5+2z^3+6z^2-63z+54$ mit $p(3i)=0$ in Linearfaktoren.

Lösung:

Um die Linearfaktordarstellung von p zu finden, müssen zunächst die Nullstellen von p berechnet werden. Da dieses Polynom nur reelle Koeffizienten besitzt, ist neben $z_0 = 3i$ auch die konjugiert komplexe Zahl $z_1 = \overline{z_0} = -3i$ eine Nullstelle von p. Eine Polynomdivision mit den beiden Linearfaktoren $(z-3i)(z+3i) = z^2+9$ ergibt:

$$
\begin{array}{rl}
 & (z^5+2z^3+6z^2-63z+54) : (z^2+9) = z^3-7z+6 \\
-\underline{(z^5+9z^3)} & \\
0\ -7z^3+6z^2 & \\
-\underline{(-7z^3\qquad -63z)} & \\
0\quad 6z^2\qquad +54 & \\
-\underline{(6z^2\qquad +54)} & \\
0\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Das Ergebnis dieser Polynomdivision wird für $z_2 = 1$ null, da $1^3 - 7 \cdot 1 + 6 = 0$ ist. Dann ergibt eine weitere Polynomdivision mit dem Linearfaktor $(z-1)$:

$$
\begin{array}{rl}
 & (z^3\qquad -7z+6) : (z-1) = z^2+z-6 \\
-\underline{(z^3-z^2)} & \\
0\quad z^2-7z & \\
-\underline{(z^2\ -z)} & \\
0\ -6z+6 & \\
-\underline{(6z+6)} & \\
0\quad 0 &
\end{array}
$$

Mithilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen erhält man die beiden letzten Lösungen

$$z_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \quad \text{also} \quad z_3 = 2 \ \vee \ z_4 = -3.$$

Die Linearfaktordarstellung von p lautet also

$$p(z) = (z-3i)(z+3i)(z-1)(z-2)(z+3).$$

Aufgabe 113 c

Zerlegen Sie das Polynom $p(z) = z^6 - z^4 + z^2 - 1$ in Linearfaktoren, indem Sie die Variablensubstitution $z^2 =: w$ ausführen.

Lösung:

Um die Linearfaktordarstellung von p zu finden, müssen zunächst die Nullstellen von p berechnet werden. Mit der Substitution $w := z^2$ ergibt sich die äquivalente Gleichung $w^3 - w^2 + w - 1 = 0$. Eine erste Lösung ist $w_0 = 1$, da $1^3 - 1^2 + 1 - 1 = 0$ gilt. Eine Polynomdivision mit dem Linearfaktor $(w-1)$ ergibt dann:

$$
\begin{array}{rl}
 & (w^3-w^2+w-1) : (w-1) = w^2+1 \\
-\underline{(w^3-w^2)} & \\
0\quad 0\quad w-1 & \\
-\underline{(w-1)} & \\
0\quad 0 &
\end{array}
$$

Das Ergebnis dieser Polynomdivision wird für die beiden komplexen Zahlen $w_{1,2} = \pm i$ null. Damit ergeben sich für z die nachfolgenden zu lösenden Gleichungen:

$$(i)\ z^2 = 1 \qquad (ii)\ z^2 = i \qquad (iii)\ z^2 = -i$$

Aus der Gleichung (i) folgt $z_{1,2} = \pm 1$. Um die Gleichungen (ii) und (iii) zu lösen, werden zuerst die komplexen Zahlen $\pm i$ in die Exponentialform umgewandelt. Dann ist $\pm i = e^{\pm i\frac{\pi}{2}}$ und es ergeben sich für die Gleichungen (ii) und (iii) die Lösungen

$$z_k = e^{i\frac{\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right) + i\,\sin\left(\frac{\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right) \quad \text{für} \quad k \in \{0,1\}.$$

Damit ergeben sich schließlich die vier weiteren Lösungen

$$z_3 = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}} + i\,\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i,$$

$$z_4 = \underbrace{\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)}_{=-\frac{1}{\sqrt{2}}} + i\,\underbrace{\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)}_{=-\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,i,$$

$$z_5 = \underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}} + i\,\underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}_{=-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,i,$$

$$z_6 = \underbrace{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)}_{=-\frac{1}{\sqrt{2}}} + i\,\underbrace{\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)}_{=+\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i.$$

Die Linearfaktordarstellung von p lautet also

$$p(z) = (z-1)(z+1)\left(z - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right)\left(z + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right)\left(z - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right) \cdot$$
$$\cdot\left(z + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right).$$

Aufgabe 114 a

Zerlegen Sie das Polynom $p(z) = z^6 - 2z^5 + 2z^4 - z^2 + 2z - 2$ mithilfe der gegebenen Nullstelle $z_0 = 1 - i$ in reelle Faktoren minimaler Ordnung.

Lösung:

Um die Zerlegung des Polynoms p in reelle Faktoren minimaler Ordnung zu erhalten, werden zuerst die Nullstellen dieses Polynoms bestimmt. Da die Nullstelle $z_0 = 1 - i$

bereits bekannt ist, ist auch die konjugiert komplexe Zahl $z_1 = \overline{z_0} = 1+i$ eine Nullstelle, weil dieses Polynom nur reelle Koeffizienten besitzt. Eine Polynomdivision mit den Linearfaktoren $(z-1-i)(z-1+i) = (z-1)^2 - i^2 = z^2 - 2z + 2$ ergibt:

$$\begin{array}{l} (z^6 - 2z^5 + 2z^4 - z^2 + 2z - 2) : (z^2 - 2z + 2) = z^4 - 1 \\ \underline{-(z^6 - 2z^5 + 2z^4)} \\ \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -z^2 + 2z - 2 \\ \qquad\qquad \underline{-(-z^2 + 2z - 2)} \\ \qquad\qquad\quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

Das Ergebnis der Polynomdivision lässt sich in die reellen Faktoren

$$z^4 - 1 = (z^2+1)(z^2-1) = (z^2+1)(z-1)(z+1)$$

zerlegen. Damit folgt $p(z) = (z^2 - 2z + 2)(z^2+1)(z-1)(z+1)$.

Aufgabe 114 b

Zerlegen Sie das Polynom $p(z) = z^6 - 4z^5 + 2z^4 + 8z^3 + z^2 - 36z + 36$ mithilfe der gegebenen Nullstellen $z_0 = \sqrt{2} + i$ und $z_1 = -\sqrt{2} - i$ in reelle Faktoren minimaler Ordnung.

Lösung:

Um die Zerlegung des Polynoms p in reelle Faktoren minimaler Ordnung zu erhalten, werden zuerst die Nullstellen dieses Polynoms bestimmt. Da die Nullstellen $z_0 = \sqrt{2}+i$ und $z_1 = -\sqrt{2} - i$ bereits bekannt sind, sind auch die konjugiert komplexen Zahlen $z_2 = \overline{z_0} = \sqrt{2} - i$ und $z_3 = \overline{z_1} = -\sqrt{2} + i$ Nullstellen von p, weil dieses Polynom nur reelle Koeffizienten besitzt. Eine Polynomdivision mit den Linearfaktoren

$$(z-\sqrt{2}+i)(z-\sqrt{2}-i)(z+\sqrt{2}+i)(z+\sqrt{2}-i) = \left[(z-\sqrt{2})^2 - i^2\right]\left[(z+\sqrt{2})^2 - i^2\right]$$

$$= (z^2 - 2\sqrt{2}z + 3)(z^2 + 2\sqrt{2}z + 3) = z^4 - 2z^2 + 9$$

ergibt:

$$\begin{array}{l} (z^6 - 4z^5 + 2z^4 + 8z^3 + z^2 - 36z + 36) : (z^4 - 2z^2 + 9) = z^2 - 4z + 4 \\ \underline{-(z^6 \qquad - 2z^4 \qquad + 9z^2)} \\ \quad 0 \quad -4z^5 + 4z^4 + 8z^3 - 8z^2 \\ \quad\; \underline{-(-4z^5 \qquad + 8z^3 \qquad - 36z)} \\ \qquad 0 \quad 4z^4 \quad 0 \quad -8z^2 \quad 0 + 36 \\ \qquad\quad \underline{-(4z^4 \qquad - 8z^2 \qquad + 36)} \\ \qquad\quad\; 0 \qquad\quad 0 \qquad\quad 0 \end{array}$$

Mithilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen ergibt sich aus dem Ergebnis der Polynomdivision die doppelte Nullstelle $z_{4,5} = 2 \pm \sqrt{4-4} = 2$. Also lautet die reelle Faktordarstellung minimaler Ordnung

$$p(z) = (z^2 - 2\sqrt{2}z + 3)(z^2 + 2\sqrt{2}z + 3)(z-2)(z-2).$$

Aufgabe 114 c

Zerlegen Sie das Polynom $p(z) = z^6 + 4z^5 + 8z^4 + 16z^3 + 32z^2 + 64z + 64$ mithilfe der gegebenen Nullstellen $z_0 = 1 + \sqrt{3}i$ und $z_1 = -1 - \sqrt{3}i$ in reelle Faktoren minimaler Ordnung.

Lösung:

Um die Zerlegung des Polynoms p in reelle Faktoren minimaler Ordnung zu erhalten, werden zuerst die Nullstellen dieses Polynoms bestimmt. Da die Nullstellen $z_0 = 1 + \sqrt{3}i$ und $z_1 = -1 - \sqrt{3}i$ bereits bekannt sind, sind auch die konjugiert komplexen Zahlen $z_2 = \overline{z_0} = 1 - \sqrt{3}i$ und $z_3 = \overline{z_1} = -1 + \sqrt{3}i$ Nullstellen, weil dieses Polynom nur reelle Koeffizienten besitzt. Eine Polynomdivision mit den Linearfaktoren

$$\begin{aligned}
&(z - 1 - \sqrt{3}i)\,(z - 1 + \sqrt{3}i)\,(z + 1 + \sqrt{3}i)\,(z + 1 - \sqrt{3}i) \\
&= \left((z-1)^2 - 3i^2\right)\left((z+1)^2 - 3i^2\right) \\
&= (z^2 - 2z + 4)\,(z^2 + 2z + 4) = z^4 + 4z^2 + 16
\end{aligned}$$

ergibt:

$$\begin{array}{l}
(z^6 + 4z^5 + 8z^4 + 16z^3 + 32z^2 + 64z + 64) : (z^4 + 4z^2 + 16) = z^2 + 4z + 4 \\
\underline{-(z^6 \qquad + 4z^4 \qquad + 16z^2)} \\
\quad 0 \;+ 4z^5 + 4z^4 + 16z^3 + 16z^2 \\
\quad \underline{-(4z^5 \qquad + 16z^3 \qquad + 64z)} \\
\qquad 0 \quad 4z^4 \quad 0 \quad + 16z^2 \quad 0 \quad + 64 \\
\qquad \underline{-(4z^4 \qquad + 16z^2 \qquad + 64)} \\
\qquad\quad 0 \qquad\quad 0 \qquad\quad 0
\end{array}$$

Mithilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen ergibt sich aus dem Ergebnis der Polynomdivision die doppelte Nullstelle $z_{4,5} = -2 \pm \sqrt{4 - 4} = -2$. Also lautet die reelle Faktordarstellung minimaler Ordnung

$$p(z) = (z^2 - 2z + 4)\,(z^2 + 2z + 4)\,(z + 2)\,(z + 2).$$

Aufgabe 114 d

Zerlegen Sie das Polynom $p(z) = z^6 - 2z^5 - 3z^4 + 3z^3 - 10z^2 + 5z - 6$ mithilfe der gegebenen Nullstelle $z_0 = i$ in reelle Faktoren minimaler Ordnung.

