1 Quiz Woche 1

Aufgabe 2

Welche der folgenden Intervalle sind im Bereich der Funktion $\frac{x-3}{x^2-4} \ln x$ enthalten? Wählen Sie alle zutreffenden Antworten aus...

- $(2, +\infty)$
- $(-\infty, -2)$
- $(-2, 0)$
- $(0, 2)$

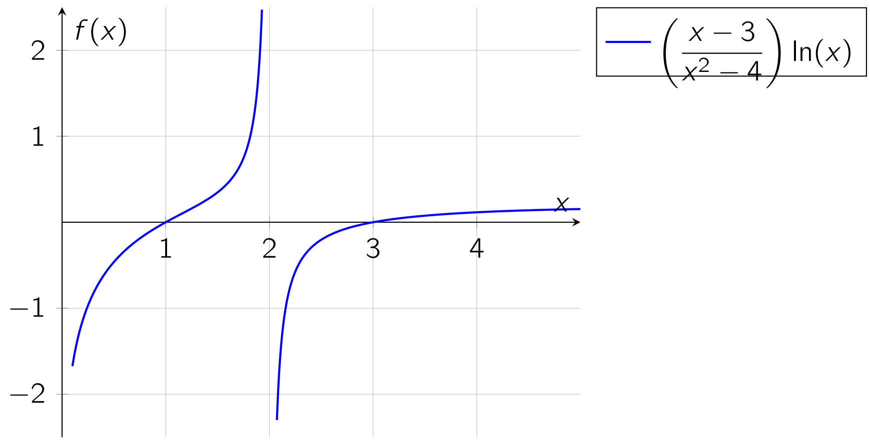
Untersuchung des Nenners (wann gibt es eine Division durch Null):

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &= 0 \qquad &|+4 \\ x^2 &= 4 \qquad &|\sqrt{\ } \\ x_1 &= -2 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Somit sind die Bereiche $(2, +\infty)$ und $(-\infty, -2)$

Dies stellt mich aber noch nicht zufrieden, das kann einfach nicht alles sein

Hier hatte ich im ersten Versuch den Fehler gemacht, das ich das $\ln x$ übersah



Um die Intervalle zu bestimmen, in denen die Funktion $h(x) = \left(\frac{x-3}{x^2-4}\right) \ln(x)$ definiert ist, muss man die Punkte betrachten, an denen die Funktion nicht definiert ist. Diese Punkte sind:

1. Nullstellen des Nenners $x^2 - 4$
2. Punkte, an denen der Logarithmus $\ln(x)$ nicht definiert ist (insbesondere $x \leq 0$)

1.0.1 Nullstellen des Nenners

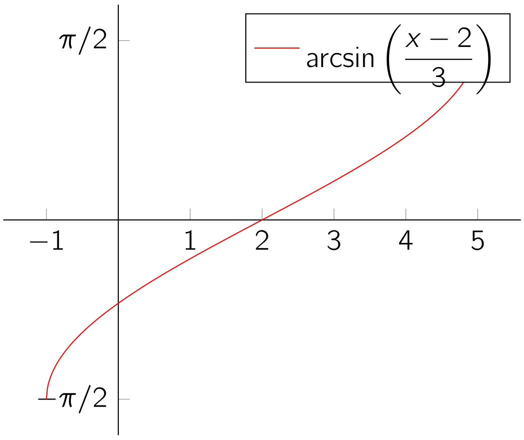
$$\begin{aligned} x^2 - 4 &= 0 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

Die Funktion hat also Pole (nicht definierte Punkte) bei $x = 2$ und $x = -2$. 2. Definitionsbereich des Logarithmus: $\ln(x)$ ist nur für $x > 0$ definiert. Zusammenführung der Bedingungen: - Der Nenner darf nicht null sein: $x \neq 2$ und $x \neq -2$. - Der Logarithmus ist nur für $x > 0$ definiert.
Schlussfolgerung: Die Funktion $h(x) = \left(\frac{x-3}{x^2-4}\right) \ln(x)$ ist definiert für $x > 0$, ausgenommen $x = 2$. Somit sind die Intervalle, in denen die Funktion definiert ist:

$$(0, 2) \cup (2, \infty)$$

Diese Intervalle umfassen alle Werte, für die der Ausdruck sowohl im Nenner als auch im Logarithmus definiert und nicht null ist.

- Was ist der Bereich der Funktion $\arcsin \frac{x-2}{3}$?
  - $[-2, 3]$
  - $[-1, 5]$
  - $[2 - 3\pi, 2 + 3\pi]$
  - $[-2, 2]$
  - $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
  - $\left[\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right]$



Um den Wertebereich der Funktion $h(x) = \arcsin\left(\frac{x-2}{3}\right)$ zu bestimmen, müssen wir sicherstellen, dass der Ausdruck $\frac{x-2}{3}$ im Definitionsbereich der Arkussinusfunktion liegt. Die Arkussinusfunktion, $\arcsin(y)$, ist nur für $-1 \leq y \leq 1$ definiert und ihr Wertebereich ist $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 1. Bedingung für den Argumentbereich von arcsin:

$$-1 \leq \frac{x-2}{3} \leq 1$$

2. Lösen der Ungleichung: Multiplizieren wir alle Teile der Ungleichung mit 3:

$$-3 \leq x - 2 \leq 3$$

Addieren wir 2 zu allen Teilen der Ungleichung:

$$-1 \leq x \leq 5$$

Das bedeutet, dass x im Intervall $[-1, 5]$ liegen muss, damit der Ausdruck $\frac{x-2}{3}$ im Bereich $[-1, 1]$ liegt und arcsin definiert ist. 3. Bestimmung des Wertebereichs: Nun betrachten wir die Extremwerte des Ausdrucks $\frac{x-2}{3}$: - Für $x = -1$:

$$\frac{-1-2}{3} = \frac{-3}{3} = -1$$

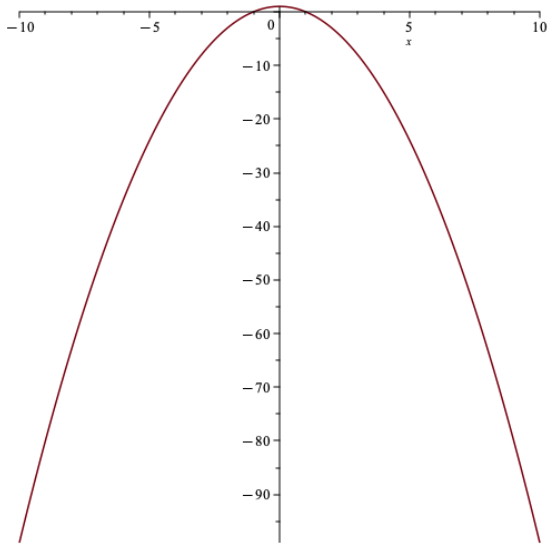
- Für $x = 5$:

$$\frac{5-2}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

Die Funktion $\arcsin\left(\frac{x-2}{3}\right)$ nimmt also ihre Extremwerte bei $\arcsin(-1)$ und $\arcsin(1)$ an: - $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ - $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$
Da die Arkussinusfunktion stetig und streng monoton ist, nimmt sie alle Werte zwischen diesen Extremwerten an.
Der Wertebereich der Funktion $h(x) = \arcsin\left(\frac{x-2}{3}\right)$ ist daher:

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

- Was ist der Bereich der Funktion $-x^2 + 1$?
  - $(-\infty, 0]$
  - $[1, +\infty)$
  - $[0, 1]$
  - $[0, +\infty)$
  - $(-\infty, 1]$
  - $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$



$-x^2 + 1$
Nullstellen
$-x^2 + 1 = 0$
$-x^2 = -1$
$x^2 = 1$
$x_1 = -1$ und $x_2 = 1$
Muss ich nun den Scheitelpunkt berechnen? Ja
Hier gibt es verschiedene Wege:

1. per Differentialrechnung
   - Bilden der ersten Ableitung $f(x) = -x^2 + 1$

     $f'(x) = -2x$
   - $x = 0$ setzen

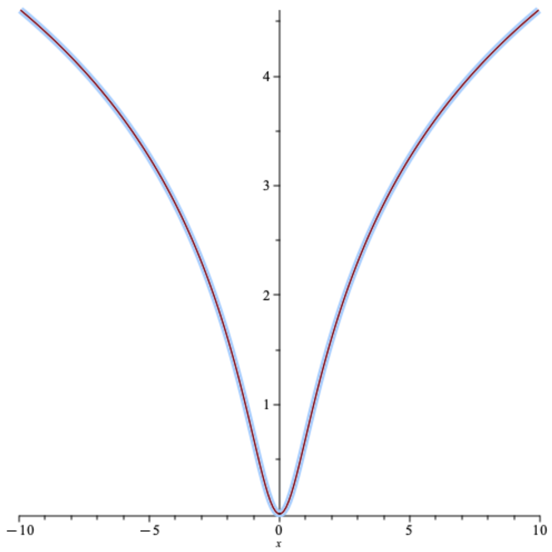
     $-2x = 0$

     $x = 0$

- y berechnen, x in $f(x)$ einsetzen $f(x) = -x^2 + 1$
  $f(0) = -0^2 + 1$
  $f(0) = 1$

2. per quadratischer Ergänzung

- Was ist der Bereich der Funktion $\ln\left(1+x^2\right)$?
  - $[1, +\infty)$
  - $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
  - $(-\infty, 0]$
  - $(-\infty, 1]$
  - $[0, +\infty)$
  - $[-1, +\infty)$



6. Wie groß ist der Bereich der Funktion $\arctan \cos x$ (d.h. die Umkehrung der Tangensfunktion mit dem Parameter $\cos x$)? $[0, +\infty)$ $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ $[-\pi, \pi]$ $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $(-\infty, 0]$

7. Wenn $f(x) = 4x^3 + 1$ und $g(x) = \sqrt{x+3}$, berechnen Sie $(f \circ g)(x)$ und $(g \circ f)(x)$. $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = \left(4x^3 + 1\right)\sqrt{x+3}$ $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = 4x^3 + 1 + \sqrt{x+3}$ $(f \circ g)(x) = 4(x+3)^{3/2} + 1$ und $(g \circ f)(x) = 2\sqrt{x^3+1}$ $(f \circ g)(x) = 2\sqrt{x^3+1}$ und $(g \circ f)(x) = 4(x+3)^{3/2} + 1$

8. Was ist die Umkehrung der Funktion $f(x) = e^{2x}$? Wählen Sie alle, die richtig sind. Die Exponentialfunktion ist ihre eigene Inverse, also $f^{-1}(x) = e^{2x}$ $f^{-1}(x) = \log_2 x$ $f^{-1}(x) = \ln x^2$ $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{e^{2x}}$ $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2} \ln x$. $f^{-1}(x) = \ln \sqrt{x}$