D.8.5 **Definition 8.5:** *Eine Abbildung $A \subseteq M \times N$ wird* **eindeutig** *genannt, wenn aus $(x, y_1) \in A$ und $(x, y_2) \in A$ immer $y_1 = y_2$ folgt.*

D.8.6 **Definition 8.6:** *Jede eindeutige Abbildung wird* **Funktion** *genannt.*

Hiernach ist durchaus nicht jede Abbildung eine Funktion, so daß die Menge aller Funktionen echt in der Menge aller Abbildungen enthalten ist. Eine Funktion zeichnet sich unter den Abbildungen also vor allem dadurch aus, daß zu jedem ihrer Originale jeweils nur ein einziges Bild gehört.

Beispiel 8.6: Es sei M die Menge aller n-Tupel reeller Zahlen $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x$; zu jedem dieser n-Tupel kann man durch die Formel

$$||x|| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \tag{8.10}$$

eine reelle Zahl $||x||$ definieren. Wir erwähnen, daß diese Zahl auch l_1-Norm von x genannt wird (vgl. Bd. 22). Offensichtlich ist die Zahl $||x||$ durch (8.10) eindeutig bestimmt. Daher ist durch die Menge aller Paare $(x, ||x||) \in M \times R^1$ eine eindeutige Abbildung A, d. h. eine Funktion aus M in R^1 definiert. Die Umkehrabbildung

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \{(z, x) \mid z \in R^1 \wedge x \in M \wedge (x, z) \in A\} \\ &= \{(z, x) \mid z \in R^1 \wedge x \in M \wedge z = ||x||\} \end{aligned}$$

ist jedoch nicht mehr eindeutig, denn man überzeugt sich leicht, daß z. B. zu jedem fixierten $z \in R^1$, $z > 0$, die Bilder $x^1 = (z, 0, \ldots, 0)$, $x^2 = (0, z, 0, \ldots, 0)$, $x^3 = \left(\frac{z}{n}, \frac{z}{n}, \ldots, \frac{z}{n}\right)$ gehören. Daher ist A^{-1} zwar eine Abbildung, jedoch keine Funktion.

Beispiel 8.7: Wird jeder natürlichen Zahl $i \in \mathbf{N}^+ = \{1, 2, \ldots\}$ durch eine gewisse Aussageform $p(i, a)$, z. B. in Form einer Formel wie $a = (1 + i)^{-1}$, eine eindeutig bestimmte Zahl zugeordnet, so ist dadurch eine Funktion

$$A = \{(i, a) \mid i \in \mathbf{N}^+ \wedge a \in R^1 \wedge p(i, a)\}$$

oder – wie für die konkret genannte Formel –

$$A = \{(i, a) \mid i \in \mathbf{N}^+ \wedge a \in R^1 \wedge a = (1 + i)^{-1}\}$$

erklärt. Derartige spezielle Funktionen nennt man auch (unendliche) **Zahlenfolgen**. In Abschnitt 10. wird dieser Begriff präzisiert und ausführlich untersucht.

Es sei noch bemerkt, daß der durch Definition 8.6 geprägte Begriff der Funktion durchaus umfassender ist als derjenige, der bei der Modellierung quantitativer Zusammenhänge verwendet wird. Hierzu diene die folgende Aufgabe als Erläuterung.

* *Aufgabe 8.15:* Es sei M die Menge aller Maschinen in einer Betriebshalle und N die Menge aller Arbeiter, die diese Maschinen bedienen. Dabei mögen einzelne Arbeiter auch mehrere Maschinen bedienen, jedoch soll jede einzelne Maschine immer nur vom gleichen Arbeiter bedient werden (man denke an die Mehr-Maschinen-Bedienung bei Webeautomaten). Bildet man nun aus jeder Maschine m und dem Arbeiter a, der sie bedient, Paare (m, a), dann ist damit eine Abbildung $A \subseteq M \times N$ gegeben. Man untersuche, ob diese Abbildung eine Funktion ist.

Der Begriff der Funktion kann seinerseits noch weiter spezifiziert werden. Dazu werden zunächst an Definitions- und Wertebereiche der Funktion weitere Forderungen gestellt.