Lösung:

Um die Zerlegung des Polynoms p in reelle Faktoren minimaler Ordnung zu erhalten, werden zuerst die Nullstellen dieses Polynoms bestimmt. Da die Nullstelle $z_0 = i$ bereits bekannt ist, ist auch die konjugiert komplexe Zahl $z_1 = \overline{z_0} = -i$ eine Nullstelle von p, weil dieses Polynom nur reelle Koeffizienten besitzt. Eine Polynomdivision mit den Linearfaktoren $(z - i)\,(z + i) = z^2 + 1$ ergibt:

$$
\begin{array}{rl}
 & (z^6-2z^5-3z^4+3z^3-10z^2+5z-6):(z^2+1)=z^4-2z^3-4z^2+5z-6 \\
-&\underline{(z^6\qquad\quad +z^4)} \\
 & 0\ -2z^5-4z^4 \\
 & \quad -\underline{(-2z^5\qquad -2z^3)} \\
 & \qquad 0\ -4z^4+5z^3 \\
 & \qquad\ -\underline{(-4z^4\qquad\quad -4z^2)} \\
 & \qquad\qquad 0\quad 5z^3\ -6z^2 \\
 & \qquad\qquad\ -\underline{(5z^3\qquad\quad +5z)} \\
 & \qquad\qquad\qquad 0\quad -6z^2\ +0\ -6 \\
 & \qquad\qquad\qquad\ -\underline{(-6z^2\qquad -6)} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 0\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Um die weiteren Lösungen zu bestimmen, wird das Ergebnis der Polynomdivision null gesetzt. Durch Raten findet man die beiden Lösungen $z_2=-2$ und $z_3=3$. Denn es gilt

$$(-2)^4-2\cdot(-2)^3-4\cdot(-2)^2+5\cdot(-2)-6=0 \quad \text{und}$$
$$3^4-2\cdot 3^3-4\cdot 3^2+5\cdot 3-6=0.$$

Eine weitere Polynomdivision mit den Linearfaktoren $(z+2)(z-3)=z^2-z-6$ ergibt:

$$
\begin{array}{rl}
 & (z^4-2z^3-4z^2+5z-6):(z^2-z-6)=z^2-z+1 \\
-&\underline{(z^4\ -z^3-6z^2)} \\
 & 0\quad -z^3+2z^2+5z \\
 & \quad -\underline{(-z^3\ +z^2+6z)} \\
 & \qquad 0\quad\ z^2\ -z-6 \\
 & \qquad\ -\underline{(z^2\ -z-6)} \\
 & \qquad\qquad 0\quad 0\ \ 0
\end{array}
$$

Mithilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen ergeben sich aus dem Ergebnis dieser Polynomdivision schließlich die letzten beiden Lösungen

$$z_{4,5}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Weil die Lösungen z_4 und z_5 nicht reell sind, lautet die Zerlegung in reelle Faktoren minimaler Ordnung

$$p(z)=(z^2-z+1)(z^2+1)(z+2)(z-3).$$

Aufgabe 115 a

Für das Polynom $p(z) = z^3 - 4z^2 + (6+i)z - (3+i)$ ist die Nullstelle $z_0 = 1+i$ bekannt. Ermitteln Sie alle weiteren Nullstellen.

Lösung:

Da $z_0 = 1+i$ eine Nullstelle des Polynoms p ist, führt eine Polynomdivision mit dem Linearfaktor $(z-(1+i))$ auf:

$$
\begin{array}{l}
(z^3 \quad -4z^2 \quad +(6+i)z-3-i) : (z-(1+i)) = z^2+(-3+i)z+2-i \\
\underline{-(z^3 \quad -(1+i)z^2)} \\
\quad 0 \quad (-3+i)z^2 \quad +(6+i)z \\
\quad \underline{-((-3+i)z^2+(4+2i)z)} \\
\quad\quad 0 \qquad\qquad (2-i)z-3-i \\
\quad\quad\quad \underline{-((2-i)z-3-i)} \\
\quad\quad\quad\quad 0 \qquad 0
\end{array}
$$

Um die weiteren Lösungen der Gleichung zu erhalten, wird das Ergebnis der Polynomdivision null gesetzt. Dann ergibt sich mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen

$$
\begin{aligned}
z_{1,2} &= \frac{3}{2} - \frac{i}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{3}{2}+\frac{i}{2}\right)^2 - 2 + i} = \frac{3}{2} - \frac{i}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{3}{2}i + \frac{i^2}{4} - 2 + i} \\
&= \frac{3}{2} - \frac{i}{2} \pm \sqrt{-\frac{1}{2}i} = \frac{3}{2} - \frac{i}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}} = \frac{3}{2} - \frac{i}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{3}{2} - \frac{i}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}} + i\underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}}\Big] = \frac{3}{2} - \frac{i}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{3}{2} - \frac{i}{2} \pm \left(\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Damit lauten die weiteren Nullstellen des Polynoms $z_1 = 2-i$ und $z_2 = 1$.

Aufgabe 115 b

Für das Polynom $p(z) = z^3 - 2z^2 + iz + 3 + i$ ist die Nullstelle $z_0 = 2-i$ bekannt. Ermitteln Sie alle weiteren Nullstellen.

Lösung:

Da $z_0 = 2-i$ eine Nullstelle des Polynoms p ist, führt eine Polynomdivision mit dem Linearfaktor $(z-(2-i))$ auf:

$$
\begin{array}{rrrl}
(z^3 & -2z^2 & +iz+3+i) : (z-(2-i)) = z^2-iz-1-i \\
-\underline{(z^3-(2-i)z^2)} & & & \\
0 & -iz^2 & +iz & \\
& -\underline{((-iz^2+(1+2i)z)} & & \\
& 0 \quad -(1+i)z & +3+i & \\
& & -\underline{(-(1+i)z+3+i)} & \\
& & 0 \quad 0 &
\end{array}
$$

Um die weiteren Lösungen der Gleichung zu erhalten, wird das Ergebnis der Polynomdivision null gesetzt. Dann ergibt sich mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen

$$z_{1,2} = \frac{i}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{i}{2}\right)^2 + 1 + i} = \frac{i}{2} \pm \sqrt{-\frac{1}{4} + 1 + i} = \frac{i}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4} + i}.$$

Sei $w^2 := (a+ib)^2 = a^2 - b^2 + i2ab = \frac{3}{4} + i$. Dann liefert der Vergleich von Real- und Imaginärteil auf beiden Seiten der Gleichung das nichtlineare Gleichungssystem:

$$I)\ a^2 - b^2 = \frac{3}{4} \qquad II)\ 2ab = 1$$

Aus der Gleichung $II)$ folgt $b = \frac{1}{2a}$. Eingesetzt in Gleichung $I)$ liefert dann:

$$
\begin{aligned}
& a^2 - \left(\frac{1}{2a}\right)^2 = \frac{3}{4} \\
\Leftrightarrow \quad & a^2 - \frac{1}{4a^2} = \frac{3}{4} && | \cdot a^2 \\
\Leftrightarrow \quad & a^4 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}a^2 && | -\frac{3}{4}a^2 \\
\Leftrightarrow \quad & a^4 - \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4} = 0 && | \text{ binomische Ergänzung} \\
\Leftrightarrow \quad & \left(a^2 - \frac{3}{8}\right)^2 - \frac{9}{64} - \frac{1}{4} = 0 && | +\frac{25}{64} \\
\Leftrightarrow \quad & \left(a^2 - \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{25}{64} && | \sqrt{\ } \\
\Leftrightarrow \quad & a_{1,2}^2 - \frac{3}{8} = \pm\sqrt{\frac{25}{64}} && | +\frac{3}{8} \\
\Leftrightarrow \quad & a_{1,2}^2 = \frac{3}{8} \pm \frac{5}{8}
\end{aligned}
$$

Da $a_{1,2}^2 > 0$ sein muss, kommt nur die Lösung $a^2 = 1$ infrage. Dann ist $a = 1$ und $b = \frac{1}{2a} = \frac{1}{2}$. Die Lösung der obigen quadratischen Gleichung ist mit $w = 1 + \frac{1}{2}i$

$$z_{1,2} = \frac{i}{2} \pm \sqrt{w^2} = \frac{i}{2} \pm w = \frac{i}{2} \pm \left(1 + \frac{1}{2}i\right) \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = 1 + i \ \vee \ z_2 = -1.$$

Aufgabe 115 c

Für das Polynom $p(z) = (z^2+1)(5z^3-3z^2+5z-3)$ ist die Nullstelle $z_0 = i$ bekannt. Ermitteln Sie alle weiteren Nullstellen.

Lösung:

Ein Produkt ist genau dann null, wenn einer der beiden Faktoren null ist. Dann ergeben sich die zwei zu lösenden Gleichungen:

$$I)\ z^2+1=0 \qquad\qquad II)\ 5z^3-3z^2+5z-3=0$$

Aus der Gleichung $I)$ erhält man sofort die beiden Lösungen $z^2+1=0 \Leftrightarrow z_{1,2} = \pm i$. Die zweite Gleichung wird offensichtlich für $z_3 = i$ erfüllt, denn es gilt

$$5i^3-3i^2+5i-3 = -5i+3+5i-3 = 0.$$

Da die zweite Gleichung ausschließlich reelle Koeffizienten besitzt, ist auch $z_4 = \overline{z_3} = -i$ eine Lösung. Eine Polynomdivision mit den Linearfaktoren $(z-i)(z+i) = z^2+1$ ergibt:

$$\begin{array}{l} (5z^3-3z^2+5z-3) : (z^2+1) = 5z-3 \\ \underline{-(5z^3 \qquad +5z)} \\ 0 \quad -3z^2+0 \quad -3 \\ \quad \underline{-(-3z^2 \qquad -3)} \\ \quad\ 0 \qquad\ 0 \end{array}$$

Um schließlich die letzte Lösung der zweiten Gleichung zu erhalten, wird das Ergebnis der Polynomdivision null gesetzt. Dann ergibt sich $z_5 = \frac{3}{5}$.

Aufgabe 115 d

Für das Polynom $p(z) = z^7+z^6+2iz+2i$ ist die Nullstelle $z_0 = -1$ bekannt. Ermitteln Sie alle weiteren Nullstellen.

Lösung:

Da $z_0 = -1$ eine Nullstelle des Polynoms p ist, wird eine Polynomdivision mit dem Linearfaktor $(z+1)$ durchgeführt. Dann ergibt sich:

$$\begin{array}{l} (z^7+z^6+2iz+2i) : (z+1) = z^6+2i \\ \underline{-(z^7+z^6)} \\ 0 \quad\ 0 \ +2iz+2i \\ \quad\ \underline{-(+2iz+2i)} \\ \quad\ 0 \quad\ 0 \end{array}$$

Um die weiteren Lösungen von p zu ermitteln, wird das Ergebnis der Polynomdivision null gesetzt. Das liefert

$$z^6+2i=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z^6 = -2i.$$

Für die komplexe Zahl $-2i$ ist der Betrag $|-2i| = 2$ und der Phasenwinkel $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, da diese auf der negativen imaginären Achse in der Gaußschen Zahlenebene liegt. Mithilfe der Exponentialdarstellung der Zahl $-2i$ ist die zu lösende Gleichung:

$$z^6 = 2e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad z_k = \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{6}} = \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{6}\right)\right]$$

für $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$. Damit ergeben sich die weiteren sechs Lösungen des Polynoms p

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right] \approx 1{,}08 - 0{,}29\,i,\\
z_1 &= \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] \approx 0{,}79 + 0{,}79\,i,\\
z_2 &= \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right] \approx -0{,}29 + 1{,}08\,i,\\
z_3 &= \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right] \approx -1{,}08 + 0{,}29\,i,\\
z_4 &= \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right] \approx -0{,}79 - 0{,}79\,i,\\
z_5 &= \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right] \approx 0{,}29 - 1{,}08\,i.
\end{aligned}$$

Aufgabe 115 e

Für das Polynom $p(z) = z^3 - 6z^2 + (12+i)z - (9+3i)$ ist die Nullstelle $z_0 = 1+i$ bekannt. Ermitteln Sie alle weiteren Nullstellen.

Lösung:

Da $z_0 = 1+i$ eine Nullstelle des Polynoms p ist, wird eine Polynomdivision mit dem Linearfaktor $(z-(1+i))$ durchgeführt. Es gilt:

$$\begin{array}{rl}
(z^3 & -6z^2 + (12+i)z - 9 - 3i) : (z-(1+i)) = z^2 + (-5+i)z + 6 - 3i\\
-\underline{(z^3} & \underline{-(1+i)z^2)}\\
0 & (-5+i)z^2 + (12+i)z\\
& -\underline{((-5+i)z^2 + (6+4i)z)}\\
& 0 \qquad (6-3i)z - 9 - 3i\\
& \qquad -\underline{(6-3i)z - 9 - 3i)}\\
& \qquad\quad 0 \quad 0 \quad 0
\end{array}$$

Um die weiteren Lösungen der Gleichung zu erhalten, wird das Ergebnis der Polynomdivision null gesetzt. Dann ergibt sich mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen

$$\begin{aligned}
z_{1,2} &= \frac{5}{2} - \frac{i}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{5}{2} + \frac{i}{2}\right)^2 - 6 + 3i} = \frac{5}{2} - \frac{i}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{5}{2}i + \frac{i^2}{4} - 6 + 3i}\\
&= \frac{5}{2} - \frac{i}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2}i} = \frac{5}{2} - \frac{i}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}} = \frac{5}{2} - \frac{i}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}
\end{aligned}$$

$$z_{1,2} = \frac{5}{2} - \frac{i}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}} + i\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}}\Big] = \frac{5}{2} - \frac{i}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{i}{2} \pm \left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right).$$

Damit sind die weiteren Nullstellen des Polynoms $z_1 = 3$ und $z_2 = 2 - i$.

Aufgabe 115 f

Für das Polynom $p(z) = z^6 - 3z^5 + 5z^4 - 6z^3 + 5z^2 - 3z + 1$ ist die Nullstelle $z_0 = i$ bekannt. Ermitteln Sie alle weiteren Nullstellen.

