9.6. Interpolation (Newton)

Allgemein besteht die Interpolation darin, eine gegebene Funktion f durch Vertreter einer gewissen Klasse von Funktionen (z. B. Polynome eines gewissen Grades oder trigonometrische Funktionen mit unterschiedlichen Perioden) so anzunähern, daß f und ihre Näherungs- oder Interpolationsfunktion in gegebenen Punkten gleich sind (ausführlichere Behandlung dieses Gebietes siehe [2]). Bevorzugt werden Polynome als Interpolationsfunktionen verwendet, denn sie erweisen sich in vielen Beziehungen als besonders einfach. So sind z. B. zur Berechnung der Funktionswerte eines Polynoms nur die Grundrechenarten Addition, Subtraktion und Multiplikation erforderlich.

Dieser Abschnitt ist der Interpolation durch Polynome gewidmet. Die dabei bestehende Aufgabe läßt sich wie folgt formulieren: Gegeben seien $n + 1$ Zahlenpaare (x_i, y_i), $i = 0, 1, 2, \ldots, n$; es ist ein Polynom

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \tag{9.59}$$

zu bestimmen, das diese Zahlenpaare enthält. Mit anderen Worten, für $P_n(x)$ soll gelten

$$P_n(x_i) = y_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{9.60}$$

Hierbei werden die x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, *Stützstellen* und die y_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, *Stützwerte* genannt. Wir setzen voraus, daß die Stützstellen alle paarweise verschieden sind. Man beachte schließlich noch, daß der Grad des gesuchten Polynoms (9.59) zunächst gleich n, d. h. um eins kleiner als die Anzahl der Stützstellen, gesetzt wird.

Zu einer solchen Aufgabenstellung kann man auf verschiedenen Wegen gelangen. Zwei Möglichkeiten davon seien hier genannt. Eine ergibt sich, wenn man zu einer Meßreihe (vgl. etwa (9.16)) ein entsprechendes Interpolationspolynom konstruieren will. Eine andere erhält man, wenn eine gegebene Funktion $y = f(x)$, $x \in D_f$, durch ein Interpolationspolynom angenähert werden soll. In diesem Falle muß man sich aber erst eine Wertetabelle schaffen; ihr kann man dann die Zahlenpaare (x_i, y_i), $i = 0, 1, \ldots, n$, entnehmen. Es kann gezeigt werden: Für die gestellte Aufgabe existiert immer genau ein Interpolationspolynom der Art (9.59).

Das Interpolationspolynom kann auf verschiedenen Wegen konstruiert werden. Dabei ergeben sich Formen des Polynoms, die sich von (9.59) zwar äußerlich unterscheiden, sich jedoch alle wieder auf (9.59) zurückführen lassen. Eine besonders elegante Form geht auf Newton zurück. Erwähnt sei hier noch das Interpolationspolynom von Lagrange.

Nach Newton wird das Interpolationspolynom für die Stützzahlenpaare (x_i, y_i), $i = 0, 1, \ldots, n$, in der Form

$$\begin{aligned} P_n(x) = {} & c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots \\ & + c_n(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) \end{aligned} \tag{9.61}$$

angesetzt. Dabei sind c_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, zunächst noch unbekannte Zahlen. Zu ihrer Bestimmung werden die Forderungen (9.60) benutzt. Hiernach ergibt sich nämlich folgendes gestaffeltes lineares algebraisches Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} i = 0:\quad & y_0 = c_0 \\ i = 1:\quad & y_1 = c_0 + c_1(x_1 - x_0) \\ i = 2:\quad & y_2 = c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ i = n:\quad & y_n = c_0 + c_1(x_n - x_0) + c_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \ldots \\ & \qquad + c_n(x_n - x_0)(x_n - x_1) \ldots (x_n - x_{n-1}). \end{aligned} \tag{9.62}$$