chung $(e^x)^2 - 2y\,e^x - 1 = 0$; aus ihr folgt zunächst $e^x = y \pm \sqrt{y^2+1}$, wobei jedoch das Minuszeichen ausgeschlossen werden muß, weil $e^x > 0$ für alle $x \in R^1$ gilt; wendet man nun noch den Logarithmus auf beide Seiten an und vertauscht x und y, so erhält man die Umkehrfunktion $y = \operatorname{arsinh} x$ in der angegebenen Form. Zum hyperbolischen Areakosinus muß allerdings bemerkt werden, daß er nur die Umkehrfunktion von $y = \cosh x$, $x \geqq 0$, darstellt; die Umkehrfunktion des „Zweiges“ $y = \cosh x$, $x \leqq 0$, ist durch $y = -\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) = \ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$, $x \in [1, +\infty)$ gegeben. Die Graphen aller Areafunktionen erhält man durch entsprechende Spiegelung (vgl. Abschnitt 9.2. und Bilder 9.13a, 9.13b). Die Vorsilbe „Area“ in der Bezeichnung dieser Funktionen kommt von dem Wort „Fläche“ und wurde gewählt, weil die Areafunktionen bei der Berechnung der Flächen von Hyperbelsektoren auftreten.

Funktionen kann man nicht nur mittels der vier Grundrechenarten miteinander verknüpfen, sondern auch dadurch, daß man das Argument einer Funktion durch eine andere Funktion ersetzt. Auf diese Weise entsteht z. B. aus

$$y = \sqrt{u}, \quad u \in [0, +\infty), \qquad \text{und} \qquad u = 1 + x^2, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

die neue Funktion

$$y = \sqrt{1 + x^2}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Man spricht in diesem Zusammenhang von mittelbaren Funktionen. Sie können nicht völlig beliebig gebildet werden. Es gilt die

D.9.11 **Definition 9.11:** *Es seien*

$$y = f(u), \quad u \in D_f, \quad \textit{und} \quad u = g(x), \quad x \in D_g,$$

zwei beliebige Funktionen. Wenn dabei $W_g \subseteqq D_f$ gilt, dann kann die neue Funktion

$$y = f(g(x)), \qquad x \in D_g,$$

gebildet werden; sie wird **mittelbare Funktion** *oder* **Verkettung** *der Funktionen f und g genannt.*

Die Forderung $W_g \subseteqq D_f$ ist wesentlich, denn sonst kann es zu sinnlosen Termen kommen.

* *Aufgabe 9.13:* Man gebe für den Definitionsbereich D_f der Funktion $u = 1 - x^2$, $x \in D_f$, ein maximales Intervall I derart an, daß die mittelbare Funktion $y = \ln(1 - x^2)$, $x \in I$, sinnvoll ist.

Jetzt können wir den Begriff der elementaren Funktion einführen.

D.9.12 **Definition 9.12:** *Jede Funktion, die sich durch endlich viele Operationen der Grundrechenarten sowie durch Verkettung aus den Grundfunktionen darstellen läßt, nennt man* **elementare Funktion**.

Außerhalb der Menge der elementaren Funktionen liegt u. a. noch die Menge der zusammengesetzten Funktionen (vgl. Abschnitt 9.1.). Die Vereinigung beider Mengen erfaßt zwar auch noch nicht alle existierenden Funktionen, ist aber dennoch bereits so umfangreich, daß sie für viele praktische Probleme ausreicht.