Grundlagen der Mathematik, Abbildungen, Funktionen, Folgen

19. September 2025

Vorwort zur 4. Auflage

Diese Auflage des Lehrbuches wurde erneut - wie schon die 2. - zu einer gründlichen Überarbeitung genutzt, wobei die nunmehr reichlich vorliegenden Erfahrungen bei seinem Einsatz in der Ausbildung von Direkt- und Fernstudenten für Veränderungen, Ergänzungen und Streichungen maßgeblich waren. Im Vordergrund der Überarbeitung stand deshalb auch die weitere Verbesserung der methodischen Gesichtspunkte bei geringer Lockerung von abstrakten Betrachtungsweisen.

Der Inhalt richtet sich - wie in allen weiteren Bänden dieses Lehrwerkes - vorwiegend an Hochschulstudenten der Natur-, Ingenieur-, Wirtschafts- und Landwirtschaftswissenschaften. Dabei stellt der vorliegende Band die mathematischen Grundlagengebiete bereit, die für die nachfolgenden Bände erforderlich sind. Entsprechend ist die stoffliche Auswahl getroffen, wobei auch manche neue Wege beschritten wurden.

Das Lehrbuch ist so angelegt, daß es sowohl Direkt- als auch Fernstudenten zur Unterstützung des Selbststudiums dienen kann. Natürlich bestimmen Kursvorlesungen oder Studienanleitungen Umfang und Auswahl für das mathematische Studium der einzelnen Fachrichtungen.

Weiterhin eignet sich dieser Band sicher auch zum Nachlesen für alle diejeniger Interessenten, die während ihrer Ausbildung die behandelten Gebiete nicht oder nur wenig kennengelernt haben. Wegen seines spezifischen Inhaltes eignet sich auf diese Weise das Lehrbuch auch zum Nachschlagen.

Die Autoren waren sich beim Schreiben dieses Bandes auch der Probleme bewusst, die seine Gestaltung bei teilweise unterschiedlichen Zielstellungen mit sich brachte. Sie möchten sich deshalb sehr herzlich für die vielen konstruktiven Hinweise - insbesondere zu methodischen Fragen - bedanken, die weitgehend berücksichtigt werden konnten. Wir bedanken uns bei Herrn Professor Erfurth, Merseburg, sowie bei Herrn Dipl.-Math. H. Ebmeyer, Dresden, für ihre kritischen Anregungen und konkreten Abänderungsvorschläge, die uns sehr geholfen haben. Weiterhin danken wir Herrn Professor Wußing, Leipzig, für seine wertvollen Bemerkungen zum geschichtlichen Überblick. Besonderer Dank gilt Frau Ziegler vom Teubner-Verlag Leipzig; sie war uns in der Zusammenarbeit wiederum eine verständnisvolle und sachkundige Beraterin.

Die Autoren

Leipzig, Juli 1979

Inhaltsverzeichnis

1 Zum Anliegen des Bandes **7**

2 Die Entwicklung der Mathematik und ihre Beziehung zur Praxis **9**
2.1 Aus der Entwicklungsgeschichte der Mathematik 9
2.2 Zu den Anwendungen der Mathematik 12

3 Logik **15**
3.1 Aussagen 15
3.2 Variable und Aussageformen 18
3.3 Aussagenverbindungen 19
3.3.1 Elementare Aussagenverbindungen, n-stellige Aussagenverbindungen 19
3.3.2 Wahrheitstabellen der elementaren Aussagenverbindungen 21
3.3.3 Wahrheitstabellen n-stelliger ($n > 2$) Aussagenverbindungen 24
3.3.4 Verbindungen von Aussageformen 25

1 Zum Anliegen des Bandes

Der vorliegende Band 1 des Lehrwerkes behandelt einige allgemeine Grundlagen, die für den Aufbau und das Verständnis weiterer mathematischer Gebiete und somit für die Inhalte der folgenden Bände notwendig sind. Auswahl und Umfang dieser Grundlagen leiten sich in erster Linie aus den Erfordernissen ab, wichtige Begriffe, Methoden und Ergebnisse zur fundierten Darstellung mathematischer Disziplinen bereitzustellen.

Dabei ist berücksichtigt, daß nach der Neugestaltung des Mathematikunterrichtes in den allgemeinbildenden Schulen für moderne Auffassungen in der mathematischen Ausbildung günstige Vorbedingungen geschaffen sind. Ausreichende Kenntnisse und Fertigkeiten in der Bruch-, Potenz-, Wurzel- und Logarithmenrechnung sowie in der elementaren Geometrie und der Trigonometrie werden zudem vorausgesetzt. Selbstverständlich ist bei der Darlegung der Grundlagengebiete für Inhalt und Form die Zielstellung des Gesamtlehrwerkes maßgebend, der mathematischen Unterrichtung von Ingenieuren, Naturwissenschaftlern, Ökonomen und Landwirten an Hochschulen zu entsprechen. Deshalb wird für die naturgemäß in den Grundlagengebieten besonders zahlreich auftretenden abstrakten Begriffe der Erkenntnisprozeß durch anschauliche Entwicklung unterstützt, ohne die erforderliche Strenge und Exaktheit zu verletzen. Auch sind zahlreiche anwendungsbezogene Beispiele im Text und bei den Übungsaufgaben enthalten.

Der Sinn mathematischer Betrachtungen besteht allerdings nicht allein im Bereitstellen von Ergebnissen und Sätzen. Er liegt gleichermaßen in den besonderen Formen des Denkens und Schließens zur strengen Herleitung allgemeingültiger Resultate aus exakt formulierten Voraussetzungen. Es ist ein weiteres Anliegen dieses Lehrabschnittes, den Lernenden besonders an exaktes und logisches Denken zu gewöhnen.

