hängig von der Kenntnis des Grenzwertes zu machen. Hierzu liegt es nahe, sich zunächst noch einmal den einfachsten Eigenschaften von Zahlenfolgen zuzuwenden. Wir haben gesehen, daß im allgemeinen weder die Monotonie allein oder die Beschränktheit allein die Konvergenz einer Zahlenfolge garantieren. Es gilt jedoch

Satz 10.10: *Wenn eine Folge monoton wachsend und nach oben beschränkt bzw. monoton fallend und nach unten beschränkt ist, dann ist sie konvergent.* **S.10.10**

Mit diesem Satz ist ein erstes Kriterium gegeben, das es gestattet, die Konvergenz einer Zahlenfolge nachzuweisen, ohne deren Grenzwert zu kennen oder zu berechnen. Hierzu muß gezeigt werden, daß die Folge sowohl monoton als auch beschränkt ist. Es sei bemerkt, daß es dabei genügt, von der Folge eine abgeschwächte Monotonie in folgendem Sinne nachzuweisen: $\{a_n\}$ heißt *im weiteren Sinne monoton wachsend*, wenn es eine natürliche Zahl n_0 derart gibt, daß $a_n \leqq a_{n+1}$ für alle $n \geqq n_0$ gilt. Analog wird das monotone Fallen im weiteren Sinne definiert.

Beispiel 10.15: Mit Hilfe von Satz 10.10 zeigen wir, daß die Folge $\{a_n\}, a_n = \sqrt{d + \sqrt{d + \sqrt{d + \ldots + \sqrt{d}}}}$, $d > 0$, konvergent ist; zu a_n sei bemerkt, daß der Summand d und mit ihm die Wurzel genau n-mal auftritt (vgl. [10]). Es ist also $a_1 = \sqrt{d}$, $a_2 = \sqrt{d + \sqrt{d}}$, $a_3 = \sqrt{d + \sqrt{d + \sqrt{d}}}, \ldots$. Zur Anwendung von Satz 10.10 zeigen wir zunächst, daß $\{a_n\}$ monoton wachsend ist. Das ergibt sich einfach durch

$$a_{n+1} = \underset{1}{\sqrt{\vphantom{d}}}\,d + \underset{2}{\sqrt{\vphantom{d}}}\,d + \underset{3}{\sqrt{\vphantom{d}}}\,d + \ldots + \underset{n}{\sqrt{\vphantom{d}}}\,d + \underset{n+1}{\sqrt{d}} > \underset{1}{\sqrt{\vphantom{d}}}\,d + \underset{2}{\sqrt{\vphantom{d}}}\,d + \underset{3}{\sqrt{\vphantom{d}}}\,d + \ldots + \underset{n}{\sqrt{d}} = a_n,$$

wobei zur besseren Übersichtlichkeit die Wurzeln numeriert worden sind und die triviale Ungleichung $\sqrt{d + \sqrt{d}} > \sqrt{d}$ benutzt worden ist (man beachte die Monotonie der Wurzelfunktion, Abschnitt 9.4.). Es genügt nun zu zeigen, daß $\{a_n\}$ nach oben beschränkt ist. Hierzu bemerken wir, daß $a_n < \sqrt{d} + 1$ für alle $n = 1, 2, \ldots$ gilt (siehe Aufgabe 10.17). Damit erfüllt die Folge $\{a_n\}$ die Bedingungen von Satz 10.10 und ist somit konvergent.

Aufgabe 10.17: Man zeige, daß für das allgemeine Glied a_n der Folge von Beispiel 10.15 die Ungleichung $a_n < \sqrt{d} + 1$, $n = 1, 2, \ldots$, gilt. *

Aufgabe 10.18: Man zeige, daß die Zahlenfolge $\{a_n\}$, $a_n = \frac{q^n}{n!}$, für festes $q > 1$ konvergent ist. *

Aufgabe 10.19: Man zeige mit Hilfe von Satz 10.10, daß die Folge $\{a_n\}$, $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$, für $\alpha > 0$ konvergent ist. *

Nun wird gezeigt, daß die Kenntnis der Konvergenz einer Folge es unter Umständen auch gestattet, ihren Grenzwert einfach zu ermitteln.

Beispiel 10.16: Wir betrachten die Folge von Beispiel 10.15 und nutzen ihre Konvergenz zur Berechnung des Grenzwertes. Hierzu versuchen wir zwischen a_{n+1} und a_n eine Beziehung aufzustellen. Man sieht leicht, daß im gegebenen Falle

$$a_{n+1} = \sqrt{d + a_n} \quad \text{oder} \quad a_{n+1}^2 = d + a_n$$

gilt. Bezeichnet man den existierenden aber zunächst noch unbekannten Grenzwert mit a und geht nun in der letzten Gleichung zum Grenzwert über, so erhält man