und 9.12b zeigen die verschiedenen Möglichkeiten für Pole gerader und ungerader Ordnung.

Wenn x_1 eine Lücke von $Q(x)$ darstellt, dann gilt $P_n(x_1) = R_m(x_1) = 0$, und es seien n_1 bzw. m_1 die Vielfachheiten der Nullstelle x_1 von P_n bzw. R_m. Hier sind

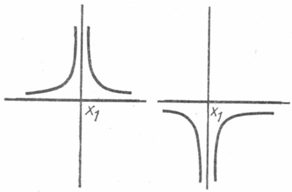

Bild 9.12a.
Pole gerader Ordnung

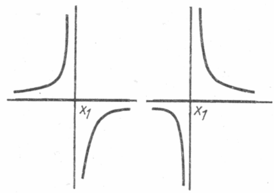

Bild 9.12b.
Pole ungerader Ordnung

folgende Fälle zu unterscheiden. Für $n_1 \geqq m_1$ liegt in x_1 eine sogenannte *hebbare Unstetigkeit* von $Q(x)$ vor; dabei verhält sich $Q(x)$ für $n_1 > m_1$ in der Umgebung von x_1 wie in der Umgebung einer Nullstelle von $Q(x)$. Für $n_1 < m_1$ verhält sich $Q(x)$ in der Umgebung von x_1 dagegen wie in der Umgebung eines Pols der Ordnung $m_1 - n_1$.

* *Aufgabe 9.12:* Von der gebrochen rationalen Funktion

$$y = \frac{x^2 - x - 12}{x^4 - 3x^3 - 4x^2}$$

sind Nullstellen, Pole und Lücken zu ermitteln. Für Nullstellen und Pole sind deren Ordnung anzugeben; die Lücken sind näher zu charakterisieren.

3. *Hyperbolische Funktionen*

$$\begin{aligned}
y &= \sinh x \quad \text{mit} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in (-\infty\ +\infty),\\
y &= \cosh x \quad \text{mit} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in (-\infty, +\infty),\\
y &= \tanh x \quad \text{mit} \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in (-\infty, +\infty),\\
y &= \coth x \quad \text{mit} \quad \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).
\end{aligned} \tag{9.57}$$

Gelesen werden diese Funktionen als hyperbolischer Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens. Zwischen ihnen bestehen ähnliche Beziehungen wie zwischen den trigonometrischen Funktionen. Dabei ist zu beachten, daß sie im Zusammenhang mit dem hyperbolischen Kotangens für $x = 0$ nicht gelten, während sie sonst immer für alle