In den Abschnitten 3. und 4. beschäftigen wir uns deshalb mit Begriffen der Logik und den aus ihnen abgeleiteten Beweisprinzipien. Für die Gewinnung mathematischer Ergebnisse und Tatsachen ist es charakteristisch, daß sie logisch einwandfrei aus Voraussetzungen abzuleiten sind. Deshalb ist die Kenntnis strenger Beweisführung notwendig und das sorgfältige Studium dieser Abschnitte dringend anzuraten.

Im Abschnitt über die Zahlenbereiche wird bei der Darstellung der reellen Zahlen und der Rechengesetze, denen sie genügen, ein axiomatisches Vorgehen erläutert. Die komplexen Zahlen dagegen werden anschaulich eingeführt und auf Grund ihrer Bedeutung in physikalischen und technischen Anwendungen ausführlich behandelt. Bei vielen mathematischen Untersuchungen treten Fragen der Auswahl, der Anordnung oder der Zusammenstellung verschiedenartiger Elemente auf. Sie werden im Kapitel über Kombinatorik näher untersucht.

Eine zentrale Stellung innerhalb der Mathematik nimmt die Mengenlehre ein. Mit ihren Begriffen lassen sich die mathematischen Disziplinen begründen und die objektiv gegebenen Sachverhalte verschiedener Wissensgebiete erfassen.

Zwei weitere Abschnitte befassen sich mit den in fast allen Anwendungsgebieten bedeutsamen Begriffen der Abbildung bzw. der Funktion, die mengentheoretisch definiert werden. Der letzte Abschnitt schließlich ist den Zahlenfolgen gewidmet und stellt den wichtigen Grenzwertbegriff bereit.

2 Die Entwicklung der Mathematik und ihre Beziehung zur Praxis

2.1 Aus der Entwicklungsgeschichte der Mathematik

Die Geschichte der Mathematik ist eng mit der der menschlichen Gesellschaft verknüpft. Ferner bestimmen einige bedeutende Mathematiker durch ihre richtungweisenden Ideen und Entdeckungen die Entwicklung der Mathematik entscheidend. Die Mathematik gehört - neben Philosophie, Medizin und Astronomie - zu den ältesten Wissenschaften. Sie erreichte schon im 2. Jahrtausend v. u. Z. in Ägypten und Mesopotamien, aber auch im alten China und Indien einen beachtlichen Reifegrad. Die verwendeten Zahlensysteme standen im engen Zusammenhang mit kommerziellen und militärischen Interessen sowie mit Verwaltungsproblemen. Man kannte Verfahren zur Lösung von Gleichungen, sogar höheren Grades. Die Geometrie diente dem Errichten von Bauwerken, der Feldvermessung und der Orientierung am Himmel. Doch handelte es sich um eine rezeptartige, noch nicht auf Beweisen von explizit angeführten Sätzen aufbauende Mathematik.

Erst mit der Herausbildung der antiken Sklavenhaltergesellschaft im alten Griechenland wurde die Mathematik im 6.-5. Jh. v. u. Z. zu einer selbständigen Wissenschaft mit eigenen Methoden und Beweisverfahren; auf dieser Grundlage schuf Euklid (365?-300? v. u. Z.) mit seinen „Elementen“ (um 325 v. u. Z.) eine bewunderungswürdige Darstellung des damaligen mathematischen Kenntnisstandes. Mit Archimedes (287?-212 v. u. Z.), dem in Geometrie und Mechanik große Entdeckungen gelangen, erreichte die Mathematik der Antike während der hellenistischen Periode ihren Höhepunkt.

Zur Zeit der Herrschaft der Römer und in der feudalistischen Gesellschaft gab es in Europa keine nennenswerten mathematischen Entwicklungen, während die Mathematik vor allem in Indien und in den Ländern des Islam zu einer hohen Blüte gelangte ; viele Teilergebnisse - darunter die indisch-arabischen Ziffern - gelangten seit dem 12./13. Jh. in die Länder des europäischen Feudalismus, in denen bis dahin nur ein sehr bescheidenes wissenschaftliches, darunter auch mathematisches Niveau geherrscht hatte.

Erst mit der Entwicklung von Elementen des Frühkapitalismus in Europa bildeten sich, insbesondere seit dem 16. Jh., günstige Bedingungen für die Übernahme des antiken mathematischen Erbes und für dessen selbständige Weiterentwicklung durch die Europäer heraus. Die Trigonometrie entwickelte sich zu einer selbständigen mathematischen Disziplin. Die Durchbildung der Rechenmethoden machte große Fortschritte; von den sog. Rechenmeistern wurde in Deutschland A. Ries (1492-1559) am bekanntesten, der im Erzgebirge wirkte. Reichlich ein Jahrhundert später wurden die ersten Maschinen für die Grundrechenarten entwickelt (Schickard (1592-1635), Pascal (1623-1662), Leibniz (1646-1716)).

