Dieses Gleichungssystem kann sukzessive – beginnend bei der ersten Gleichung und fortschreitend bis zur letzten – gelöst werden. Dabei erhält man die Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots, c_n$ als sogenannte *Steigungen* oder dividierte Differenzen. Allgemein unterscheidet man 1., 2., ... Steigungen. Sie werden rekursiv wie folgt definiert:

1. Steigungen: $$[x_i x_{i+1}] = \frac{y_i - y_{i+1}}{x_i - x_{i+1}},$$

2. Steigungen: $$[x_i x_{i+1} x_{i+2}] = \frac{[x_i x_{i+1}] - [x_{i+1} x_{i+2}]}{x_i - x_{i+2}},$$

. . . . . . . . . . . . .

k. Steigungen: $$[x_i x_{i+1} \ldots x_{i+k}] = \frac{[x_i x_{i+1} \ldots x_{i+k-1}] - [x_{i+1} x_{i+2} \ldots x_{i+k}]}{x_i - x_{i+k}}. \tag{9.63}$$

Mit diesen Bezeichnungen gelten für die $c_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, die Formeln $c_1 = [x_0 x_1]$,

$$c_i = [x_0 x_1 \ldots x_i] = \frac{[x_0 x_1 \ldots x_{i-1}] - [x_1 x_2 \ldots x_i]}{x_0 - x_i}, \quad i = 2, 3, \ldots, n. \tag{9.64}$$

Somit nimmt das Polynom (9.61) die Form an

$$\begin{aligned} P_n(x) = y_0 &+ [x_0 x_1](x - x_0) + [x_0 x_1 x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots \\ &+ [x_0 x_1 \ldots x_n](x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}). \end{aligned} \tag{9.65}$$

* *Aufgabe 9.14:* Man zeige – ausgehend von (9.63) –, daß tatsächlich die folgende Formel gilt

$$c_2 = \frac{[x_0 x_1] - [x_1 x_2]}{x_0 - x_2}.$$

Das Polynom der Form (9.61) wird *Newtonsches Interpolationspolynom* genannt. Es hat einen großen Vorteil, denn es gilt

S.9.8 **Satz 9.8:** *Fügt man den Stützpaaren $(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, unter Beibehaltung ihrer Reihenfolge $k$ neue Stützpaare $(x_{n+j}, y_{n+j})$, $j = 1, 2, \ldots, k$, hinzu (um etwa den Grad des Interpolationspolynoms zu erhöhen), so ändern sich die Koeffizienten $c_0 = y_0$, $c_i = [x_0 x_1 \ldots x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, nicht, und es müssen lediglich die Koeffizienten $c_{n+j} = [x_0 x_1 \ldots x_{n+j}]$, $j = 1, 2, \ldots, k$, neu berechnet werden.*

Dieses Vorgehen wird im Beispiel 9.11 demonstriert. Es sei noch erwähnt, daß durch die Hinzunahme neuer Stützpaare der Grad des Polynoms durchaus nicht immer erhöht werden kann. Das ist nur dann möglich, wenn die neuen Stützpaare nicht zu dem bereits ermittelten Interpolationspolynom gehören.

*Beispiel 9.11:* Für die Stützpaare (0; 7), (3; −2), (4; 115) und (−2; 73) ist ein Newtonsches Interpolationspolynom zu ermitteln. Das entsprechende Gleichungssystem (9.62) lautet

$$\begin{aligned} i = 0{:}\quad & 7 = c_0, \\ i = 1{:}\quad & -2 = c_0 + 3c_1, \\ i = 2{:}\quad & 115 = c_0 + 4c_1 + 4(4 - 3)\,c_2 = c_0 + 4c_1 + 4c_2, \\ i = 3{:}\quad & 73 = c_0 - 2c_1 - 2(-5)\,c_2 - 2(-5)(-6)\,c_3 \\ & \phantom{73} = c_0 - 2c_1 + 10c_2 - 60c_3. \end{aligned}$$