Die Schreibweisen (10.16) bzw. (10.17) werden gelesen als „Limes a_n für n gegen ∞ ist gleich a“ bzw. „a_n konvergiert gegen a für n gegen ∞“. Damit bringt besonders die Schreibweise (10.17) das Wesen der Konvergenz einer Zahlenfolge $\{a_n\}$ gegen einen Grenzwert a zum Ausdruck: Mit wachsendem Index nähern sich die Glieder der Folge immer mehr dem Grenzwert, wird also ihr Abstand von diesem Grenzwert immer kleiner (vgl. auch Satz 10.3). Hierzu muß man natürlich ergänzen, daß diese Annäherung nicht unbedingt monoton erfolgen muß (siehe Beispiel 10.9).

Als ein Spezialfall konvergenter Zahlenfolgen erhält man die Nullfolgen; sie sind dadurch charakterisiert, daß ihr Grenzwert gleich Null ist (diese Begriffsbildung ist mit Definition 10.3 identisch).

Satz 10.3: *Die Folge $\{a_n\}$ konvergiert dann und nur dann gegen a, wenn die Folge der Abstände $\{|a_n - a|\}$ eine Nullfolge ist.* **S.10.3**

Es sei besonders der theoretische Charakter der Definition 10.4 betont. Er besteht darin, daß durch diese Definition zwar der Begriff des Grenzwertes eingeführt, jedoch keinerlei praktische Anleitung zu seiner Ermittlung gegeben wird. Diese Frage muß auf die folgenden Abschnitte (siehe 10.5., 10.6. und 10.8.) vertagt werden. Deshalb kann man mit Hilfe der Definition 10.4 für eine konkrete Zahlenfolge nur entscheiden, ob eine gegebene Zahl ihr Grenzwert ist oder nicht.

Beispiel 10.8: Für die Folge $\{a_n\}$, $a_n = \dfrac{1 + 3n + 5n^2}{4n^2}$, ist von den beiden Zahlen 3 und $\dfrac{5}{4}$ nur letztere Grenzwert dieser Folge. Tatsächlich, für $n = 1, 2, \ldots$ gilt

$$a_n = \frac{1 + 3n}{4n^2} + \frac{5}{4} \leqq \frac{n + 3n}{4n^2} + \frac{5}{4} = \frac{1}{n} + \frac{5}{4} \leqq \frac{9}{4}.$$

Also ist $\{a_n\}$ nach oben beschränkt, wobei $\dfrac{9}{4}$ eine obere Schranke der Folge ist. Dann kann der Abstand $|a_n - 3|$ aber nie kleiner als $\dfrac{3}{4}$ werden, so daß die Forderung (10.15) für kein $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{3}{4}\right)$ erfüllt ist. Somit ist die Zahl 3 nicht Grenzwert der Folge $\{a_n\}$. Dagegen ergibt sich für $\dfrac{5}{4}$ zunächst

$$\left|a_n - \frac{5}{4}\right| = \frac{1 + 3n}{4n^2} \leqq \frac{1}{n}.$$

Aus dieser Abschätzung folgt mit Satz 10.1 (vgl. noch Beispiel 10.7) die Behauptung.

Aufgabe 10.11: Man prüfe, ob eine der Zahlen 2 oder 4 Grenzwert der Folge *

$$\{a_n\},\ a_n = \frac{2 - 4n + 12n^2}{3n^2},$$

ist.

Die Definition 10.4 hat große theoretische Bedeutung. Mit ihrer Hilfe kann man für konvergente Zahlenfolgen eine ganze Reihe von Eigenschaften nachweisen, ohne ihren Grenzwert zu kennen. Ausführlicher folgen derartige Betrachtungen im nächsten Abschnitt. Hier wird das zunächst beim Beweis folgender Aussage demonstriert.

Satz 10.4: *Wenn für eine Zahlenfolge $\{a_n\}$ die Konvergenzbeziehungen* **S.10.4**

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \bar{a} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \tilde{a}$$

gelten, dann folgt $\bar{a} = \tilde{a}$, d. h., der Grenzwert einer konvergenten Zahlenfolge ist eindeutig bestimmt.