Das Gedankengut der rationalistischen philosophischen Systeme und der Aufklärung sowie die bürgerliche Revolution brachten im 16. und 17. Jahrhundert mit der Überwindung der feudalistischen Gesellschaftsordnung und der diese Ordnung rechtfertigenden Ideologien auch den Naturwissenschaften und der Mathematik wieder Geltung und Bedeutung. Descartes (1596-1650) begründete den modernen Rationalismus auf der mathematischen Grundlage der von Galilei (1564-1642) geformten Naturwissenschaften. Er gilt auch als Begründer der analytischen Geometrie. Die Herausbildung der infinitesimalen Methoden erfolgte in engem Zusammenhang mit der geistigen Bewältigung des Bewegungsproblems in Physik (G. Galilei) und Himmelsmechanik (J. Kepler). Im Anschluß an die Ergebnisse von Archimedes und durch sehr mühsame Gedankenarbeit im 16. und zu Anfang des 17. Jahrhunderts vermochten es I. Newton (1643-1727) und G. W. Leibniz im letzten Drittel des 17. Jahrhunderts, unabhängig voneinander die Methoden der Differential- und Integralrechnung durchzubilden. Während Newton, der als einer der bedeutendsten Forscher auf den Gebieten der Mathematik, Mechanik und Astronomie gilt, mit Hilfe dieses neu entwickelten mathematischen Werkzeuges den Aufbau der klassischen Mechanik und seine „Mathematischen Prinzipien der Naturwissenschaften“ (1687) vollenden konnte, setzten sich die geschickteren Bezeichnungen von Leibniz rasch durch. Die „Infinitesimalmathematik“ wurde im 18. Jh. in den Händen der Gebrüder Johann (1667-1748) und Jakob Bernoulli (1645-1705) und L. Eulers (1707-1783), der in Berlin und Petersburg wirkte, zu einem weitreichenden Mittel zur Bewältigung schwieriger Probleme der Mechanik, der Himmelsmechanik, der Optik, des Artilleriewesens, der Seeschiffahrt und vieler anderer praktischer Anwendungen.

Die neue Geltung und Anerkennung der Mathematik und der Naturwissenschaften kam u. a. auch bei J. L. d’Alembert (1717-1783) und in der großen französischen Encyclopédie zum Ausdruck.

Nach der französischen bürgerlichen Revolution (1789) setzte insbesondere in den von der industriellen Revolution erfaßten Ländern Europas ein bedeutender Aufschwung in der Mathematik ein. Bei der Grundlegung der Analysis, in Algebra, in darstellender, analytischer und projektiver Geometrie sowie bei der Nutzbarmachung der Mathematik für Anwendungen in Technik und Naturwissenschaften wurden bedeutende Fortschritte erzielt. J. Lagrange (1736-1813), P. S. Laplace (1749-1827), A. Legendre (1752-1833), G. Monge (1746-1818), J. Fourier (1768-1830), A. Cauchy (1789-1857), J. V. Poncelet (1788-1867) u. a. leisteten hier und auf anderen mathematischen Gebieten Hervorragendes; viele Mathematiker nahmen aktiv am gesellschaftlichen Leben ihrer bewegten Zeit teil. Sie haben zudem große Verdienste bei der Neugestaltung der mathematischen Ausbildung.

Der deutsche Mathematiker C. F. Gauß (1777-1855) lieferte am Ende des 18. und zu Beginn des 19. Jahrhunderts hervorragende Beiträge zur Entwicklung der Mathematik. Er bereicherte sie um zahlreiche neue Verfahren und Theorien und überwand viele ungelöste Probleme. Seine Forschungen waren dabei an Anwendungen in der Geodäsie, der Astronomie und der mathematischen Physik orientiert.

Von der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts bis zum Ausbruch des ersten Weltkrieges traten insbesondere die Mathematiker aus den Ländern hervor, in denen sich Kapitalismus und Industrialisierung am weitesten entwickelt hatten. Genannt seien: G. Boole (1815-1869), A. Cayley (1821-1895) und R. Hamilton (1805-1865) in Großbritannien, C. Jordan (1838-1922) und H. Poincaré (1854-1912) aus Frankreich, K. Weierstraß (1815-1897), B. Riemann (1826-1866), R. Dedekind (1831 bis 1916) und F. Klein (1849-1925) aus Deutschland, S. Lie (1842-1899) aus Norwegen, E. Beltrami (1835-1900) und G. Peano (1858-1932) aus Italien, Ch. S. Peirce (1839-1914) aus den USA sowie N. I. Lobatschewski (1792-1856) und P. L. Tschebyscheff (1821-1894) aus Rußland. Für die Begründung wichtiger Gebiete und Auffassungen in der modernen Mathematik sind die grundlegenden Ideen von G. Cantor (1845-1918) und D. Hilbert (1862-1943) aus Deutschland sowie die des polnischen Mathematikers St. Banach (1892-1945) zu großer Bedeutung gelangt. Nach der Großen Sozialistischen Oktoberrevolution (1917) nahmen die mathematischen Forschungen in der Sowjetunion einen ungeheuren Aufschwung. Die gesellschaftliche und wirtschaftliche Entwicklung in diesem Lande ermöglichte es, daß heute die sowjetischen Mathematiker zu den führenden in der ganzen Welt zählen und ihre Ergebnisse und Leistungen Entwicklungsrichtungen der modernen Mathematik bestimmen. Auch in der DDR wurde die Bedeutung der Mathematik durch die Partei- und Staatsführung erkannt, was sich in einer großzügigen Förderung der mathematischen Forschung und Ausbildung äußert.

Dieser kurze Abriß zeigt, daß vorwiegend in den fortschrittlichen Gesellschaftsordnungen einer Epoche die Mathematik durch bedeutende Entdeckungen erweitert und bereichert wird.

2.2 Zu den Anwendungen der Mathematik

Die klassische Mathematik fand ihre Anwendung vorwiegend in Physik, Mechanik, Astronomie und Geodäsie. Die mathematische Durchdringung dieser Wissenschaften wirkte sich andererseits befruchtend auf die Entwicklung der Mathematik und ihrer Methoden aus. Auch die technischen Wissenschaften bedienen sich seit ihrer Entstehung in starkem Maße des mathematischen Instrumentariums.

Die Begriffe der Mathematik sind Abbild von für den Gegenstand mathematischer Betrachtungen wesentlichen Eigenschaften der Realität in unserem Bewußtsein. Von realen Erscheinungen läßt sich ein abstraktes mathematisches Modell aufbauen, das ihre Haupteigenschaften widerspiegelt und einfacher ist. Dieses Modell kann mit mathematischen Methoden untersucht werden, und es können dabei neue Eigenschaften und Gesetzmäßigkeiten der realen Erscheinungen entdeckt werden.