Lösung:

Da $z_0 = i$ eine Lösung des Polynoms p ist, muss auch die konjugiert komplexe Lösung $z_1 = \overline{z_0} = -i$ eine Lösung des Polynoms p sein, weil das Polynom nur reelle Koeffizienten besitzt. Um die weiteren Lösungen zu bestimmen, wird eine Polynomdivision mit den beiden Linearfaktoren $(z-i)(z+i) = z^2 + 1$ durchgeführt. Es gilt:

$$\begin{array}{l}
(z^6 - 3z^5 + 5z^4 - 6z^3 + 5z^2 - 3z + 1) : (z^2 + 1) = z^4 - 3z^3 + 4z^2 - 3z + 1 \\
-(z^6 \qquad\quad + z^4) \\
\hline
0 \quad -3z^5 + 4z^4 \\
\quad -(-3z^5 \qquad\quad - 3z^3) \\
\hline
\quad 0 \qquad 4z^4 - 3z^3 \\
\qquad -(4z^4 \qquad\quad + 4z^2) \\
\hline
\qquad 0 \quad -3z^3 + z^2 \\
\qquad\quad -(-3z^3 \qquad\quad - 3z) \\
\hline
\qquad\quad 0 \qquad z^2 + 0 + 1 \\
\qquad\qquad -(z^2 \qquad\quad + 1) \\
\hline
\qquad\qquad 0 \qquad\quad 0
\end{array}$$

Um die weiteren Lösungen zu bestimmen, wird das Ergebnis der Polynomdivision null gesetzt. Durch Raten findet man $z_2 = 1$, da $1^4 - 3 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 0$ ist. Eine weitere Polynomdivision mit dem Linearfaktor $(z-1)$ ergibt dann:

$$\begin{array}{l}
(z^4 - 3z^3 + 4z^2 - 3z + 1) : (z - 1) = z^3 - 2z^2 + 2z - 1 \\
-(z^4 \quad - z^3) \\
\hline
0 \quad -2z^3 + 4z^2 \\
\quad -(-2z^3 + 2z^2) \\
\hline
\quad 0 \qquad 2z^2 - 3z \\
\qquad -(2z^2 - 2z) \\
\hline
\qquad 0 \quad -z + 1 \\
\qquad\quad -(-z + 1) \\
\hline
\qquad\quad 0 \quad 0
\end{array}$$

Damit ist jetzt die Gleichung $z^3-2z^2+2z-1=0$ zu lösen. Durch nochmaliges Raten findet man $z_3=1$ als Lösung, da $1^3-2\cdot 1^2+2\cdot 1-1=0$ ist. Eine Polynomdivision mit dem Linearfaktor $(z-1)$ liefert dann:

$$\begin{array}{rl} (z^3-2z^2+2z-1):(z-1)=z^2-z+1 \\ -\underline{(z^3\ -z^2)} \\ 0\ -z^2+2z \\ \quad -\underline{(-z^2\ +z)} \\ \quad\ 0\quad z-1 \\ \quad\quad -\underline{(z-1)} \\ \quad\quad\ 0\quad 0 \end{array}$$

Die letzten beiden Lösungen ergeben sich schließlich dadurch, indem das Ergebnis dieser Polynomdivision null gesetzt wird. Durch Anwendung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen erhält man

$$z_{4,5}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2-1}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{4}{4}}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Also lauten die letzten zwei Lösungen $z_4=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ und $z_5=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Aufgabe 115 g

Für das Polynom $p(z)=z^3-2z^2+4z-8$ ist die Nullstelle $z_0=-2i$ bekannt. Ermitteln Sie alle weiteren Nullstellen.

Lösung:

Da das Polynom p nur reelle Koeffizienten hat, ist neben der Nullstelle $z_0=-2i$ auch die konjugiert komplexe Zahl $z_1=\overline{z_0}=2i$ eine Nullstelle des Polynoms p. Eine Polynomdivision mit den Linearfaktoren $(z-2i)(z+2i)=z^2+4$ ergibt dann:

$$\begin{array}{rl} (z^3-2z^2+4z-8):(z^2+4)=z-2 \\ -\underline{(z^3\qquad +4z)} \\ 0\ -2z^2\ +0\ -8 \\ \quad -\underline{(-2z^2\qquad -8)} \\ \quad\quad 0\qquad\quad 0 \end{array}$$

Die dritte Nullstelle des Polynoms p erhält man dadurch, indem das Ergebnis der Polynomdivision null gesetzt wird. Sie lautet $z_2=2$.

7.5 Abbildungen

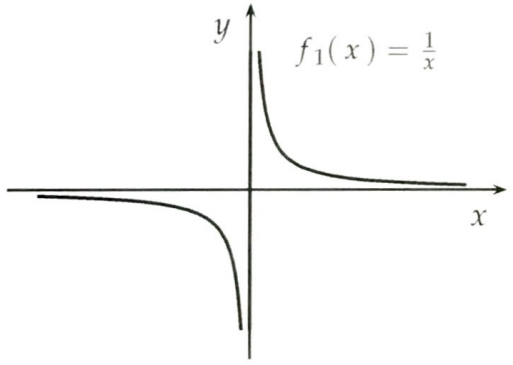
Aufgabe 116 a

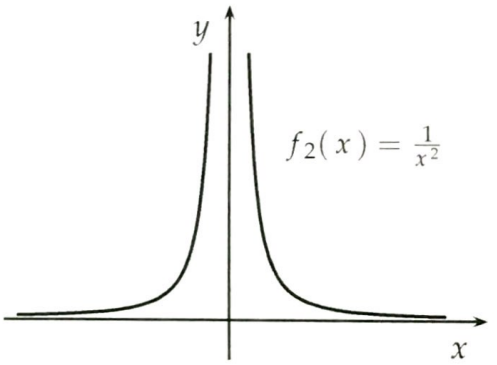
Skizzieren Sie für den jeweils größtmöglichen Definitionsbereich die Bilder der Funktionen

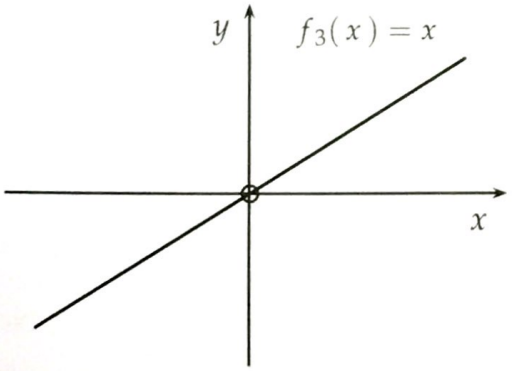
$$f(x),\quad [f(x)]^2,\quad f(x^2),\quad \frac{1}{f(x)} \quad \text{und} \quad f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{für} \quad f(x)=\frac{1}{x}.$$

Lösung:

Für die Funktion $f_1(x) := \frac{1}{x}$ ist der maximale Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für die Funktion $f_2(x) := [f(x)]^2 = f(x^2) = \frac{1}{x^2}$ ist der maximale Definitionsbereich ebenfalls $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für die Funktion $f_3(x) := \frac{1}{f(x)} = f(\frac{1}{x}) = x$ ist der maximale Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die grafischen Darstellungen dieser drei Funktionen sind der folgenden Abbildung zu entnehmen.







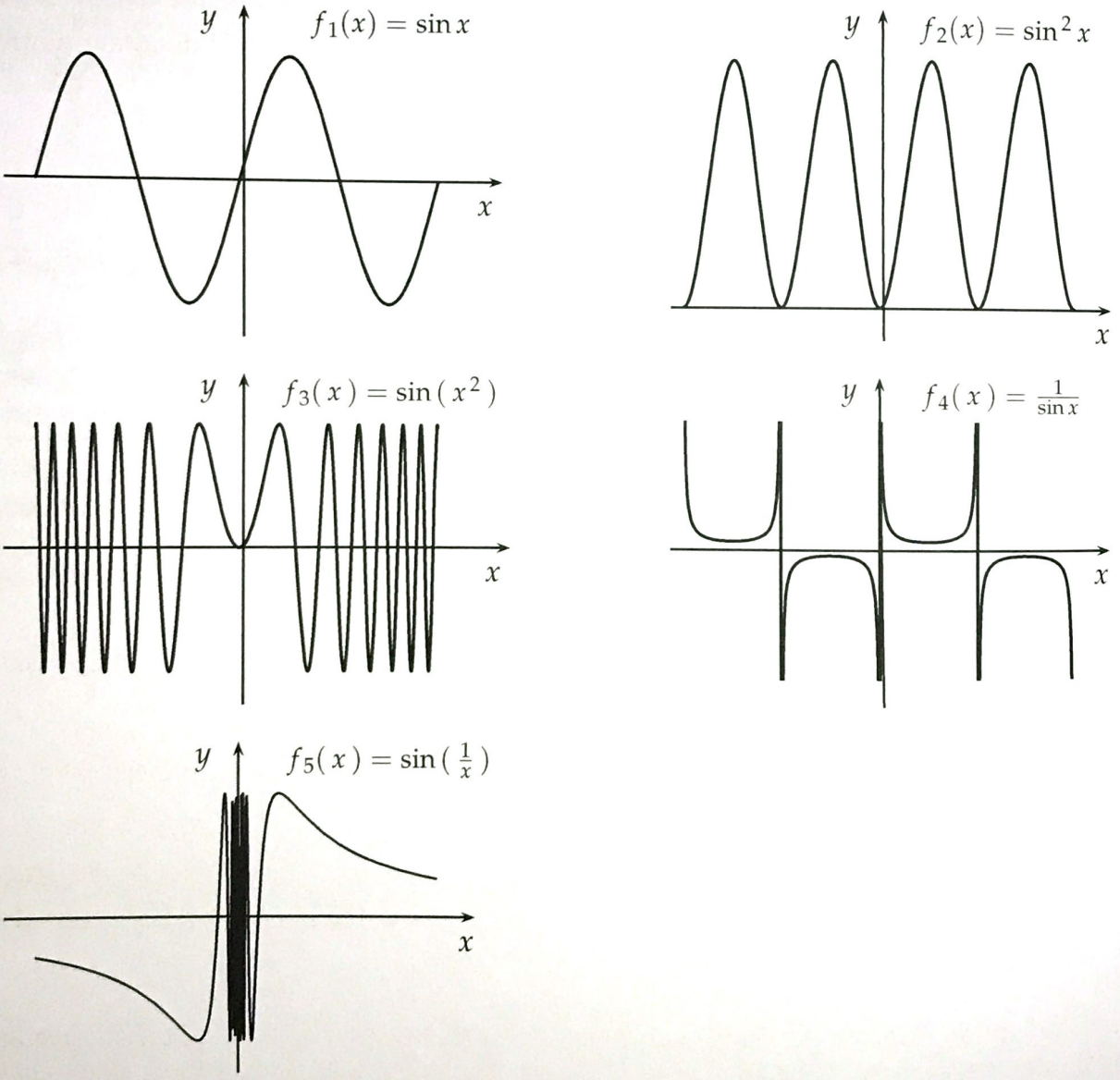
Aufgabe 116 b

Skizzieren Sie für den jeweils größtmöglichen Definitionsbereich die Bilder der Funktionen

$$f(x),\quad [f(x)]^2,\quad f(x^2),\quad \frac{1}{f(x)} \quad \text{und} \quad f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{für} \quad f(x)=\sin x\,.$$

Lösung:

Für $f_1(x) := \sin x$, $f_2(x) := [f(x)]^2 = \sin^2 x$ und $f_3(x) := f(x^2) = \sin(x^2)$ ist der maximale Definitionsbereich jeweils $D = \mathbb{R}$. Für $f_4(x) := \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\sin x}$ ist der maximale Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$ mit $k \in \mathbb{Z}$, weil die Nennernullstellen ausgeschlossen werden müssen. Für $f_5(x) := f(\frac{1}{x}) = \sin(\frac{1}{x})$ ist der maximale Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, weil die Nennernullstelle ausgeschlossen werden muss. Die grafischen Darstellungen dieser fünf Funktionen zeigt die folgende Abbildung.



Aufgabe 117

Durch welche der folgenden Zuordnungsvorschriften sind Funktionen $y = f(x)$ mit $f: D \to \mathbb{R}$ definiert? Fertigen Sie jeweils eine Skizze an!

a) $y^2 = x \quad , D = \mathbb{R}^+$

b) $\arctan y = e^{-|x|} \quad , D = \mathbb{R}$

c) $y = \begin{cases} 2 & \text{für} \quad x \neq 0 \\ x & \text{für} \quad x^2 = x \end{cases} \quad , D = \mathbb{R}$

d) $y = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für} \quad x > 0 \\ 0 & \text{für} \quad x \leq 0 \end{cases} \quad , D = \mathbb{R}$

e) $y = \begin{cases} x^2 + 1{,}04 & \text{für} \quad x \leq 1{,}6 \\ 3x - 1{,}2 & \text{für} \quad x \geq 1{,}6 \end{cases} \quad , D = \mathbb{R}$

f) $\tan y = x \quad , D = \mathbb{R}$

g) $|y| = \dfrac{\ln x}{x^2 + 1} \quad , D = [1, \infty[$

Lösung zu a):
Durch die Zuordnungsvorschrift $y^2 = x$ ist keine Funktion definiert, da es zum Beispiel zu dem Urbild $x = 1$ zwei Bilder $y = -1$ und $y = 1$ gibt.

