Will man die Lage des Punktes auf der Kurve in jedem Augenblick $t > t_0$ eindeutig beschreiben, so ist das mit den rechtwinkligen x,y-Koordinaten nicht mehr möglich. Denn die Abbildung $A \subseteqq R^1 \times R^1$, die aus allen Paaren (x, y) besteht, wobei x und y die rechtwinkligen Koordinaten der Kurvenpunkte sind, ist offensichtlich nicht mehr eindeutig. Hier helfen folgende Betrachtungen. Die Lage des Punktes P ist in jedem Augenblick $t > t_0$ eindeutig bestimmt durch seinen Abstand $r(t)$ von P_0 und durch den Winkel $\varphi(t)$, den die Strecke $\overline{P_0P}$ mit der Horizontalen $\overline{P_0H}$ bildet:

$$r = r(t), \qquad \varphi = \varphi(t), \qquad t \geqq t_0; \tag{9.74}$$

dabei muß der Winkel $\varphi(t)$ allerdings nicht nur von 0 bis 2π, sondern – entsprechend der Häufigkeit der Drehungen um P_0 – von 0 bis $+\infty$ gerechnet werden.

Mit (9.74) ist ein Beispiel für eine Parameterdarstellung einer Kurve in Polarkoordinaten gegeben.

9.8. Anwendungen von Funktionen

Schon in den vorangegangenen Abschnitten wurden einige ausgewählte Aufgabenstellungen der Praxis betrachtet, deren mathematische Modellierung zu Funktionen führte (siehe Aufgabe 8.15, Beispiele 9.2 bis 9.4 und 9.6). Das Anliegen dieses Abschnittes besteht darin, durch weitere praktische Probleme zu zeigen, wie vielfältig die Anwendungsmöglichkeiten für Funktionen sind. Dabei werden wir in diesem Rahmen natürlich teilweise stark vereinfachende Voraussetzungen machen müssen.

Beispiel 9.13: Wir wenden uns den bekannten Hebelgesetzen zu und betrachten hierzu die Bilder 9.15a und 9.15b. Dabei seien die Längen l_1 und l_2 jeweils bekannt und konstant, wogegen die Kraft Q zwar auch bekannt, aber variabel sein möge. Gesucht ist dann eine solche Kraft P, die den Hebel im Gleichgewicht hält. Hierfür ist eine Funktion aufzustellen.

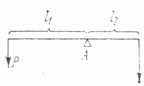

Bild 9.15a.
Hebel erster Art

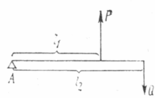

Bild 9.15b.
Hebel zweiter Art

Dazu benutzen wir das bekannte Hebelgesetz und bezeichnen die Größen der Kräfte P bzw. Q entsprechend mit p bzw. q. Dieses Gesetz besagt: Damit ein Hebel sich im Gleichgewicht befindet, müssen die Produkte aus Kraft mal entsprechender Länge des „Kraftarmes“ gleich sein (bei entsprechend gerichteten Kräften). Somit ergibt sich für Hebel beider Arten als Gleichgewichtsbedingung $pl_1 = ql_2$ oder

$$p = f(q) \quad \text{mit} \quad f(q) = \frac{l_2}{l_1} q, \qquad q \geqq 0. \tag{9.75}$$

In der Praxis findet das Hebelgesetz in seiner mathematischen Darstellung in Form der Funktion (9.75) vielfältige Anwendung. Genannt seien hier Seilwinden und Flaschenzüge. Bei beiden nutzt man unterschiedliche Radien für die Angriffspunkte von Last und Kraft aus (vgl. Bild 9.16). Für Bild 9.16 gilt dann z. B.

$$qr = pR \quad \text{oder} \quad p = \frac{r}{R} q.$$