Aber auch umgekehrt lassen sich zu mathematischen Strukturen Realisierungen finden, deren Anwendungen von großem Nutzen für den wissenschaftlichen Fortschritt sind. Dieses Vorgehen wird in der Astronomie, der modernen Physik oder bei der Entwicklung von Computern erfolgreich praktiziert.

Auf dieser Grundlage erklären sich die engen Wechselbeziehungen zwischen der gesellschaftlichen Praxis und der Mathematik. Heutzutage werden mathematische Methoden besonders in der Wirtschaft, der Chemie, der Geologie, der Biologie, der Medizin und der Landwirtschaft, in der Pädagogik und in den Sprachwissenschaften angewendet. Diese Mathematisierung der Wissenschaften ist eine der bedeutendsten Erscheinungsformen der wissenschaftlich-technischen Revolution. Die Mathematik entwickelt sich somit zum Bindeglied verschiedener Disziplinen und beeinflußt aktiv die Entwicklung der Wissenschaften und der Praxis.

Besondere Bedeutung besitzen algorithmische Darstellungen und numerische Methoden im Hinblick auf die Nutzung der Computer zur Beschreibung und Lösung der Modelle. Da vielen Vorgängen Zufallserscheinungen innewohnen, ergibt sich eine starke Beachtung der stochastischen Betrachtungsweise. Sehr intensiv sind mathematische Probleme der Planung und Leitung, der Prozeßsteuerung, der Produktionskontrolle, der Versuchsplanung und der Zuverlässigkeit von Systemen zu betrachten. Häufig sind diese Fragen im Zusammenhang mit Optimierungen zu sehen. Aus der gewachsenen Leistungsfähigkeit der Computer ergeben sich zudem neue Gesichtspunkte für die Anwendung mathematischer Methoden in den Anpassungs- und Lernprozessen oder den Problemen der nichtnumerischen Informationsverarbeitung.

Die Mathematik trägt auch dadurch in hervorragendem Maße zum gesellschaftlichen Fortschritt bei, indem sie das Formalisieren und Quantifizieren, die strenge Begriffsbildung, die Entwicklung von Ordnungsprinzipien und das logische Denken in hohem Maße fördert.

3 Logik

Die nachfolgenden ausgewählten Bemerkungen zur Logik dienen in erster Linie dazu, den Leser zu befähigen, vorgelegte Sätze in besonderer Weise mit dem Ziel einer Formalisierung zu analysieren.

Wir stellen zunächst mit den sogenannten Wahrheitstabellen ein einfaches Instrumentarium bereit, um festzustellen, ob der vorgelegte Sachverhalt eine wahre oder falsche Aussage darstellt. Dies sind die notwendigen Grundlagen zum Verständnis der logischen Schlüsse, die in der Mathematik, aber auch in anderen Wissenschaften, immer wieder benötigt werden.

Darüber hinaus findet die Logik in neuerer Zeit immer mehr auch Anwendungen in Naturwissenschaften und Technik (digitale Rechentechnik, Neuronennetze, Technologie, Netzplantechnik, Steuerungsprobleme).

3.1 Aussagen

Gegenstand der Logik sind *Aussagen*. Diese werden im sprachlichen Umgang in Aussagesätzen formuliert. Eine Aussage drückt einen Tatbestand aus. Demzufolge sind alle aus der Umgangssprache bekannten Fragesätze, Aufforderungssätze, Befehlssätze, Wunschsätze, Zweifelssätze usw. keine Aussagesätze. Speziell sind

- Ist $10^{10} + 1$ eine Primzahl?
- Löse die Gleichung $x^2 + 4x + 10 = 0$!
- Rechts abbiegen!
- Hoffentlich scheint morgen die Sonne.
- Ich glaube nicht, daß morgen die Sonne scheint.

keine Aussagesätze.

Betrachten wir zunächst als Beispiel die Aussage „$2 \cdot 2 = 4$“. Diese Aussage kürzen wir mit p ab und schreiben:

$$p = „2 \cdot 2 = 4“$$

Ebenso wird in den folgenden Beispielen verfahren.

Beispiel 3.1

$q =$ „10 ist eine Primzahl“

$r =$ „Die Sonne scheint“

$s =$ „Am 10.10.1995 wird in Leipzig die Sonne scheinen“

$t =$ „Kolumbus hat 1492 Amerika entdeckt“

Diese Beispiele zeigen, daß es sinnvoll ist, nach dem Wahrheitsgehalt der entsprechenden Aussagen zu fragen.

Die mit p und t abgekürzten Sätze stellen offenbar wahre Aussagen dar, dagegen ist y falsch. Die Frage nach dem Wahrheitsgehalt der durch r beschriebenen Aussage ist erst nach Kenntnis von Ort und Zeit mit „wahr“ bzw. „falsch“ entscheidbar. Für die durch s beschriebene Aussage ist es sinnvoll, den Wahrheitsgehalt zu dem Zeitpunkt, an dem sie gemacht wird, durch eine Wahrscheinlichkeit zu präzisieren.

Diese Überlegungen veranlassen uns zunächst zur folgenden Erklärung:

p heißt eine Aussage, wenn p einen Tatbestand ausdrückt.

Die Gesamtheit aller so definierten Aussagen p fassen wir zu einer Menge A_1 zusammen: $A_1 = \{p \mid p \text{ ist eine Aussage}\}$.

Wir benutzen bereits hier den Begriff der Menge, welcher in Abschnitt 7. ausführlicher behandelt wird.

Unter einer *Menge* verstehen wir nach Cantor eine Gesamtheit (Zusammenfassung) bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens, wobei von einem Objekt eindeutig feststeht, ob es zur Menge gehört oder nicht.