Lösung zu b):
Die Zuordnungsvorschrift $\arctan y = e^{-|x|}$ definiert eine Funktion, da $-\frac{\pi}{2} < e^{-|x|} < \frac{\pi}{2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt und damit $e^{-|x|}$ im Wertebereich von $\arctan: \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ liegt, die ja bijektiv ist.

Lösung zu c):
Durch die Zuordnungsvorschrift wird keine Funktion definiert, da für das Urbild $x = 1$ zwei Bilder $y = 2$ und $y = 1$ existieren.

Lösung zu d):
Die Zuordnungsvorschrift definiert eine Funktion, da es für jedes Urbild nur ein Bild gibt.

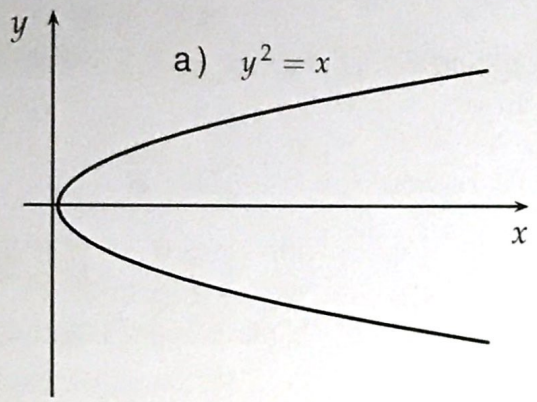
Lösung zu e):
Die Zuordnungsvorschrift definiert eine Funktion, da es für jedes Urbild nur ein Bild gibt.

Lösung zu f):
Durch die Zuordnungsvorschrift wird keine Funktion definiert, da es zum Beispiel für das Urbild $x = 1$ unendlich viele Bilder $y = \frac{\pi}{4} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ gibt.

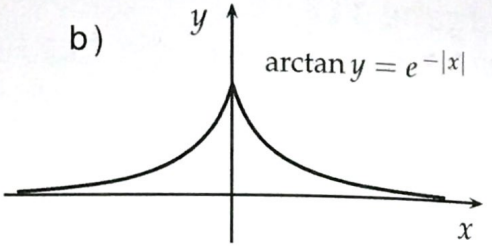
Lösung zu g):
Durch die Zuordnungsvorschrift wird hier keine Funktion definiert, da es für jedes Urbild $x \in D \setminus \{1\}$ wegen des Betrags immer zwei Bilder gibt.

In den folgenden Abbildungen sind die grafischen Darstellungen der einzelnen Zuordnungsvorschriften gezeichnet.

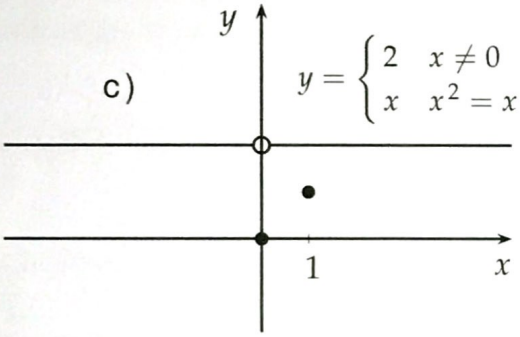
a) $y^2 = x$



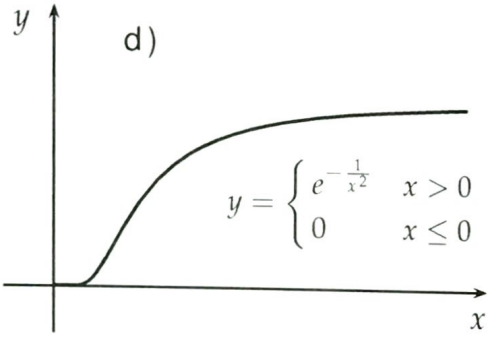
b) $\arctan y = e^{-|x|}$



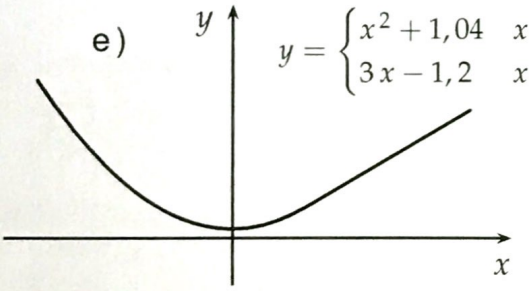
c) $y = \begin{cases} 2 & x \neq 0 \\ x & x^2 = x \end{cases}$



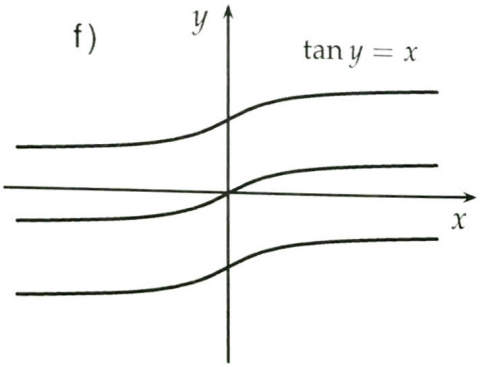
d) $y = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$



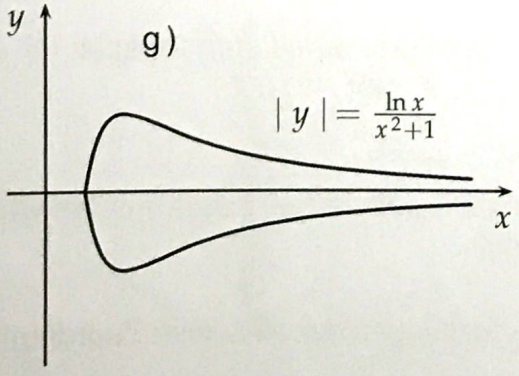
e) $y = \begin{cases} x^2 + 1{,}04 & x \leq 1{,}6 \\ 3x - 1{,}2 & x \geq 1{,}6 \end{cases}$



f) $\tan y = x$



g) $|y| = \frac{\ln x}{x^2+1}$



Aufgabe 118

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $b > 0$. Geben Sie für die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{b - |a - 2x|}}$$

den größtmöglichen Definitionsbereich D in Intervallschreibweise an.

Lösung:

Die Funktion ist nur dann definiert, wenn das Argument in der Wurzel positiv ist. Also für

$$b - |a - 2x| > 0 \Leftrightarrow b > |a - 2x| \Leftrightarrow -b < a - 2x < b \Leftrightarrow -b - a < -2x < b - a.$$

Bei Division der letzten Ungleichung durch die Zahl -2 drehen sich beide Ungleichheitszeichen um und der maximale Definitionsbereich D ergibt sich zu

$$D = \left]\frac{a-b}{2}, \frac{a+b}{2}\right[.$$

Aufgabe 119

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ der folgenden Funktionen, und untersuchen Sie sie auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 \qquad\qquad g : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{4-x}} - 7$$

Lösung:

Für $f(x) = x^2$ ist der maximale Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$. f ist nicht injektiv, da zum Beispiel für $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ das selbe Bild $f(-1) = f(1) = 1$ existiert. f ist auch nicht surjektiv, da für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $y < 0$ kein Urbild existiert. Somit ist f auch nicht bijektiv.

Für $g(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x}} - 7$ lautet der maximale Definitionsbereich $D =]-\infty, 4[$. Denn die Wurzel $\sqrt{4-x}$ ist nur für positive Argumente einschließlich der Null definiert. Also muss $4 - x \geq 0$ sein. Da die Wurzel im Nenner steht, ist die Nennernullstelle $x = 4$ unzulässig. Daher muss $4 - x > 0 \Leftrightarrow x < 4$ sein. Die Funktion g ist auch injektiv, denn für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt:

$$\begin{aligned}
& g(x_1) = g(x_2) \\
\Rightarrow \quad & \frac{1}{\sqrt{4-x_1}} - 7 = \frac{1}{\sqrt{4-x_2}} - 7 && | +7 \\
\Rightarrow \quad & \frac{1}{\sqrt{4-x_1}} = \frac{1}{\sqrt{4-x_2}} && | \cdot \sqrt{4-x_1}\sqrt{4-x_2} \\
\Rightarrow \quad & \sqrt{4-x_2} = \sqrt{4-x_1} && | \ (\ )^2 \\
\Rightarrow \quad & 4 - x_2 = 4 - x_1 && | -4 + x_1 + x_2 \\
\Rightarrow \quad & x_1 = x_2
\end{aligned}$$

g ist nicht surjektiv, da für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $y \leq -7$ kein Urbild existiert. Somit ist g auch nicht bijektiv.

Aufgabe 120

Untersuchen Sie für die jeweils angegebene Wahl des Definitionsbereichs D und Wertebereichs W der Funktion

$$f : D \to W \qquad \text{mit} \qquad f(x) = x^2 - 2x + 1$$

auf Injektivität und Surjektivität und kreuzen Sie die jeweils richtige Antwort an.

D	W	injektiv		surjektiv	
		ja	nein	ja	nein
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	○	○	○	○
$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$	$\{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$	○	○	○	○
$[-1, 1]$	$[0, 4]$	○	○	○	○
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$	$\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$	○	○	○	○

Lösung:

Um die Lösung dieser Aufgabe zu finden, zeichnet man sich die Parabel mit den entsprechenden Definitions- und Wertebereichen in ein Koordinatensystem. Dann lässt sich leicht ablesen ob die Funktion injektiv und/oder surjektiv ist.

	D	W	injektiv		surjektiv	
			ja	nein	ja	nein
$i)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	○	⊗	○	⊗
$ii)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$	$\{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$	⊗	○	○	⊗
$iii)$	$[-1, 1]$	$[0, 4]$	⊗	○	⊗	○
$iv)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$	$\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$	○	⊗	⊗	○

- In der ersten Zeile $i)$ ist f nicht injektiv, da z.B. für $0 \in D$ und $2 \in D$ das selbe Bild $f(0) = f(2) = 1$ existiert. Die Funktion $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ ist nicht surjektiv, da für $y \in \mathbb{R}$ mit $y < 0$ kein Urbild existiert.
- In der zweiten Zeile $ii)$ ist f injektiv, da für alle $x < 0$ die Parabel streng monoton fallend ist. Die Funktion f ist nicht surjektiv, da z.B. für $y = \frac{1}{2}$ kein Urbild existiert.
- In der dritten Zeile $iii)$ ist f injektiv, da für alle $x \in [-1, 1]$ die Parabel streng monoton fallend ist. Die Funktion f ist surjektiv, da für alle $y \in [0, 4]$ ein Urbild mit $x \in [-1, 1]$ existiert.

- In der vierten Zeile $iv)$ ist f nicht injektiv, da z.B. für $0 \in D$ und $2 \in D$ das selbe Bild $f(0) = f(2) = 1$ existiert. Die Funktion f ist surjektiv, da für alle $y \geq 0$ mindestens ein Urbild mit $x \geq 0$ existiert.

Aufgabe 121

Entscheiden Sie über Injektivität, Surjektivität beziehungsweise Bijektivität der Funktion

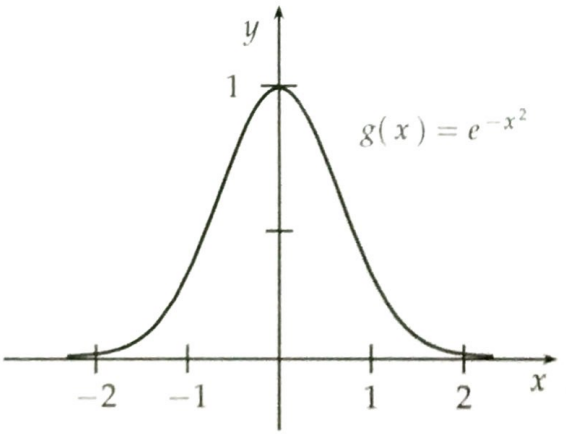
$$g : A \to B \qquad \text{mit} \qquad x \mapsto \exp(-x^2),$$

wenn folgende Mengen A und B vorgegeben sind. Kreuzen Sie die jeweils richtige Antwort in der Tabelle an. Bestimmen Sie weiterhin die Umkehrfunktion für die bijektive Abbildung $g : A \to B$.

