Als Beispiel einer unbeschränkten Folge nennen wir die arithmetische Folge mit $d \neq 0$.

* *Aufgabe 10.7:* Es seien zwei beliebige beschränkte Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ gegeben. Sind dann auch die Folgen $\{c_n\}$, $c_n = a_n b_n$, und $\{d_n\}$, $d_n = a_n + b_n$, beschränkt?

Abschließend vertiefen wir die bisherigen Darlegungen durch folgende Bemerkungen.

1. Häufig trifft man die intuitive Vorstellung, daß streng monoton wachsende Folgen nicht beschränkt sind. Das ist jedoch i. allg. falsch, wie die geometrische Zahlenfolge für $a < 0$ und $0 < q < 1$ zeigt. Sie ist nämlich sowohl beschränkt (siehe Beispiel 10.6) als auch streng monoton wachsend (vgl. Lösung der Aufgabe 10.4).
2. Wenn die Folge $\{a_n\}$ eine der obengenannten Eigenschaften besitzt, so besitzt auch jede ihrer Teilfolgen diese Eigenschaft.

10.3. Nullfolgen und ihr Vergleich

Es gibt eine Klasse von Zahlenfolgen, die sich durch eine besondere Eigenschaft auszeichnen. Sie besteht darin, daß der Betrag des allgemeinen Gliedes einer solchen Folge „beliebig klein" wird. Präziser ist damit folgendes gemeint: Es sei ε eine beliebig kleine Zahl größer als Null (es kann z. B. $\varepsilon = 10^{-20}$ sein); dann existiert immer eine natürliche Zahl $N(\varepsilon)$ mit der Eigenschaft, daß $|a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geqq N(\varepsilon)$ gilt. Das Argument ε deutet hier an, daß die Zahl $N(\varepsilon)$ sich in Abhängigkeit von dem gewählten ε ändert. Eine solche Eigenschaft besitzt z. B. die Folge $\{a_n\}$ mit $a_n = \frac{1}{n^2}$. Für sie gilt nämlich $|a_n| = \frac{1}{n^2}$, so daß bei beliebigem $\varepsilon > 0$ immer $|a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geqq N(\varepsilon)$ folgt, wobei für $N(\varepsilon)$ die kleinste ganze Zahl gewählt werden kann, die noch größer ist als $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

In diesem Zusammenhang erweist es sich als nützlich, den Begriff der ε-Umgebung einer Zahl a anzuwenden (vgl. Abschnitt 7.8.). Wir bezeichnen sie mit $U_\varepsilon(a)$ und verstehen im weiteren darunter die Menge

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in R^1 \mid a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}; \tag{10.8}$$

dabei ist ε eine gewisse positive Zahl. Mit anderen Worten, wir bezeichnen hier mit $U_\varepsilon(a)$ das offene Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$:

$$U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, \ a + \varepsilon) \tag{10.9}$$

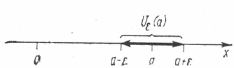

Bild 10.1.
Darstellung der ε-Umgebung der Zahl a

(vgl. Bild 10.1). Es sei bemerkt, daß $x \in U_\varepsilon(a)$ äquivalent ist mit

$$|x - a| < \varepsilon. \tag{10.10}$$