Können wir die Objekte, die zur Menge gehören und *Elemente* der Menge heißen, aufschreiben, so führen wir sie in geschweiften Klammern auf. So wird die Menge M_1 der natürlichen Zahlen, die größer als 2 und kleiner als 10 sind, wie folgt geschrieben: $M_1 = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Die Tatsache, daß z.B. 5 Element der Menge M_1 ist, beschreiben wir mit der Symbolik $5 \in M_1$, während $1 \notin M_1$ bedeutet, daß 1 kein Element von M_1 ist. Wir werden auch generell für Mengen große lateinische Buchstaben zur Bezeichnung benutzen. Eine andere Schreibweise für eine Menge M ist

$$M = \{x \mid E\}.$$

Wir lesen dieses Symbol folgendermaßen: „M ist die Menge aller Elemente x, die Eigenschaft E besitzen". Die oben erklärte Menge A_1 ist in dieser Schreibweise formuliert $A_1 = \{p \mid p \text{ ist eine Aussage }\}$. Die Menge M_1 kann mit Hilfe dieser Symbol als

$$M_1 = \{x \mid x, \text{ natürliche Zahl und } 2 < x < 10\}$$

geschrieben werden. Schließlich sei bereits an dieser Stelle der Begriff der Teilmenge erklärt. Die Menge A heißt Teilmenge der Menge B, wenn jedes Element der Menge A auch Element der Menge B ist. Wir schreiben in diesem Fall: $A \subseteq B$.

Zum Beispiel

$$\{3, 4, 5\} \subseteqq M_1 = \{3, 4, \ldots, 9\},$$

aber

$$\{2, 9\} \text{ ist keine Teilmenge von } M_1.$$

Dieser Vorgriff auf Grundbegriffe der Mengenlehre gestattet es uns, nachfolgend gewisse Sachverhalte besser zu formulieren.

Bei unseren weiteren Betrachtungen wollen wir uns auf eine wichtige Teilmenge von A_1 beschränken.

Definition 3.1

Die Aussage p heißt **zweiwertige Aussage**, wenn p entweder wahr oder falsch ist. **D.3.1**

Entsprechend A_1 bilden wir die Menge der zweiwertigen Aussagen A_2:

$$A_2 = \{p \mid p \text{ist eine zweiwertige Aussage}\}$$

Durch diese Definition scheiden wir Aussagen wie s aus den weiteren Betrachtungen aus. Auch Aussagen über die Bewertungen einer Klausur, die man ja üblicherweise mit den Zensuren (Wahrheitswerten) 1 bis 5 vornimmt, sind in A_2 nicht enthalten.

Im Zusammenhang mit A_2 führen wir die *Wahrheitswerte*

„wahr", bezeichnet durch W, und

„falsch", bezeichnet durch F,

ein. Der Aussage $p, p \in A_2$, ist gemäß Definition 3.1 eindeutig ein Wahrheitswert aus $\{W, F\}$ zugeordnet. Wir bezeichnen diese eindeutige Zuordnung mit $w(p)$, $w(p) \in \{W, F\}$; $w(p)-$ Wahrheitswert der Aussage p.

Wir wollen noch auf einen wichtigen Tatbestand aufmerksam machen. Das Wissen, daß $p \in A_2$ gilt, heißt noch nicht, daß man auch $w(p)$ kennt. Dazu zwei Beispiele:

Beispiel 3.2

$p =$ „$10^{10} + 1$ ist eine Primzahl“;

$q =$ „Ist n eine natürliche Zahl, die größer oder gleich drei ist, so gibt es keine ganzen, positiven Zahlen x, y, z so, daß $x^n + y^n = z^n$ gilt“.

Es ist sofort klar, daß $p \in A_2$ und $q \in A_2$ ist, $w(p)$ ist nicht ohne weiteres angebbar. Es gibt aber einen Algorithmus zur Ermittlung dieses Wahrheitswertes. Dagegen ist der Wahrheitswert von q (großer Fermatscher Satz) bis heute unbekannt.

Die Ermittlung von Wahrheitswerten mathematischer Aussagen ist eine Aufgabe der Mathematik und keine spezielle Aufgabe der Logik.

3.2 Variable und Aussageformen

Wir betrachten eine Menge X von beliebigen Elementen. Wir wollen x eine Variable nennen, wenn x die Elemente von X durchläuft. X heißt dann Bereich der Variablen x. Die Sätze

„x ist eine Primzahl“, „y ist eine Großstadt“

die wir mit $p(x)$ bzw. $q(y)$ abkürzen wollen, stellen zunächst keine Aussagen dar. Für jedes konkrete $x = x_1 \in X$ und $y = y_1 \in Y$ gehen $p(x)$ und $q(y)$ jedoch in Aussagen aus A_2 über.

Beispiel 3.3

$X = \{1, 2, \ldots, 10\}$, $Y = \{$Moskau, Leipzig, Weimar$\}$.

Die Aussagen $p(2)$, $p(3)$, $p(5)$, $p(7)$ sind wahre Aussagen, dagegen sind $p(1)$, $p(4)$, $p(6)$, $p(8)$, $p(9)$ und $p(10)$ falsche Aussagen. Setzen wir im Satz $q(y)$ für die Variable y die Elemente ihres Bereiches ein, so entstehen die wahren Aussagen „Moskau ist eine Großstadt“, „Leipzig ist eine Großstadt“ und die falsche Aussage „Weimar ist eine Großstadt“.

Für solche Sätze, die eine Variable enthalten, wollen wir einen Namen einführen. Wir definieren:

Definition 3.2

Eine Formulierung $p(x)$ mit der Variablen $x \in X$ heißt eine **Aussageform**, wenn $p(x)$ bei Einsetzen jedes konkreten Wertes $x = x_1 \in X$ in eine zweiwertige Aussage übergeht. Die Menge der so entstehenden Aussagen heißt Bereich der Aussageform. **D.3.2**

Eine Aussageform ist weder wahr noch falsch. Sie ist selbst keine Aussage, sondern stellt eine Vorschrift zur Gewinnung von Aussagen dar.

