Mit Hilfe der ε-Umgebung läßt sich nun leicht folgender Begriff einführen:

Definition 10.3: *Eine Zahlenfolge* $\{a_n\}$ *heißt* **Nullfolge**, *wenn für jede positive Zahl* $\varepsilon > 0$ *eine natürliche Zahl* $N(\varepsilon)$ *derart existiert, daß* **D.10.3**

$$a_n \in U_\varepsilon(0) \quad \text{für alle} \quad n \geqq N(\varepsilon) \tag{10.11}$$

gilt.

Zur Erläuterung dieser Definition bemerken wir:

1. Die Forderung (10.11) ist gleichbedeutend damit, daß
$$|a_n| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \geqq N(\varepsilon) \tag{10.12}$$
ist. Somit sind Nullfolgen solche Zahlenfolgen, deren Glieder a_n mit wachsendem n dem Betrage nach „beliebig klein" werden, also auf der Zahlenachse beliebig nahe bei Null liegen. Daraus ist auch der Name „Nullfolge" abgeleitet.
2. Für die Definition der Nullfolge ist es von prinzipieller Bedeutung, daß (10.11) für *jede* positive Zahl ε gilt. So ist z. B. die Folge $\{a_n\}, a_n = \dfrac{2n+7}{30n}$, keine Nullfolge, obwohl man sich für $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$ zunächst davon überzeugen kann, daß
$$|a_n| < \frac{1}{10} \quad \text{für alle} \quad n \geqq 8$$
gilt. Wählt man nämlich ein kleineres ε, etwa $\varepsilon = \dfrac{1}{100}$, so folgt wegen $a_n > \dfrac{2n}{30n} = \dfrac{1}{15} > \dfrac{1}{100}$, daß die Bedingung $a_n \in U_\varepsilon(0)$ bei $\varepsilon = \dfrac{1}{100}$ für kein n erfüllt ist.
3. Von ebenso prinzipieller Bedeutung für die Definition der Nullfolge ist es, daß (10.11) *für alle* $n \geqq N(\varepsilon)$ gilt. So ist z. B. die Folge $\{a_n\}$, $a_n = 1 + (-1)^n$, keine Nullfolge, obwohl $a_n = 0$ für alle ungeraden $n = 1, 3, 5, \ldots$ gilt und somit für diese n natürlich bei jedem positiven ε auch $a_n \in U_\varepsilon(0)$ folgt. Für alle geraden n ergibt sich dagegen $a_n = 2$, so daß bei einem $\varepsilon \in (0, 2)$ immer $a_n \notin U_\varepsilon(0)$, $n = 2, 4, 6, \ldots$, folgt.

Es sei erwähnt, daß (10.11) bzw. (10.12) häufig auch so formuliert werden: $a_n \in U_\varepsilon(0)$ bzw. $|a_n| < \varepsilon$ gilt *für alle hinreichend großen n.*

Beispiel 10.7: $\{a_n\}$, $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, ist eine Nullfolge. Tatsächlich, es sei ε eine beliebige positive Zahl. Dann muß für alle hinreichend großen n die Bedingung $|a_n| < \varepsilon$ gelten. Wegen $|a_n| = \dfrac{1}{n}$ ist das äquivalent mit $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ oder $\dfrac{1}{\varepsilon} < n$. Wählt man also für $N(\varepsilon)$ die kleinste ganze Zahl, die noch größer als $\dfrac{1}{\varepsilon}$ ist, so gilt für dieses $N(\varepsilon)$ (10.12) und damit auch (10.11).

Aufgabe 10.8: Man zeige, daß $\{a_n\}$, $a_n = q^n$, für jedes feste $q \in (-1, 1)$ eine Nullfolge ist. *

Ohne auf Einzelheiten einzugehen, erwähnen wir noch, daß auch Folgen wie

$$\{a_n\},\ a_n = \frac{1}{n^\alpha}, \qquad \alpha > 0, \tag{10.13}$$

$$\{a_n\},\ a_n = \frac{P(n)}{R(n)}, \tag{10.14}$$