stelle von $P(x)$, dann überzeugt man sich durch entsprechende Polynomdivision, daß die Darstellung

$$P(x) = (x - x_1)\, R(x)$$

gilt, wobei $R(x)$ ein Polynom nur noch $(n - 1)$-ten Grades ist. Eine analoge Darstellung kann man nun auch für $R(x)$ angeben. Setzt man diese Überlegung fort, so erhält man schließlich für $P(x)$ eine Darstellung der Form

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n),$$

die *Zerlegung des Polynoms in Elementarfaktoren* genannt wird; dabei sind die x_1, $x_2, \ldots, x_n$ genau alle Nullstellen von $P(x)$. Tritt eine Nullstelle x_i in dieser Zerlegung genau einmal auf, so wird x_i *einfache Nullstelle* von $P(x)$ genannt; tritt eine Nullstelle x_j jedoch n_j-mal auf, so heißt x_j *mehrfache Nullstelle* der *Vielfachheit* n_j. Daher kann die Zerlegung in Elementarfaktoren auch so geschrieben werden:

$$P(x) = a_n(x - x_1)^{n_1} (x - x_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_k)^{n_k}; \tag{9.55}$$

dabei sind die n_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, gewisse natürliche Zahlen mit $n_j \geqq 1$ und $\sum\limits_{j=1}^{k} n_j = n$. Deshalb sagt man auch, daß ein Polynom n-ten Grades genau n Nullstellen hat, wobei man die mehrfachen Nullstellen entsprechend ihrer Vielfachheit zählt.

2. *Gebrochen rationale Funktionen* ergeben sich als Quotient zweier Polynome

$$y = \frac{P_n(x)}{R_m(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m}; \tag{9.56}$$

der Definitionsbereich besteht aus all denjenigen x, für die das Nennerpolynom verschieden von null ist. Im weiteren bezeichnen wir die rechte Seite von (9.56) kurz mit $Q(x)$. In Abhängigkeit davon, ob der Grad des Zählerpolynoms von $Q(x)$ größer oder kleiner als der des Nennerpolynoms ist, werden die gebrochen rationalen Funktionen weiter unterschieden: ist $n \geqq m$, so heißt die rationale Funktion (9.56) *unecht gebrochen*, dagegen wird sie für $n < m$ *echt gebrochen* genannt. Durch entsprechende Polynomdivision kann jede unecht gebrochen rationale Funktion als Summe eines Polynoms vom Grade $n - m$ und einer echt gebrochen rationalen Funktion dargestellt werden.

Die Nullstellen des Nennerpolynoms haben eine besondere Bedeutung für gebrochen rationale Funktionen, obwohl sie aus deren Definitionsbereich ausgeschlossen sind. Ist eine Nullstelle x_1 des Nennerpolynoms auch gleichzeitig Nullstelle des Zählerpolynoms von $Q(x)$, so wird dadurch eine sogenannte *Lücke* definiert. Ist dagegen x_1 eine Nullstelle der Vielfachheit m_1 des Nennerpolynoms, jedoch keine Nullstelle des Zählerpolynoms, so wird dadurch ein *Pol der Ordnung* m_1 definiert. Lücken und Pole sind ihrerseits noch detaillierter zu charakterisieren.

Es sei x_1 ein Pol von $Q(x)$. Ist seine Ordnung m_1 eine gerade Zahl, so nimmt $Q(x)$ in der Umgebung von x_1 nur beliebig große Werte gleichen Vorzeichens an; ist m_1 dagegen ungerade, so nimmt $Q(x)$ in der Umgebung von x_1 sowohl beliebig große positive als auch negative Werte an. Als einfachste Beispiele seien hierfür die gleichseitigen Hyperbeln $y = x^{-n}$, $x \neq 0$, genannt; sie haben für beliebiges $n \in \mathbf{N}^+$ in $x_1 = 0$ einen Pol der Ordnung n (für $n = 1, 2, 3$ siehe Bild 9.7). Die Bilder 9.12a