Die Sätze der Mathematik und anderer Wissenschaften sind Aussagen bzw. Aussageformen, die eventuell auch von mehr als einer Variablen abhängen. Diese Aussagen bzw. Aussageformen treten nun aber häufig verknüpft durch Bindewörter, verneint oder auf andere Weise modifiziert auf. Mit solchen *Aussagenverbindungen* wollen wir uns im nächsten Abschnitt beschäftigen.

3.3 Aussagenverbindungen

3.3.1 Elementare Aussagenverbindungen, n-stellige Aussagenverbindungen

Aus der Umgangssprache sind uns eine Reihe von Bindewörtern bekannt, mit deren Hilfe man mehreren Aussagen eine neue zweiwertige Aussage zuordnen kann.

Aus der Umgangssprache sind uns eine Reihe von Bindewörtern bekannt, mit deren Hilfe man mehreren Aussagen eine neue zweiwertige Aussage zuordnen kann.

Beispiel 3.4

Betrachten wir als Beispiele die beiden Aussagen

$p =$ „3 ist eine Primzahl“

$q =$ „10 ist durch 3 teilbar“

Dann können wir die folgenden neuen Sätze bilden:

(1) $p_1 =$ „3 ist keine Primzahl“'

(2) $p_2 =$ „3 ist eine Primzahl und 10 ist durch 3 teilbar“

(3) $p_3 =$ „3 ist eine Primzahl oder 10 ist durch 3 teilbar“

(4) $p_4 =$ „Wenn 10 durch 3 teilbar ist, so ist 3 eine Primzahl“

(5) $p_5 =$ „3 ist genau dann eine Primzahl, wenn 10 durch 3 teilbar ist“

(6) $p_6 =$ „Entweder 3 ist eine Primzahl oder 10 ist durch 3 teilbar“

(7) $p_7 =$ „3 ist eine Primzahl, weil 10 durch 3 teilbar ist“

Zunächst einmal steht fest, daß die Sätze p_1 bis p_7 zweiwertige Aussagen darstellen. Ihr Wahrheitswert läßt sich in der von der Umgangssprache bekannten Weise einfach bestimmen. So gilt:

$$\begin{aligned}
&w(p) = W, w(q) = F,\\
&w(p_1) = F, w(p_2) = F, w(p_3) = W, w(p_4) = W, w(p_5) = F,\\
&w(p_6) = W, w(p_7) = F.
\end{aligned}$$

Wir wollen nun die Überlegungen aus Beispiel 3.4 verallgemeinern. Die Größen p und q bezeichnen zwei beliebige Aussagen, $p \in A_2, q \in A_2$. Dann gibt die folgende Tabelle die den Beispielen entsprechenden Aussagenverbindungen, deren Namen und Kurzschreibweisen an. Wir bemerken noch einmal, daß eine solche Aussagenverbindung je zwei Elementen von A_2 in eindeutiger Weise ein Element von A_2 zuordnet. Im Beispiel (1) wird einer Aussage aus A_2 eine andere Aussage, ebenfalls aus A_2, eindeutig zugeordnet. Aus diesem Grunde können wir auch das Wort Aussagenfunktion anstelle Aussagenverbindung benutzen.

Nr.	Aussagenverbindung	Kurzzeichen	Name
1	nicht p	$\bar{p}$	Negation
2	p und q	$p \wedge q$	Konjunktion
3	p oder q	$p \vee q$	Alternative
4	wenn p, so q	$p \rightarrow q$	Implikation
5	p genau dann, wenn q	$p \leftrightarrow q$	Äquivalenz
6	entweder p oder q	-	Disjunktion
7	p weil q	-	-

Tabelle 3.1: Aussagenverbindungen

Die Aussagenverbindungen (2) bis (7) in der Tabelle 3.1 sind zweistellige Aussagenverbindungen, da sie je zwei Aussagen aus A_2 eine neue Aussage aus A_2 eindeutig zuordnen. Die Negation kann als einstellige Aussagenverbindung aufgefaßt werden. Die Begriffe Alternative und Disjunktion werden in der Literatur unterschiedlich verwendet.

Mit diesen ein- und zweistelligen Aussagenverbindungen ist aber die Menge der Verknüpfungen von Aussagen noch keineswegs erschöpft. Oft ist es zur Beschreibung mathematischer Sachverhalte notwendig, Aussagenverbindungen zu betrachten, die aus mehr als zwei Teilaussagen zusammengesetzt werden.

Beispiel 3.5

(Wir benutzen die Kurzschreibweise, um die Struktur der Aussagenverbindung deutlicher hervorzuheben):

$$(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s) \tag{3.1}$$

$$((p \vee q \vee r) \wedge (p \rightarrow s) \wedge (q \rightarrow s) \wedge (r \rightarrow s)) \rightarrow s \tag{3.2}$$

Mit Worten bedeutet (3.1): Wenn p und q gelten, so gilt auch r oder s. Dabei kann man sich für p, q, r, s beliebige Aussagen aus A_2 eingesetzt denken.

Allgemein gesprochen, können wir also mit Hilfe von Bindewörtern n Aussagen aus A_2 eine neue Aussage aus A_2 zuordnen, die wir dann *n-stellige Aussagenverbindung* nennen. Die konkrete Art der Verbindung nennen wir die *logische Struktur* der Aussage. Zu dieser logischen Struktur gehören insbesondere auch die Klammern.

Nun können wir die folgende entscheidende Fragestellung der Logik formulieren. auf der dann alle anderen Untersuchungen aufbauen: Wie beeinflußt die logische Struktur den Wahrheitswert der Aussagenverbindung? Dabei fordert man: Der Wahrheitswert der Aussagenverbindung soll nur abhängen

1. von den Wahrheitswerten der eingehenden Teilaussagen und

und

2. von der logischen Struktur der Aussagenverbindung.

