Ware unbeschränkt ist. Wurden dann m_1 bzw. m_2 Mengeneinheiten der Ware verkauft und wurde dabei ein Erlös von $E_1 = pm_1$ bzw. $E_2 = pm_2$ Geldeinheiten erzielt, so ist der Erlös E für den Verkauf von $a_1m_1 + a_2m_2$ Mengeneinheiten gleich $a_1E_1 + a_2E_2$ (a_1, a_2 seien natürliche Zahlen). Mit anderen Worten, der Linearkombination (vgl. Abschnitt 7.7.) der verkauften Mengeneinheiten entspricht die gleiche Linearkombination der Erlöse. Damit ist zugleich das Wesen der Linearität von Abbildungen herausgearbeitet. Es kann wie folgt charakterisiert werden: das Bild einer beliebigen Linearkombination von Originalen der Abbildung ist gleich der entsprechenden Linearkombination der Bilder dieser Originale (siehe hierzu insbesondere (8.8)). Allgemein werden wir im weiteren unter linearen Abbildungen folgendes verstehen:

D.8.3 **Definition 8.3:** *Eine Abbildung A aus einer Menge M in eine Menge N mit dem Definitionsbereich D_A heißt* **linear**, *wenn*

1. *D_A ein linearer Raum ist und*

2. *mit $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$ für beliebige reelle Zahlen a_1, a_2 auch*

$$(a_1x_1 + a_2x_2, a_1y_1 + a_2y_2) \in A \tag{8.6}$$

gilt.

Als Erläuterung zu dieser Definition sei folgendes erwähnt. Jede beliebige Abbildung A aus M in N ist eine Teilmenge geordneter Paare (x, y) mit $x \in M$ und $y \in N$. Die Tatsache, daß dabei y Bild des Originals x ist, wird auch durch die Schreibweise

$$Ax = y \quad \text{oder} \quad A(x) = y \tag{8.7}$$

zum Ausdruck gebracht. Unter Verwendung dieser Schreibweise kann man die Forderung (8.6) nun so formulieren:

$$A(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1A(x_1) + a_2A(x_2). \tag{8.8}$$

Das ist auch die Form, die bei praktischen Überprüfungen der Linearität gegebener Abbildungen häufig benutzt wird.

Schon hier sei darauf hingewiesen, daß im folgenden noch eine Reihe linearer Abbildungen auftreten werden. Dazu gehören u. a. die Abbildungen, die den differenzierbaren Funktionen deren Ableitungen, den integrierbaren Funktionen deren Integrale und den Vektoren eines linearen Raumes bei der Multiplikation mit Matrizen wiederum Vektoren des gleichen oder eines anderen Raumes zuordnen.

* *Aufgabe 8.13:* Man untersuche, welche der folgenden Abbildungen linear ist:

$$A_1 = \{(x, y) \mid x \in R^1 \wedge y \in R^1 \wedge y = 3x + 4\};$$
$$A_2 = \{(x, y) \mid x \in R^1 \wedge y \in R^1 \wedge y = 2x\};$$
$$A_3 = \{(x, y) \mid x \in [-3{,}4] \wedge y \in R^1 \wedge y = 2x\}.$$

Abschließend sei noch erwähnt, daß der Begriff der Linearität für gewisse Spezialklassen von Abbildungen wie Operatoren und Funktionale (vgl. Abschnitt 8.4.) in der Literatur nicht einheitlich verwendet wird. Einige Autoren fassen die Linearität von Operatoren enger auf und fordern zusätzlich zu den von uns genannten Bedingungen noch die Stetigkeit bzw. Beschränktheit des Operators (vgl. [13]).

8.3. Umkehrabbildung

In der Praxis ergibt sich bei der Untersuchung der Beziehungen zwischen zwei Größen oft folgendes Problem. Unter einem Gesichtspunkt ist die eine der Größen das Original und die andere deren Bild, während es unter einem anderen Gesichts-