A	B	injektiv	surjektiv	bijektiv
$[1, \infty[$	$\mathbb{R}$	○	○	○
$]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$	$]0, \frac{1}{\sqrt{e}}]$	○	○	○
$]-\infty, \frac{1}{2}[$	$]0, 1]$	○	○	○

Lösung:

Um die Lösung dieser Aufgabe zu finden, zeichnet man sich den Graphen der Funktion mit den entsprechenden Definitions- und Wertebereichen in ein Koordinatensystem. Dann lässt sich leicht ablesen, ob die Funktion injektiv und/oder surjektiv ist. Die folgende Abbildung zeigt den Verlauf des Graphen.



	A	B	injektiv	surjektiv	bijektiv
$i)$	$[1, \infty[$	$\mathbb{R}$	⊗	○	○
$ii)$	$]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$	$]0, \frac{1}{\sqrt{e}}]$	⊗	⊗	⊗
$iii)$	$]-\infty, \frac{1}{2}[$	$]0, 1]$	○	⊗	○

i) Die Funktion g ist injektiv, da sie für alle $x \in A$ streng monoton fallend ist. g ist nicht surjektiv, da zu $y \in B$ mit $y < 0$ kein Urbild existiert. Weil g nicht surjektiv ist, ist sie auch nicht bijektiv.

- In der vierten Zeile $iv)$ ist f nicht injektiv, da z.B. für $0 \in D$ und $2 \in D$ das selbe Bild $f(0) = f(2) = 1$ existiert. Die Funktion f ist surjektiv, da für alle $y \geq 0$ mindestens ein Urbild mit $x \geq 0$ existiert.

Aufgabe 121

Entscheiden Sie über Injektivität, Surjektivität beziehungsweise Bijektivität der Funktion

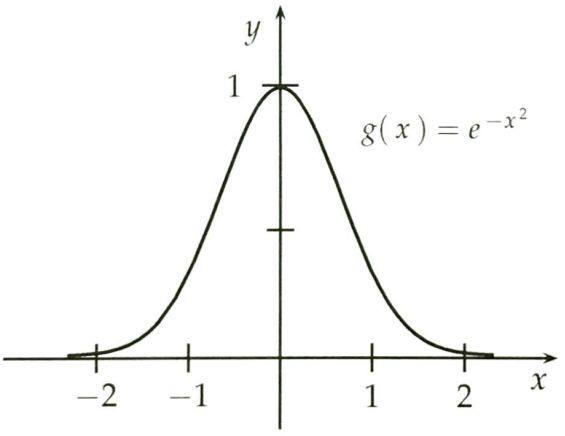
$$g : A \to B \qquad \text{mit} \qquad x \mapsto \exp(-x^2),$$

wenn folgende Mengen A und B vorgegeben sind. Kreuzen Sie die jeweils richtige Antwort in der Tabelle an. Bestimmen Sie weiterhin die Umkehrfunktion für die bijektive Abbildung $g : A \to B$.

A	B	injektiv	surjektiv	bijektiv
$[1, \infty[$	$\mathbb{R}$	○	○	○
$]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$	$]0, \frac{1}{\sqrt{e}}]$	○	○	○
$]-\infty, \frac{1}{2}[$	$]0, 1]$	○	○	○

Lösung:

Um die Lösung dieser Aufgabe zu finden, zeichnet man sich den Graphen der Funktion mit den entsprechenden Definitions- und Wertebereichen in ein Koordinatensystem. Dann lässt sich leicht ablesen, ob die Funktion injektiv und/oder surjektiv ist. Die folgende Abbildung zeigt den Verlauf des Graphen.



	A	B	injektiv	surjektiv	bijektiv
$i)$	$[1, \infty[$	$\mathbb{R}$	⊗	○	○
$ii)$	$]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$	$]0, \frac{1}{\sqrt{e}}]$	⊗	⊗	⊗
$iii)$	$]-\infty, \frac{1}{2}[$	$]0, 1]$	○	⊗	○

i) Die Funktion g ist injektiv, da sie für alle $x \in A$ streng monoton fallend ist. g ist nicht surjektiv, da zu $y \in B$ mit $y < 0$ kein Urbild existiert. Weil g nicht surjektiv ist, ist sie auch nicht bijektiv.

ii) Die Funktion g ist injektiv, da sie für alle $x \in A$ streng monoton steigend ist. g ist surjektiv, da zu jedem $y \in B$ ein Urbild $x \in A$ existiert. Weil g injektiv und surjektiv ist, ist sie auch bijektiv.

iii) Die Funktion g ist nicht injektiv, da zum Beispiel für $x_1 = -\frac{1}{4}$ und $x_2 = \frac{1}{4}$ das selbe Bild $g(-\frac{1}{4}) = g(\frac{1}{4}) = e^{-\frac{1}{16}}$ existiert. Die Funktion g ist surjektiv, da es für jedes $y \in B$ ein $x \in A$ gibt. Weil die Funktion nicht injektiv ist, ist sie auch nicht bijektiv.

Aufgabe 122

Ist die Abbildung f injektiv und/oder surjektiv?

$$f : \mathbb{Z} \to \{q \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq q \leq 1\} \qquad \text{mit} \qquad f(a) = \frac{|a|}{2a^2+2}.$$

Lösung:

Die Funktion f ist nicht injektiv, da zum Beispiel für $a_1 = -1$ und $a_2 = 1$ das selbe Bild $f(-1) = f(1) = \frac{1}{4}$ existiert. f ist auch nicht surjektiv, da für $y \in \{q \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq q \leq 1\}$ mit $y > \frac{1}{4}$ kein Urbild $x \in \mathbb{Z}$ existiert. Denn es gilt für alle $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
& 0 \leq (|a| - 1)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & 0 \leq |a|^2 - 2|a| + 1 && | \; +2|a| \\
\Leftrightarrow \quad & 2|a| \leq |a|^2 + 1 && | : 2 \quad \text{und} \quad |a|^2 = a^2 \\
\Leftrightarrow \quad & |a| \leq \frac{1}{2}(a^2+1) \\
\Leftrightarrow \quad & |a| \leq \frac{1}{4}(2a^2+2) && | : (2a^2+2) \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{|a|}{2a^2+2} \leq \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Aufgabe 123 a

Betrachten Sie die Funktion $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ mit $f(x) := \sin(x)$. Wie kann man die Mengen A und B wählen, so dass die Funktion $f(x)$

$i)$ injektiv, $ii)$ surjektiv, oder $iii)$ bijektiv ist?

Lösung:

$f(x) = \sin(x)$ ist auf jedem Intervall $A = \left[\frac{(2k-1)}{2}\pi, \frac{(2k+1)}{2}\pi\right]$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und $B := [-1, 1]$ injektiv. f ist zum Beispiel für $A = \mathbb{R}$ und $B = [-1, 1]$ surjektiv. f ist zum Beispiel für $A = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und $B = [-1, 1]$ bijektiv.

Aufgabe 123 b

Beweisen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x + 2$ bijektiv ist.

Lösung:

Dazu ist zu zeigen, dass aus $f(x_1) = f(x_2)$ stets $x_1 = x_2$ folgt für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Seien also x_1 und x_2 zwei beliebige Zahlen aus dem Definitionsbereich. Dann folgt aus $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 + 2 = x_2 + 2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Damit ist bewiesen, dass f injektiv ist. Um zu zeigen dass f surjektiv ist, muss zu jedem y aus dem Wertebereich ein x aus dem Definitionsbereich existieren mit $f(x) = y$. Sei $x := y - 2$ für jedes y aus dem Wertebereich. Dann ist $f(x) = y - 2 + 2 = y$ und somit ist die Funktion f auch surjektiv. Da f injektiv und surjektiv ist, ist sie auch bijektiv.

Aufgabe 124 a

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ der folgenden Funktion und untersuchen Sie sie auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\pi}{2} \sin(x)$$

Lösung:
Der maximale Definitionsbereich der Sinusfunktion lautet $D = \mathbb{R}$. f ist nicht injektiv, da zum Beispiel für $x_1 = 0$ und $x_2 = \pi$ das selbe Bild $f(0) = f(\pi) = 0$ existiert. Wählt man für den Wertebereich das Intervall $W = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, dann ist f surjektiv. f ist nicht bijektiv da sie nicht injektiv ist.

Aufgabe 124 b

Welche Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ kann man maximal als Definitions- und Wertebereich wählen, damit $f : A \to A, \quad x \mapsto \frac{\pi}{2} \sin(x)$ eine bijektive Funktion ist?

Lösung:
Wählt man zum Beispiel für den Definitionsbereich $D = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und für den Wertebereich $W = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, dann ist $A = D = W$ und die Funktion ist auf diesem Intervall injektiv und surjektiv, also damit auch bijektiv.

Aufgabe 125

Sind die folgenden Zuordnungen injektive, surjektive oder gar keine Funktionen? Begründen Sie Ihre Antworten anhand einer Skizze!

$a)\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{für } x \geq 1, \\ 2 & \text{für } x < 1. \end{cases}$ $\quad b)\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -x^5$

$c)\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} e^x & \text{für } x \geq 0, \\ x^3 & \text{für } x \leq 1. \end{cases}$ $\quad d)\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \arctan(x)$

$e)\ f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [0, 1], \quad f(x) = \cos(x)$

Lösung zu a):
Die Zuordnung beschreibt eine Funktion, da es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ genau ein $y \in \mathbb{R}^+$ gibt. Die Funktion ist nicht injektiv, da es zum Beispiel zu den Urbildern $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ dasselbe Bild $f(-1) = f(1) = 2$ gibt. Die Funktion ist nicht surjektiv, da es für alle $0 < y < 2$ kein Urbild $x \in \mathbb{R}$ gibt.

Lösung zu b):
Die Zuordnung beschreibt eine Funktion, da es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ genau ein $y \in \mathbb{R}$ gibt. Die Funktion ist injektiv, da jede parallele Gerade zur x - Achse den Graphen nur einmal schneidet. Die Funktion ist surjektiv, da jede parallele Gerade zur x - Achse den Graphen in mindestens (hier in genau) einem Punkt schneidet.

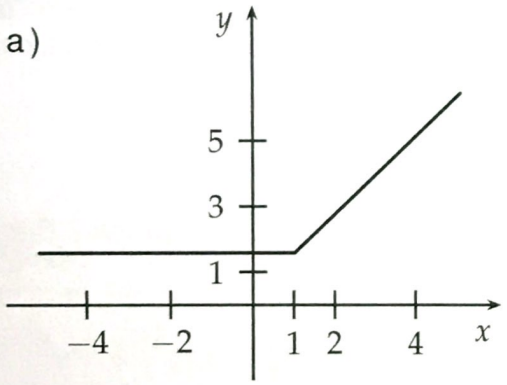
Lösung zu c):
Die Zuordnung beschreibt keine Funktion, da für zum Beispiel $x = 1$ zwei verschiedene Bilder $y_1 = e$ und $y_2 = 1$ existieren.

Lösung zu d):
Die Zuordnung beschreibt eine Funktion, da es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ genau ein $y \in \mathbb{R}$ gibt. Die Funktion ist injektiv, da jede parallele Gerade zur x - Achse den Graphen nur einmal schneidet. Die Funktion ist nicht surjektiv, da es für alle $y \in \mathbb{R} \setminus]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ kein Urbild $x \in \mathbb{R}$ gibt.

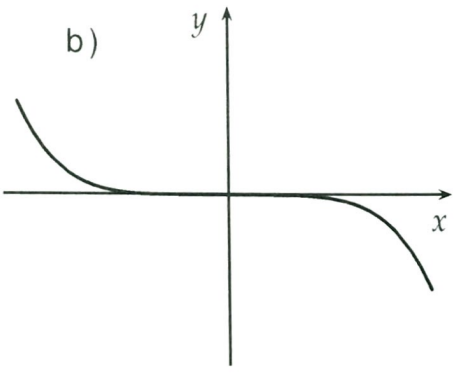
Lösung zu e):
Die Zuordnung beschreibt eine Funktion, da es zu jedem $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ genau ein $y \in [0, 1]$ gibt. Die Funktion ist nicht injektiv, da es zum Beispiel zu den Urbildern $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ und $x_2 = \frac{\pi}{2}$ das selbe Bild $f(-\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$ gibt. Die Funktion ist surjektiv, da jede parallele Gerade zur x - Achse den Graphen in mindestens einem Punkt schneidet.

In den folgenden Abbildungen sind die grafischen Darstellungen der einzelnen Zuordnungsvorschriften gezeichnet.