Er soll aber nicht vom konkreten Sinn der in der Aussagenverbindung verknüpften Teilaussagen abhängen. Aussagenverbindungen, die diese Forderung erfüllen, heißen *extensional* (Extension - Ausdehnung); alle anderen heißen *intensionale* Aussagenverbindungen (Intension - Sinn).

Die Aussagenverbindungen 1 bis 6 unserer Tabelle 3.1 werden als extensional aufgefaßt. Dagegen beschreibt zum Beispiel „weil“ eine intensionale Aussagenverbindung, was man sich anhand eines Beispiels überlegen kann [14].

3.3.2 Wahrheitstabellen der elementaren Aussagenverbindungen

Im folgenden beschäftigen wir uns nur noch mit extensionalen Aussagenverbindungen und wollen zunächst für die Aussagenverbindungen 1) bis 6) aus

Tabelle 3.1 den Wahrheitswert bestimmen. Da diese extensional sind, genügt es, für jede Kombination von Wahrheitswerten (aus $\{W, F\}$) der eingehenden Teilaussagen den Wahrheitswert der Aussagenverbindung anzugeben.

p	F	W
$\bar{p}$	W	F

Tabelle 3.2: Wahrheitstabelle der Negation

In der ersten Zeile dieser Tabelle steht links das Symbol p für die Aussage, recht daneben die beiden möglichen Wahrheitswerte für $p : F, W$. Die zweite Zeile enthäl links das Symbol $\bar{p}$ für die Negation, daneben die Wahrheitswerte für $\bar{p}$, d. h., gil $w(p) = F$, so ist $w(\bar{p}) = W$, und für $w(p) = W$ wird $w(\bar{p}) = F$. Diese Tabelle, die wir Wahrheitstabelle nennen, gibt also die Zuordnung spaltenweise an.

p	F	W	F	W
q	F	F	W	W
$\wedge$	F	F	F	W

Tabelle 3.3: Wahrheitstabelle der Konjunktion

Da wir es hier mit einer zweistelligen Aussagenverbindung zu tun haben, gibt es $2^2 = 4$ Kombinationen (Paare) von Wahrheitswerten (s. Abschnitt 6.). Jedem solchen Paar entspricht wieder eine Spalte der Tabelle, wobei in der letzten Zeile der zugehörige Wahrheitswert von $p \wedge q$ aufgeschrieben ist. Wir sehen, daß die Konjunktion genau dann wahr ist, wenn beide durch *und* verbundenen Teilaussagen wahr sind. Entsprechend definieren wir die Wahrheitstabellen der anderen Aussagenverbindungen.

p	F	W	F	W
q	F	F	W	W
$\vee$	F	W	W	W

Tabelle 3.4: Wahrheitstabelle der Alternative

p	F	W	F	W
q	F	F	W	W
$\rightarrow$	W	F	W	W

Tabelle 3.5: Wahrheitstabelle der Implikation

p	F	W	F	W
q	F	F	W	W
$\leftrightarrow$	W	F	F	W

Tabelle 3.6: Wahrheitstabelle der Äquivalenz

p	F	W	F	W
q	F	F	W	W
entweder p oder q	F	W	W	F

Tabelle 3.7: Wahrheitstabelle der Disjunktion

* Aufgabe 3.1

Man gebe die Wahrheitstabellen der Aussagenverbindungen $\overline{p \wedge q}$ (Shefferschen Funktion) bzw. $\overline{p \vee q}$ (Nicodsche Funktion) an!

Zu diesen Tabellen sollen noch einige Bemerkungen gemacht werden. Der *Implikation* wird nur dann der Wahrheitswert F zugeordnet, wenn die erste Teilaussage p (Voraussetzung) wahr, aber die zweite Teilaussage q (Behauptung) falsch ist.

Beispiel 3.6

Die Aussage „Wenn 3 eine Primzahl ist, so ist 10 durch 3 teilbar“ ist offenbar falsch. Die Aussage „Wenn 4 eine Primzahl ist, so ist 10 durch 3 teilbar“ wird dagegen als wahr angesehen.

Bemerkenswert ist auch der Unterschied zwischen *Alternative* und *Disjunktion.* Die Alternative stellt ein einschließendes, die Disjunktion ein ausschließendes oder dar.

Betrachten wir noch die folgenden zwei Aussagen

$p =$ „$2 \cdot 2 = 4$“ oder „Berlin ist die Hauptstadt der UdSSR“

$q =$ Wenn „$2 \cdot 2 = 5$“ ist, so „ist die Erde ein Planet“

Aussagenverbindungen dieser Art sind häufig insbesondere philosophischer Kritik ausgesetzt. Im Sinne der Logik handelt es sich jedoch bei p und q um wahre Aussagen, obwohl diese Aussagenverbindungen rein inhaltlich gesehen völlig sinnlos sind. Im Sinne einer völligen Allgemeinheit der zur Aussagenverbindung zugelassenen Aussagen aus A_2 ist es aber legitim, auch Verbindungen der obigen Art zu bilden.

Es ist zweckmäßig, die Tabellen 3.1 bis 3.7 gut im Gedächtnis zu behalten, da sie Bausteine für nachfolgende Überlegungen sind.

