Die hier unter 1. bis 5. genannten Funktionen werden wir im weiteren **Grundfunktionen** nennen. Diese wenigen Funktionen bilden die Ausgangselemente für die Konstruktion der sogenannten elementaren Funktionen (vgl. Abschnitt 9.5.). Letztere sind bereits so verschiedenartig, daß man mit ihnen in vielen Untersuchungen auskommt. Ergänzt man sie noch durch die zusammengesetzten Funktionen (vgl. Abschnitt 9.1., insbesondere (9.18) und (9.19)), so erhält man bereits die Menge der Funktionen, die vielen praktischen Anforderungen genügt und die daher im Mittelpunkt der Untersuchungen der folgenden Bände über Funktionen steht.

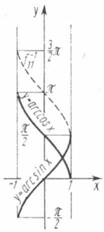

Bild 9.11a.
Arkussinus- und
Arkuskosinusfunktion

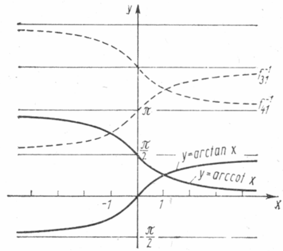

Bild 9.11b.
Arkustangens- und
Arkuskotangensfunktion

9.5. Mittelbare und elementare Funktionen

Wie bereits im vorhergehenden Abschnitt angedeutet, gehen wir jetzt dazu über, aus den Grundfunktionen neue Funktionen zu konstruieren. Die einfachste Möglichkeit hierzu besteht darin, sie durch die vier Grundrechenarten miteinander zu „verknüpfen". Wie dabei vorzugehen ist, wurde bereits am Ende von Abschnitt 9.1. dargelegt. Unter den Funktionen, die auf diese Weise gebildet werden, seien einige erwähnt.

1. *Ganze rationale Funktionen*

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n, \quad x \in R^1; \tag{9.54}$$

hierbei ist n eine natürliche Zahl und a_i, $i = 0, 1, \dots, n$, sind gewisse feste reelle Zahlen. Funktionen der Art (9.54) nennt man auch *Polynome vom Grade n* (wenn $a_n \neq 0$). Nehmen zwei Polynome $P(x)$ und $R(x)$ vom Grade n für mehr als n x-Werte gleiche Werte an: $P(x_i) = R(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, r$ $(r > n)$, dann sind sie identisch, d. h., dann gilt $P(x) \equiv R(x)$ für alle $x \in R^1$. Für Polynome sind häufig – ähnlich wie für beliebige andere Funktionen – die sog. Nullstellen (vgl. Abschnitt 9.1.) von besonderem Interesse. Wie das Beispiel der Exponentialfunktion zeigt, besitzen durchaus nicht alle Funktionen Nullstellen. Dehnt man jedoch den Definitionsbereich der Polynome auf die Menge aller komplexen Zahlen aus, so gilt die Aussage (*Fundamentalsatz der Algebra*):

Jedes Polynom n-ten Grades hat in der Menge der komplexen Zahlen wenigstens eine Nullstelle, wenn $n \geqq 1$ ist. Ist $P(x)$ ein Polynom n-ten Grades und x_1 eine Null-