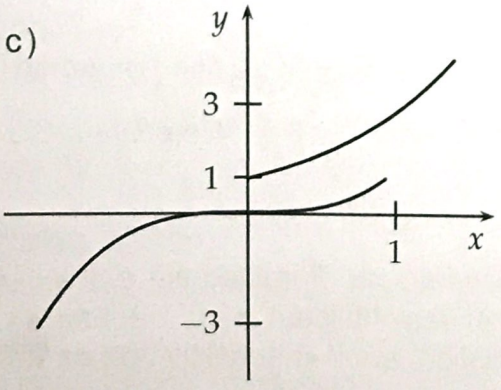
a)



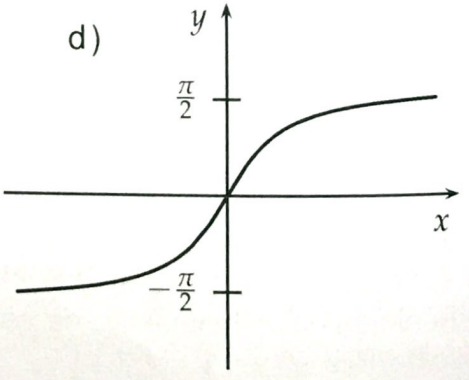
b)



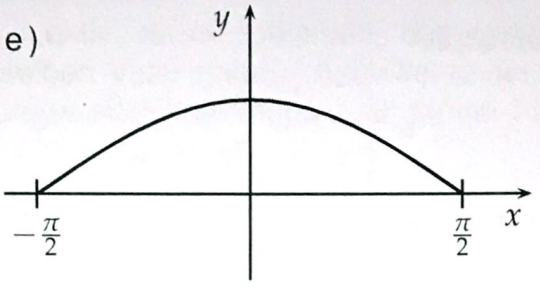
c)



d)



e)



Aufgabe 126 a

Gegeben seien die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1 + x^2 \qquad \text{und} \qquad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1 + (\sin x \cdot \cos x)^2 .$$

Gibt es eine Funktion g mit $h = f \circ g$? Falls ja, geben Sie eine solche an.

Lösung:
Eine solche Funktion gibt es. $g_1(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$ oder $g_2(x) = -\sin(x) \cdot \cos(x)$ wären zwei Möglichkeiten.

Aufgabe 126 b

Gegeben seien die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1 + x^2 \qquad \text{und} \qquad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1 + x^3 .$$

Gibt es eine Funktion g mit $h = g \circ f$? Falls ja, geben Sie eine solche an.

Lösung:
Eine solche Funktion existiert nicht. Denn was auch immer g ist, so gilt

$$(g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(2) = g(f(1)) = (g \circ f)(1) .$$

Aber es ist $h(-1) = 0 \neq 2 = h(1)$, also ist $g \circ f \neq h$.

Aufgabe 127 a

Definiert die Zuordnungsvorschrift

$$y = \begin{cases} -1 & \text{für } x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ \sin x & \text{für } x > -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

eine Funktion $y = f(x)$ mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? Ist die Funktion injektiv? Berechnen Sie falls möglich die Inverse.

Lösung:
Die Zuordnung beschreibt eine Funktion, weil jedem $x \in \mathbb{R}$ genau einem $y \in \mathbb{R}$ zugeordnet wird. Die Funktion ist nicht injektiv, da zum Beispiel für $x_1 = 0$ und $x_2 = \pi$ der selbe Funktionswert $f(0) = f(\pi) = 0$ zugeordnet wird. Daher ist die Funktion auch nicht umkehrbar.

Aufgabe 127 b

Definiert die Zuordnungsvorschrift

$$y = \begin{cases} -x^2 & \text{für} \quad x \geq 0, \\ x & \text{für} \quad x > 0. \end{cases}$$

eine Funktion $y = f(x)$ mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? Ist die Funktion injektiv? Berechnen Sie falls möglich die Inverse.

Lösung:
Diese Zuordnung beschreibt keine Funktion, da es zum Beispiel für $x = 1$ zwei verschiedene y - Werte $y_{1,2} = \pm 1$ gibt.

Aufgabe 127 c

Definiert die Zuordnungsvorschrift $\cos y = x$ eine Funktion $y = f(x)$ mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? Ist die Funktion injektiv? Berechnen Sie falls möglich die Inverse.

Lösung:
Diese Zuordnung beschreibt keine Funktion, da es zum Beispiel für $x = 0$ unendlich viele verschiedene y - Werte $y_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ gibt.

Aufgabe 128

Sei H die Menge aller lebenden Menschen, sowie W die Menge aller lebenden Menschen weiblichen Geschlechts und $M := H \setminus W$ die Menge aller lebenden Menschen männlichen Geschlechts. Betrachten Sie die folgenden Abbildungen:

$m : H \to W$ mit $m(x)$ ist die leibliche Mutter von x.

$f : H \to M$ mit $f(x)$ ist der leiblicher Vater von x.

a) Beschreiben Sie in Worten die zusammengesetzten Abbildungen (Kompositionen)

$$m^2 := m \circ m, \qquad g := f \circ m, \qquad h := m \circ f, \qquad \text{gilt} \quad g = h?$$

b) Welche der Abbildungen m, f, m^2, g, h sind injektiv, surjektiv oder bijektiv?

c) Welche Menge wird durch $m^{-1}(W)$ beschrieben?

Lösung zu a):
Die Abbildungen m und f sind nicht für alle $x \in H$ definiert, wenn die Mutter beziehungsweise der Vater von x nicht mehr lebt. Die Definitionsbereiche der Abbildungen müssen also entsprechend eingeschränkt werden. Es gilt:

- $m^2(x) = m \circ m(x)$ ist die Großmutter mütterlicherseits von x, sofern diese noch lebt.
- $g(x) = f \circ m(x)$ ist der Großvater mütterlicherseits von x, sofern dieser noch lebt.
- $h(x) = m \circ f(x)$ ist die Großmutter väterlicherseits von x, sofern diese noch lebt.

Die Abbildungen g und h sind also verschieden.

Lösung zu b):
Keine der Abbildungen ist injektiv, da es vorkommt, dass zwei Menschen dieselbe Mutter beziehungsweise den selben Vater haben. Auch keine der Abbildungen ist surjektiv, da nicht jede Frau beziehungsweise jeder Mann auch Mutter beziehungsweise Vater sein muss.

Lösung zu c):
$m^{-1}(W)$ ist die Menge aller Menschen deren Mutter noch lebt.

Aufgabe 129

Es seien X, Y Mengen. $f: X \to Y$ eine Funktion und $A \subseteq X$. Begründen Sie:

a) Ist f injektiv, so ist $f^{-1}(f(A)) = A$.

b) Im Allgemeinen gilt $f^{-1}(f(A)) = A$ nicht.

Lösung zu a):
Ist $x \in A$, so ist $f(x) \in f(A)$, also $x \in f^{-1}(f(A))$. Ist andererseits $x \in f^{-1}(f(A))$, also $f(x) \in f(A)$, so heißt das, dass es ein $y \in A$ mit $f(y) = f(x)$ gibt. Da $f(x)$ injektiv ist, folgt $x = y$, also $x \in A$. Damit haben A und $f^{-1}(f(A))$ die selben Elemente, sind also gleich.

Lösung zu b):
Ist zum Beispiel $f: [-1, 3] \to [0, 9]$ mit $f(x) = x^2$, dann gilt

$$f^{-1}(f([-1, 3])) = f^{-1}([0, 9]) = [-3, 3] \neq [-1, 3].$$

Aufgabe 130 a

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3 + 4x$. Berechnen Sie, falls möglich, die Umkehrabbildung f^{-1} mit passendem Definitions- und Wertebereich und das Urbild $f^{-1}([-5, 5])$.

Lösung:
Die Funktion ist mit $D = \mathbb{R}$ und $W = \mathbb{R}$ injektiv und surjektiv. Daher existiert die Umkehrabbildung $f^{-1}(y)$. Zu der Umkehrabbildung gelangt man, indem man einfach die Gleichung $y = 3 + 4x$ nach x auflöst. Dann erhält man die Lösung $f^{-1}(y) = \frac{1}{4}y - \frac{3}{4}$. Um das Urbild von $f^{-1}([-5, 5])$ zu bestimmen, sucht man alle diejenigen $x \in D$ für die $-5 \leq f(x) \leq 5$ gilt. Dazu löst man die Gleichungen $3 + 4x = -5 \Leftrightarrow x = -2$ und $3 + 4x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Dann ist die Menge $A \subset D$ der Urbilder gegeben durch $A = [-2, \frac{1}{2}]$.

Aufgabe 130 b

Gegeben sei die Funktion $f: [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - 3$. Berechnen Sie, falls möglich, die Umkehrabbildung f^{-1} mit passendem Definitions- und Wertebereich und das Urbild $f^{-1}([1, 5])$.

Lösung:
Es handelt sich hier um eine nach oben geöffnete Parabel, die ihren Scheitel im Punkt $S(0,-3)$ hat. Für den Definitionsbereich $D=[0,\infty[$ ist die Funktion injektiv, da jede zur x - Achse parallel verlaufende Gerade den Graphen in genau nur einem Punkt schneidet. Der minimale Wertebereich ist $W=[-3,\infty[$, weil der Scheitelpunkt der tiefste Punkt der Parabel ist. Mit dem so gewählten Definitions- und Wertebereich ist die Funktion f bijektiv und somit umkehrbar. Um die Umkehrabbildung zu finden, löst man die Gleichung $y=2x^2-3$ nach x auf.

$$y=2x^2-3 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}}$$

Der Wertebereich der gesuchten Umkehrfunktion muss mit dem Definitionsbereich der Funktion übereinstimmen. Daher kommt nur die positive Lösung in Betracht und die Umkehrfunktion lautet $f^{-1}(y)=\sqrt{\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}}$. Um das Urbild $f^{-1}([1,5])$ zu bestimmen löst man die Gleichungen $2x^2-3=1 \Leftrightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$ und $2x^2-3=5 \Leftrightarrow x_{3,4}=\pm 2$, womit die Urbildmenge $A\subset D$ dann gegeben ist durch $A=[\sqrt{2},2]$.

Aufgabe 131 a

Für welche $y\in\mathbb{R}$ ist die Gleichung $x^2+2x=y$ lösbar? Für welche y ist sie eindeutig lösbar?

Lösung:
Mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen erhält man $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{1+y}$. Die Gleichung besitzt offenbar nur dann Lösungen, wenn der Radikand $1+y\geq 0 \Leftrightarrow y\geq -1$ ist. Für $y=-1$ ist die Lösung sogar eindeutig und lautet $x=-1$.

Aufgabe 131 b

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x$. Bestimmen Sie $f(\mathbb{R})$. Ist f injektiv?

Lösung:
Es handelt sich hier ganz offensichtlich um eine nach oben geöffnete Parabel. Es gilt $f(x)=x^2+2x=(x+1)^2-1$ und der Scheitelpunkt liegt in $S(-1,-1)$, der gleichzeitig der tiefste Punkt der Parabel ist. Damit ergibt sich für den Wertebereich der Parabel $W=f(\mathbb{R})=[-1,\infty[$. Die Funktion ist nicht injektiv, da zum Beispiel für $x_1=-2$ und $x_2=0$ der selbe Funktionswert $f(-2)=f(0)=0$ existiert.

Aufgabe 131 c

Hat $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x):=7x+5$ eine Umkehrfunktion? Falls ja, welche?

Lösung:
Es handelt sich hier um eine steigende lineare Funktion die injektiv ist, da jede zur x-Achse parallel verlaufende Gerade den Graphen in genau einem Punkt schneidet. Die Funkion ist auch surjektiv, da es zu jedem $y\in\mathbb{R}$ ein $x\in\mathbb{R}$ gibt.

Dann existiert auch die Umkehrfunktion $f^{-1}(y)$, die man durch Auflösen der Gleichung $y = 7x + 5$ nach x erhält.

$$y = 7x + 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{7}y - \frac{5}{7} \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(y) = \frac{1}{7}y - \frac{5}{7}$$

Aufgabe 131 d

Welche der Funktionen sind injektiv? Bestimmen Sie, falls möglich, die Umkehrfunktion inklusive ihres maximalen Definitionsbereichs.

$$g : [-1, 5[\to \mathbb{R} \qquad x \mapsto x^2$$

$$h : [3, 8] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto (x-3)^2$$

Lösung:

$g(x)$ ist nicht injektiv, da zum Beispiel für $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ der selbe Funktionswert $g(-1) = g(1) = 1$ existiert. Es gibt demnach auch keine Umkehrfunktion von $g(x)$.

$h(x)$ ist eine nach oben geöffnete Parabel mit dem Scheitelpunkt $S(3, 0)$. In dem Definitionsbereich $D = [3, 8]$ ist die Funktion injektiv, da jede zur x- Achse parallel verlaufende Gerade den Graphen in höchstens einem Punkt schneidet. Der Wertebereich ist dann $W = [h(3), h(8)] = [0, 25]$. Um die Umkehrfunktion $h^{-1}(y)$ zu bestimmen, wird die Gleichung $y = (x-3)^2$ nach x aufgelöst. Man erhält dann zwei mögliche Lösungen $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{y}$. Der Wertebereich der Umkehrfunktion muss gleich dem Definitionsbereich der Funktion sein und daher kommt nur die Lösung $h^{-1}(y) = 3 + \sqrt{y}$ infrage.

Aufgabe 132 a

Sei $f : D \to W$, $x \mapsto \sqrt{x}$. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ und minimalen Wertebereich $W \subset \mathbb{R}$ der Abbildung. Ist die Abbildung injektiv? Geben Sie falls möglich die Umkehrabbildung an.