3.3.3 Wahrheitstabellen n-stelliger $(n > 2)$ Aussagenverbindungen

Die Wahrheitstabellen ordnen jeder Kombination (bisher jedem Paar) von Wahrheitswerten eindeutig einen Wahrheitswert zu. Diese Zuordnung ist spaltenweise in den Tabellen rechts vom vertikalen Strich dargestellt. Die Tabellen repräsentieren also Funktionen (siehe auch Abschnitt 8.), die man auch Wahrheitsfunktionen nennt. Am Beispiel der 4-stelligen Aussagenverbindung

$$(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s) \tag{3.3}$$

wollen wir jetzt noch zeigen, wie man mit Hilfe der in 3.3.2 angegebenen Wahrheitstabellen die Wahrheitstabelle einer mehr als zweistelligen Aussagenverbindung bestimmt.

Zunächst kann man sich überlegen, daß es $2^4 = 16$ verschiedene Kombinationen von Wahrheitswerten gibt. Diese werden in zweckmäßiger Reihenfolge im Kopf der Tabelle aufgeschrieben. Betrachten wir die Struktur von (3.3), so sehen wir, daß wir es mit einer Aussagenverbindung $t \rightarrow u$ mit $t = p \wedge q, u = r \vee s$ zu tun haben. Dies gibt uns die Möglichkeit, die Wahrheitstabelle schrittweise, wie nachfolgend dargestellt, aus den schon bekannten Bausteinen aufzubauen.

p	F	W	F	W	F	W	F	W	F	W	F	W	F	W	F	W
q	F	F	W	W	F	F	W	W	F	F	W	W	F	F	W	W
r	F	F	F	F	W	W	W	W	F	F	F	F	W	W	W	W
s	F	F	F	F	F	F	F	F	W	W	W	W	W	W	W	W
$t = p \wedge q$	F	F	F	W	F	F	F	W	F	F	F	W	F	F	F	W
$u = r \vee s$	F	F	F	F	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W
$t \rightarrow u$	W	W	W	F	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W

Tabelle 3.8: Wahrheitstabelle der Aussagenverbindung $(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$

Wir sehen also, daß $t \rightarrow u$ nur bei genau einer der 16 möglichen Wahrheitswertkombinationen falsch wird. Insbesondere ist also auch eine Aussage wie

> „Wenn $2 \cdot 2 = 3$ und 4 eine Primzahl ist, so ist auch 5 eine Primzahl oder $8^2 = 60$“

eine wahre Aussage.

Mit Hilfe der Ergebnisse aus Abschnitt 6.3.2. kann man sich leicht überlegen, daß bei einer n-stelligen Aussagenverbindung die Wahrheitstabelle 2^n Spalten enthält. Um diese aufzuschreiben ist es zweckmäßig, folgendermaßen vorzugehen (siehe auch Tabelle 3.8, $n = 4$):

Man schreibe in die erste Zeile die Zweiergruppen $FW\ldots$, in die zweite die Vierergruppen $FFWW\ldots$, in die dritte die Achtergruppen $FFFFWWWW\ldots$ usw. Auf diese Weise erhält man, wie man sich leicht überlegen kann, alle 2^n Spalten, und man ist damit in der Lage, die gewünschte Wahrheitstabelle anzugeben.

*** Aufgabe 3.2**

> Folgt aus dem Satz „Wenn Peter Mathematik studiert, so studiert er auch Operationsforschung oder Kybernetik" und „Peter studiert nicht Operationsforschung" und „Peter studiert Mathematik oder Operationsforschung oder Kybernetik" der Satz: „Peter studiert Kybernetik"?

3.3.4 Verbindungen von Aussageformen

Auch Aussageformen lassen sich durch Bindewörter neuen Aussageformen zuordnen. Dabei ist nur zu sichern, daß bei Einsetzung eines beliebigen konkreten Wertes x_1 der Variablen x mit dem Bereich X die „Aussageformverbindung" in eine Aussage aus A_2 übergeht.

Beispiel 3.7

$X = \{1; 2; 3; 4; 5; 5,1; 5,2; 6\}$

1. $p(x) =$ „x ist eine ganze Zahl, und x ist größer als 4".

   Es gilt: $w(p(5)) = w(p(6)) = W, w\left(p\left(x_1\right)\right) = F$ für $x_1 \in X, x_1 \neq 5; 6$.

2. $p(x) =$ „Wenn x eine ganze Zahl ist, so ist x größer als 4".

   Es gilt: $w(p(1)) = w(p(2)) = w(p(3)) = w(p(4)) = F$, $w(p(5)) = w(p(5,1)) = w(p(5,2)) = w(p(6)) = W$.

Allgemein können wir folgendes feststellen:

Man kann zum Beispiel durch

$$\overline{p(x)}, p(x) \wedge q(x), p(x) \vee q(x), p(x) \rightarrow q(x),$$
$$p(x) \leftrightarrow q(x), \qquad \textit{entweder } p(x) \textit{ oder } q(x)$$

Aussageformverbindungen bilden, die für jedes $x = x_1 \in X$ in Aussagenverbindungen übergehen. Es können darüberhinaus auch n-stellige Aussageformverbindungen gebildet werden.

*** Aufgabe 3.3**

> Man gebe die Aussageformverbindung „Falls n eine Primzahl ist, so teilt 3 eine der Zahlen $n - 1$ oder $n + 1$" mittels logischer Zeichen an und stelle für ein beliebiges festes n die Wahrheitstabelle auf!

Bisher haben wir nur die technischen Realisierungen der grundlegenden Verknüpfungen angegeben.

Im allgemeinen steht aber die Frage, komplizierte Aussagenverbindungen auf der Basis dieser Grundverknüpfungen schaltungstechnisch zu realisieren und dabei möglichst geringen Aufwand zu treiben. Wir wollen das an zwei Beispielen illustrieren. Die Aussagenverbindungen

bzw.

$$p \wedge (p \vee q) \text{ und } p$$

$$p \vee (q \wedge r) \text{ und } (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

besitzen die gleichen Wahrheitstabellen, realisieren also logisch gleichwertige Aussagenverbindungen. Das hat zur Folge, daß die Wahrheitswerttabellen der Aussagenverbindungen