Im allgemeinen Falle (10.23) wird ähnlich wie im Beispiel (10.14) vorgegangen: Man klammert die höchste Potenz von n, die in $R(n)$ auftritt, sowohl im Zähler als auch im Nenner aus, kürzt sie heraus und wendet dann zunächst (10.21) und danach (10.18) an.

* *Aufgabe 10.15:* Man ermittle jeweils den Grenzwert von den Zahlenfolgen

$$\{a_n\},\ a_n = \frac{7 + 3n + 4n^2 - 5n^3}{2n + 10n^3}, \qquad \{b_n\},\ b_n = \frac{5n + 4n^2 + 6n^3}{1 - 2n^2 + 3n^4}.$$

Gelingt es also mit den Formeln (10.18) bis (10.21) den Grenzwert einer Folge zu ermitteln, dann ist damit auch automatisch deren Konvergenz nachgewiesen. Besonders bemerkenswert daran ist, daß man die von den Praktikern häufig als „unhandlich" empfundenen Betrachtungen mit ε und $N(\varepsilon)$ zum Nachweis der Konvergenz völlig umgehen kann.

* *Aufgabe 10.16:* $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ seien zwei konvergente Zahlenfolgen, wobei $a_n \neq 0$ und $b_n \neq 0$ für alle $n = 1, 2, \ldots$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 4$. Man ermittle die Grenzwerte der Folgen $\{c_n\}$, $c_n = 2a_n - 3b_n$, $\{d_n\}$, $d_n = \dfrac{4a_n + b_n}{a_n b_n}$.

Abschließend weisen wir noch auf folgende Aussage hin: Wenn $a_n \geqq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, dann folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$. Hier wird nur der Fall $a = 0$ bewiesen, und zwar indirekt. Die Behauptung $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = 0$ ist gleichbedeutend damit, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ derart existiert, daß $\sqrt{a_n} < \varepsilon$ für alle $n \geqq N(\varepsilon)$. Angenommen, diese Aussage gilt nicht. Dann gibt es wenigstens zu einem $\varepsilon_1 > 0$ ein $N_1(\varepsilon_1)$ derart, daß $\sqrt{a_n} \geqq \varepsilon_1$ für alle $n \geqq N_1(\varepsilon_1)$ oder $a_n \geqq \varepsilon_1^2 > 0$ für alle $n \geqq N_1(\varepsilon_1)$. Letzteres steht aber im Widerspruch zu der Voraussetzung, daß $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ gelten soll. Mit diesem Widerspruch ist unsere Aussage für den Fall $a = 0$ bewiesen. Weitere Aussagen ähnlicher Art werden noch im Zusammenhang mit der Stetigkeit von Funktionen gezeigt (vgl. Band 2).

10.6. Konvergenzkriterien

In diesem Abschnitt werden Kriterien entwickelt, die es gestatten, darüber zu entscheiden, ob eine gegebene Folge konvergent ist oder nicht. Solche Kriterien sind sowohl von praktischer als auch von theoretischer Bedeutung. Für die Praxis – insbesondere beim Einsatz von Rechenautomaten – ist es natürlich sinnvoll, von einer Zahlenfolge, deren Grenzwert ermittelt werden soll, erst einmal zu zeigen, daß sie einen solchen besitzt. In vielen theoretischen Untersuchungen kommt es weniger darauf an, den Grenzwert zu berechnen. Vielmehr muß einfach der Nachweis geführt werden, daß eine Folge konvergent ist. Für einen solchen Nachweis steht uns bisher nur die Definition 10.4 zur Verfügung; um sie anwenden zu können, muß der Grenzwert jedoch bereits bekannt sein. So ergibt sich auch aus theoretischer Sicht die Notwendigkeit, solche Kriterien zu entwickeln, mit denen man über die Konvergenz einer Zahlenfolge entscheiden kann, ohne deren Grenzwert zu kennen. Schließlich können Konvergenzkriterien in einigen Fällen auch die Berechnung von Grenzwerten ermöglichen bzw. erleichtern (siehe Beispiel 10.16, 10.17 sowie Aufgabe 10.20).

Vor uns steht also die Aufgabe, die in Definition 10.4 enthaltene Kopplung von Grenzwert und Konvergenz aufzulösen und Aussagen über die Konvergenz unab-