Lösung:

Die Wurzelfunktion ist für alle positiven reellen Zahlen inklusive der Null definiert. Der maximale Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R}_0^+$. Der minimale Wertebereich ist ebenfalls $W = \mathbb{R}_0^+$. Die Funktion ist injektiv, da jede parallele Gerade zur x - Achse den Graphen höchstens einmal schneidet. Die Funktion ist surjektiv, da jede parallele Gerade zur x - Achse den Graphen in mindestens (hier in genau) einem Punkt schneidet. Die Umkehrfunktion existiert somit und lautet $f^{-1}(y) = y^2$ mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}_0^+$.

Aufgabe 132 b

Sei $f : D \to W$, $x \mapsto \sqrt{5 - x^2}$. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ und minimalen Wertebereich $W \subset \mathbb{R}$ der Abbildung. Ist die Abbildung injektiv? Geben Sie falls möglich die Umkehrabbildung an.

Lösung:

Die Wurzel ist nur für positive Argumente definiert. Aus $5 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 5$ ergibt sich der maximale Definitionsbereich zu $D = [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$.

Die Funktion ist nicht injektiv , da für zum Beispiel $x_1 = -\sqrt{5}$ und $x_2 = \sqrt{5}$ die selben Bilder $f(-\sqrt{5}) = f(\sqrt{5}) = 0$ existieren. Damit ist die Funktion auf dem maximalen Definitionsbereich auch nicht umkehrbar.

Aufgabe 132 c

Sei $f : D \to W,\ x \mapsto \frac{x^2+1}{(x-1)(x-5)(x+2)}$. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ und minimalen Wertebereich $W \subset \mathbb{R}$ der Abbildung. Ist die Abbildung injektiv? Geben Sie falls möglich die Umkehrabbildung an.

Lösung:
Es handelt sich hier um eine gebrochen rationale Funktion. Der maximale Definitionsbereich sind alle reellen Zahlen ohne die Nennernullstellen, also $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 5\}$. An den Stellen $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 5$ liegen jeweils Polstellen mit Vorzeichenwechsel vor und andererseits ist die x - Achse die Asymptote der Funktion, weil der Zählergrad kleiner als der Nennergrad ist. Damit ergibt sich der minimale Wertebereich zu $W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die Funktion ist nicht injektiv, da hier drei Polstellen mit Vorzeichenwechsel vorliegen und somit jede parallele Gerade zur x - Achse den Graphen an mindestens drei Punkten schneidet. Daher existiert auch keine Umkehrfunktion von f.

Aufgabe 133 a

Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3 + 5$ injektiv? Falls ja, bestimmen Sie die Umkehrfunktion einschließlich ihres maximalen Definitionsbereichs!

Lösung:
f ist eine monoton wachsende Funktion und daher schneidet jede zur x - Achse parallele Gerade den Graphen in genau einem Punkt. Also ist f injektiv und die Inverse existiert. Um die Inverse zu ermitteln, löst man die Gleichung $y = x^3 + 5$ nach x auf. Die Inverse lautet dann $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-5}$ mit dem maximalen Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$.

Aufgabe 133 b

Ist die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -5x^2 - 9$ injektiv? Falls ja, bestimmen Sie die Umkehrfunktion einschließlich ihres maximalen Definitionsbereichs!

Lösung:
Die Funktion ist nicht injektiv und somit existiert auch keine Inverse, da sich zum Beispiel für $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ der selbe Funktionswert $g(-1) = g(1) = -14$ ergibt.

Aufgabe 133 c

Ist die Funktion $h : [2, \infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 + 6x + 19$ injektiv? Falls ja, bestimmen Sie die Umkehrfunktion einschließlich ihres maximalen Definitionsbereichs!

Lösung:
Durch binomische Ergänzung lässt sich die Parabel zunächst auf die Scheitelpunktform

$$h(x) = x^2 + 6x + 19 = (x+3)^2 + 10$$

bringen. Daraus lässt sich der Scheitelpunkt $S(-3, 10)$ ablesen. Weil die Parabel nach oben geöffnet ist, ist sie auf dem Intervall $[2, \infty]$ streng monoton steigend und somit injektiv, da jede zur x - Achse parallel verlaufende Gerade den Graphen in höchstens einem Punkt schneidet. Somit existiert die Umkehrfunktion $h^{-1}(y)$, die man durch Auflösung der Gleichung $y = (x+3)^2 + 10 \Leftrightarrow x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{y-10}$ erhält. Da der Wertebereich der Umkehrfunktion mit dem Definitionsbereich der Funktion übereinstimmen muss, kommt nur die positive Wurzel der Lösung in Betracht. Damit lautet die Umkehrfunktion $h^{-1}(y) = -3 + \sqrt{y-10}$. Der maximale Definitionsbereich der Umkehrfunktion ergibt sich aus der Bedingung, dass der Wertebereich der Funktion gleich dem Definitionsbereich der Umkehrfunktion sein muss. Also ist $D = [35, \infty[$.

Aufgabe 133 d

Ist die Funktion $k :]1, \infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$ injektiv? Falls ja, bestimmen Sie die Umkehrfunktion einschließlich ihres maximalen Definitionsbereichs!

Lösung:

Die Funktion $k(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} = \frac{1}{x(1-x)}$ ist für alle $x \in]1, \infty[$ negativ. An der Stelle $x = 1$ hat die Funktion eine Polstelle und die x - Achse ist ihre Asymptote. Dann ist der Wertebereich von $k(x)$ gleich $W =]-\infty, 0[$. Bleibt noch zu zeigen, dass die Funktion injektiv ist und somit umkehrbar. Seien $x_1, x_2 \in]1, \infty[$. Dann folgt:

$$
\begin{aligned}
& k(x_1) = k(x_2) \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{x_1(1-x_1)} = \frac{1}{x_2(1-x_2)} && \mid \cdot x_1(1-x_1) \cdot x_2(1-x_2) \\
\Leftrightarrow \quad & x_2(1-x_2) = x_1(1-x_1) \\
\Leftrightarrow \quad & x_2 - x_2^2 = x_1 - x_1^2 && \mid + x_1^2 - x_1 \\
\Leftrightarrow \quad & x_1^2 - x_2^2 - x_1 + x_2 = 0 && \mid \text{dritte binomische Formel} \\
\Leftrightarrow \quad & (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - (x_1 - x_2) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (x_1 - x_2)[(x_1 + x_2) - 1] = 0
\end{aligned}
$$

Das Produkt ist nur dann null, wenn der erste Faktor $(x_1 - x_2) = 0$ ist. Der zweite Faktor kann wegen $x_1, x_2 > 1$ nie null werden. Also ist $x_1 = x_2$ und somit $k(x)$ injektiv. Um die Umkehrfunktion $k^{-1}(y)$ zu ermitteln wird die Gleichung $y = \frac{1}{x(1-x)}$ nach x aufgelöst. Mithilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen ergeben sich die beiden Lösungen $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{y}}$. Es kommt hier nur die Lösung $k^{-1}(y) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{y}}$ infrage, da der Wertebereich der Umkehrfunktion mit dem Definitionsbereich $]1, \infty[$ der Funktion übereinstimmen muss. Der maximale Definitionsbereich der Umkehrfunktion ist gleich dem Wertebereich $]-\infty, 0[$ der Funktion.

Aufgabe 134 a

Beschreiben Sie die folgende Menge als Vereinigung von Intervallen. Skizzieren Sie sie auf dem Zahlenstrahl.

$$f^{-1}(]0,1[) \quad \text{mit} \quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^2-4.$$

Lösung:
Gesucht sind hier alle Urbilder $x\in\mathbb{R}$, die zu dem Bild $f(x)\in]0,1[$ führen. Diese ergeben sich aus den Lösungen der beiden Gleichungen $x^2-4=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\pm 2$ und $x^2-4=1 \Leftrightarrow x_{3,4}=\pm\sqrt{5}$. Dann ist die Lösungsmenge L die Vereinigung der Intervalle $]-\sqrt{5},-2[$ und $]2,\sqrt{5}[$. Die grafische Darstellung der Menge $f^{-1}(]0,1[)$ zeigt die folgende Abbildung.

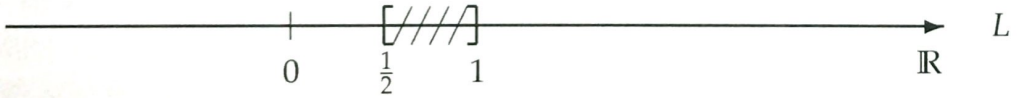


Aufgabe 134 b

Beschreiben Sie die folgende Menge als Vereinigung von Intervallen. Skizzieren Sie sie auf dem Zahlenstrahl.

$$f([-\tfrac{\pi}{2},0])\cap\{x\in\mathbb{R}\mid x^2-\frac{1}{4}\geq 0\} \quad \text{mit} \quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\cos x.$$

Lösung:
Für die Cosinusfunktion liegen die Bilder von $f([-\frac{\pi}{2},0])$ im Intervall $L_1:=[0,1]$. Die Ungleichung $x^2-\frac{1}{4}\geq 0$ wird erfüllt für alle $x\leq -\frac{1}{2}$ oder $x\geq\frac{1}{2}$. Das ist die Menge $L_2:=\mathbb{R}\setminus]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$. Dann ergibt sich die Lösungsmenge L als Schnittmenge der beiden Mengen L_1 und L_2 zu $L=L_1\cap L_2=[\frac{1}{2},1]$. Die grafische Darstellung der Lösungsmenge L zeigt die folgende Abbildung.



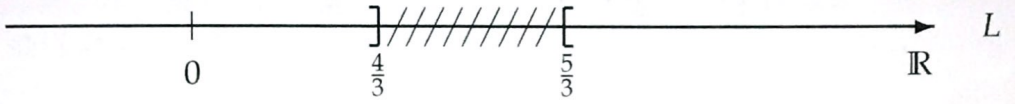
Aufgabe 134 c

Beschreiben Sie die folgende Menge als Vereinigung von Intervallen. Skizzieren Sie sie auf dem Zahlenstrahl.

$$f^{-1}(]1,2[)\cap f([1,2]) \quad \text{mit} \quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto 3x-3.$$

Lösung:
Die Menge aller Urbilder $f^{-1}(]1,2[)$ der Funktion $f(x)=3x-3$ erhält man durch Auflösen der Gleichungen $3x-3=1 \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$ und $3x-3=2 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$. Dann ist die erste Menge $L_1:=]\frac{4}{3},\frac{5}{3}[$. Die Bilder von $f([1,2])$ ergeben sich durch Einsetzen der Randwerte $x_1=1$ und $x_2=2$ in die Funktion. Dann ergibt sich die zweite Menge zu $L_2=[0,3]$.

Die Lösungsmenge L ergibt sich als Schnittmenge der beiden Mengen L_1 und L_2 zu $L = L_1 \cap L_2 =]\frac{4}{3}, \frac{5}{3}[\cap [0,3] =]\frac{4}{3}, \frac{5}{3}[$. Die grafische Darstellung der Lösungsmenge L zeigt die folgende Abbildung.



Aufgabe 135 a

Bestimmen Sie die Urbilder der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$. Beachten Sie dabei, dass f^{-1} im Allgemeinen keine Funktion ist.

$$f^{-1}([-9,0]) \quad \text{mit} \quad f(x) = 3x^2 - 12 \quad \text{und} \quad D = \mathbb{R}.$$

Lösung:

Zu suchen sind also alle $x \in D$, für die $-9 \leq f(x) \leq 0$ gilt. Dazu löst man die beiden Gleichungen $3x^2 - 12 = -9 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 1$ und $3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x_{3,4} = \pm 2$. Die Menge aller Urbilder ist eine Teilmenge $A \subset D$ mit $A = [-2,-1] \cup [1,2]$.

Aufgabe 135 b

Bestimmen Sie die Urbilder der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$. Beachten Sie dabei, dass f^{-1} im Allgemeinen keine Funktion ist.

$f^{-1}([0,1])$ mit $f(x) = \tan x$ und $D =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ und dann mit $D =]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\setminus \{\frac{\pi}{2}\}$.

Lösung:

Zu suchen sind also alle $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, für die $0 \leq f(x) \leq 1$ gilt. Dazu werden die beiden Gleichungen $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ und $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ in diesem Intervall gelöst. Dann lautet die Lösungsmenge $A = [0, \frac{\pi}{4}] \subset D$. Für den Fall, dass $D =]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ ist, tritt in der Lösungsmenge das Intervall A und dann nocheinmal das Intervall um π nach rechts verschoben auf, weil die Tangensfunktion π - periodisch ist. Also lautet die Lösungsmenge in diesem Fall $B = [0, \frac{\pi}{4}] \cup [\pi, \frac{5\pi}{4}] \subset D$.

Aufgabe 135 c

Bestimmen Sie die Urbilder der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$. Beachten Sie dabei, dass f^{-1} im allgemeinen keine Funktion ist.

$$f^{-1}([2,5]) \quad \text{mit} \quad f(x) = x^2 + 1 \quad \text{und} \quad D = \mathbb{R}.$$

Lösung:

Zu suchen sind also alle $x \in D$, für die $2 \leq f(x) \leq 5$ gilt. Dazu werden die beiden Gleichungen $x^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 1$ und $x^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow x_{3,4} = \pm 2$ gelöst. Die Menge aller Urbilder ist eine Teilmenge $A \subset D$ mit $A = [-2,-1] \cup [1,2]$.

Aufgabe 135 d

Bestimmen Sie die Urbilder der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$. Beachten Sie dabei, dass f^{-1} im Allgemeinen keine Funktion ist.

$$f^{-1}(\{1\}) \quad \text{mit} \quad f(x) = \sin x \quad \text{und} \quad D = \mathbb{R}.$$

Lösung:
Zu suchen sind also alle $x \in D$, für die $f(x) = 1$ gilt. Das ist die Menge $A \subset D$ mit $A = \{ x \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$.

Aufgabe 136

Ordnen Sie jeder der fünf Mengen

$$\mathbb{R}, \mathbb{N}_0,]-1, 0], \{\ \} \quad \text{und} \quad \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \text{ ist keine ganze Zahl} \}$$

genau eine der Variablen A, B, C, D und E zu, so dass gilt:

$$A \setminus (B \cup f^{-1}(C \cap D)) = E \qquad \text{mit} \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin(\pi x).$$

Lösung:
Diese Aufgabe ist etwas kniffelig! Um auf eine Lösung zu kommen, muss man zunächst ausprobieren, welche Mengen die geforderte Gleichung erfüllen. Wenn man für $C = \mathbb{N}_0$ und für $D =]-1, 0]$ setzt, dann ergibt sich für $C \cap D = \{0\}$. Dann hat man

$$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(\{0\}).$$

Das bedeutet, dass man alle Zahlen $x \in \mathbb{R}$ finden muss, wo der y - Wert von $\sin(\pi x)$ den Wert null ergibt. Das ist gerade dann der Fall, wenn $x \in \mathbb{Z}$ ist. Somit ergibt sich dann $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{Z}$. Setzt man schließlich $B = \{\ \}$ und $A = \mathbb{R}$, dann ist offensichtlich für $E = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ die Gleichung erfüllt. Denn es gilt

$$\mathbb{R} \setminus (\{\ \} \cup \mathbb{Z}) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

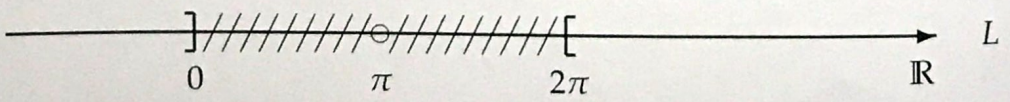
Es gibt aber noch eine zweite Variante! Setzen Sie $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und $E = \{\ \}$ sowie alle anderen Mengen wie eben, dann ergibt sich ebenfalls die wahre Aussage

$$\mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \cup \mathbb{Z}) = \{\ \}.$$

Aufgabe 137 a

Beschreiben Sie die Menge $f^{-1}([-1, 1] \setminus \{0\}) \cap]0, 2\pi]$ mit $f(x) := \sin x$ als Vereinigung und/oder Durchschnitt von Intervallen. Skizzieren Sie sie auf dem Zahlenstrahl.

Lösung:
$f^{-1}([-1, 1] \setminus \{0\})$ sind alle $x \in \mathbb{R}$ für die $-1 \leq \sin x < 0$ oder $0 < \sin x \leq 1$ gilt. Das sind alle reellen Zahlen außer die Nullstellen der Sinusfunktion. Diese Menge lautet $A := \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Die Lösungsmenge L ergibt sich als Schnittmenge der Mengen A und $]0, 2\pi]$. Dann ist $L =]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$ deren grafische Darstellung die folgende Abbildung zeigt.

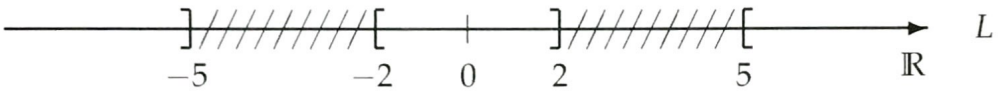


Aufgabe 137 b

Beschreiben Sie die Menge $f^{-1}(\,]2,5[\,)$ mit $f(x) := |\,x\,|$ als Vereinigung und/oder Durchschnitt von Intervallen. Skizzieren Sie sie auf dem Zahlenstrahl.

Lösung:

Zu suchen sind alle $x \in \mathbb{R}$ für die $2 < |\,x\,| < 5 \Leftrightarrow 2 < x < 5 \vee 2 < -x < 5$ gilt. Das sind die Intervalle $]-5,-2[$ und $]2,5[$ deren Vereinigung die gesuchte Lösungsmenge liefert. Die grafische Darstellung von $L :=]-5,-2[\cup]2,5[$ zeigt die folgende Abbildung.

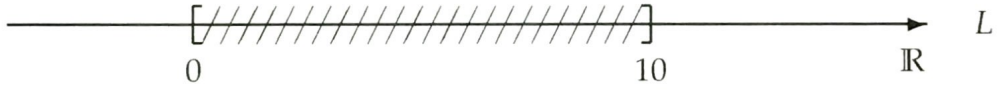


Aufgabe 137 c

Beschreiben Sie die Menge $f([\,-2,2\,]) \cup]0,10]$ mit $f(x) := x^2$ als Vereinigung und/oder Durchschnitt von Intervallen. Skizzieren Sie sie auf dem Zahlenstrahl.

Lösung:

Die Parabel $f(x) = x^2$ bildet das Intervall $[\,-2,2\,]$ auf den Bildbereich $[\,0,4\,]$ ab. Dann ist die gesuchte Lösungsmenge $L := [\,0,4\,] \cup]0,10] = [\,0,10\,]$ deren grafische Darstellung die folgende Abbildung zeigt.

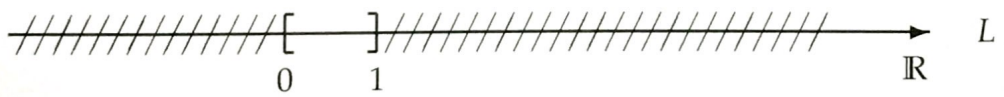


Aufgabe 137 d

Beschreiben Sie die Menge $f^{-1}(\,]0,\infty[\,)$ mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2 - x$ als Vereinigung und/oder Durchschnitt von Intervallen. Skizzieren Sie sie auf dem Zahlenstrahl.

Lösung:

Gesucht sind alle $x \in \mathbb{R}$ für die $x^2 - x > 0 \Leftrightarrow x(x-1) > 0$ ist. Diese Ungleichung wird für $x < 0$ oder $x > 1$ erfüllt. Dann lautet die Lösungsmenge $L :=]-\infty,0[\cup]1,\infty[$, deren grafische Darstellung die folgende Abbildung zeigt.



Namen- und Stichwortverzeichnis

A

Abbildung ... 87
  bijektive ... 91
  Hintereinanderschaltung ... 92
  injektive ... 90
  inverse ... 92
  surjektive ... 91
Absolutbetrag reeller Zahlen ... 38
Achse
  imaginäre ... 52
  reelle ... 52
Additionstheorem ... 59
Adjunktion ... 101
Argument ... 57
arithmetische Folge ... 121
Aussage ... 101

B

Bernoulli - Ungleichung ... 27
Bernoulli, Jakob I. ... 27
Betrag ... 38, 53
Betragsfunktion ... 93
Beweismethoden ... 15
Bild ... 89
Binomialkoeffizient ... 22
binomischer Satz ... 26
Bogenmaß ... 57

C

Cantor, Georg ... 1
Cardanische Formel ... 108
Cardano, Gerolamo ... 108
CAS ... 111
Computeralgebrasystem ... 111

D

Definitionsbereich ... 87
Differenzmenge ... 11
Dilemma des Pythagoras ... 6
direkter Beweis ... 15
Diskriminante ... 37
Dreiecksungleichung ... 41, 56
Dupel ... 12
Durchschnittsmenge ... 11

E

Einheitswurzel ... 67
Element einer Menge ... 2
Ellipse
  Brennpunkt ... 43
  Halbachsen ... 44
Ellipsengleichung ... 43
Euler, Leonhard ... 61
Eulersche Formel ... 61
Exponentialform ... 61

F

Fakultät ... 21
Ferrari, Lodovico ... 109
Ferro, Scipione del ... 108
Fundamentalsatz der Algebra ... 69
Funktion ... 88

G

ganze Zahlen ... 4
Gauß, Johann ... 52
Gaußsche Zahlenebene ... 52
geometrische Summe ... 19
geordnetes Paar ... 12
Gleichung ... 35
  dritten Grades ... 73
  höheren Grades ... 75
  lineare ... 71
  quadratische ... 71
  vierten Grades ... 74
  quadratische ... 36
  reduzierte ... 105, 108
Gleichungen ... 67
Gradmaß ... 58

H

Hauptwert ... 57, 65

I

imaginäre Einheit ... 51
imaginäre Zahl ... 51

Imaginärteil 51
Indexverschiebung 18
indirekter Beweis 16
Induktionsanfang 25
Induktionsannahme 25
Induktionsschritt 25
Intervall 7
  abgeschlossenes 7
  endliches 7
  halboffenes 7
  kompaktes 7
  offenes 7
  unendliches 8
irrationale Zahlen 6

J

Junktoren 101

K

Kardinalzahl 2
kartesische Form 57
kartesisches Produkt 12
komplexe Ungleichung 66
komplexe Wurzel 65
komplexe Zahl 51
komplexes Polynom 69
Komposition 92
konjugiert komplexe Zahl 53
Konjunktion 101
Kreis
  Mittelpunkt 41
  Radius 41
Kreisgleichung 41
Kreisteilungsgleichung 67

L

Linearfaktorzerlegung 70

M

Mächtigkeit 2
materiale Äquivalenz 101
materiale Implikation 101
Mathematica 111
Menge 1
  gleiche 8
  aufzählende Form 1
  beschreibende Form 2
  disjunkte 11
  Elemente einer 1
  endliche 2
  leere 3
  unendliche 2
  unvereinbare 11
Mittel
  arithmetisches 47
  harmonisches 47
Moivre , Abraham 63
Moivresche Formel 63

N

n - Tupel 13
natürliche Zahlen 3
Negation 101
Nullstelle 69

P

Pascal , Blaise 23
Pascalsches Dreieck 23
Permutation 22
Polarkoordinaten 57
Polynomdivision 73
Potenzmenge 10
Primzahl 16
Produktmenge 12
Produktzeichen 21
Pythagoras von Samos 42

Q

q.e.d 15
quadratische Gleichung 71

R

Radikale 110
rationale Zahlen 4
Realteil 51
reelle Zahlen 7

S

Signumfunktion 93
Summenzeichen 17
Symbole
  := 1
  < 37
  > 37
  ⇔ 35, 101
  ⇒ 35, 101
  ⋂ 12
  ⋃ 12
  ⋀ 104
  ∩ 11
  ∪ 11
  ∀ 3
  ≥ 37
  ∈ 2

∞ 8
$\leq$ 37
$\mapsto$ 87
$\mathbb{C}$ 7
$\mathbb{N}$ 3
$\mathbb{N}_0$ 3
$\mathbb{Q}$ 4
$\mathbb{R}$ 7
$\mathbb{R}^+$ 8
$\mathbb{R}_0^+$ 8
$\mathbb{Z}$ 4
$\mathbb{Z}^-$ 4
Im 51
Re 51
arg 57
sign 93
$|\cdot|$ 38, 93
$|$ 2
$\neg$ 16, 101
$\not\subset$ 9
$\notin$ 2
$\prod$ 21
$\setminus$ 11
$\subset$ 9
$\sum$ 17
$\times$ 12
$\rightarrow$ 87
$\varnothing$ 3
$\vee$ 11, 101
$\wedge$ 11, 101
$\{\ \}$ 3
$f \circ g$ 92
i 51
$n!$ 21
$\binom{n}{k}$ 22
..... 2
■ 6

T

Tautologie 102
Teilmenge 9
    echte 9
    unechte 9
trigonometrische Form 57
Tripel 13

U

Umformung 35, 37
    äquivalente 35, 37
    nichtäquivalente 35, 37
Umkehrabbildung 92
Ungleichung 37
Urbild 89
Urbildmenge 89

V

Venn , John 9
Vereinigungsmenge 11
vollständige Induktion 24, 104
Vorzeichenfunktion 94

W

w.z.b.w 15
Wahrheitstafel 101
Wahrheitswert 101
Wertebereich 87
Widerspruchsbeweis 16