In dieser Form ist sofort ersichtlich (vgl. Bild 10.1), daß der Abstand zwischen zwei beliebigen Gliedern a_i und a_j mit $i, j, \geqq N(\varepsilon)$ bei einer konvergenten Zahlenfolge nie größer als die Länge 2ε des Intervalls $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ werden kann. Mit anderen Worten: für hinreichend große i und j muß der Abstand $|a_i - a_j|$ für die Glieder einer konvergenten Folge beliebig klein werden. Es konnte auch die Umkehrung dieser Aussage bewiesen werden. So ergab sich

Satz 10.12 *(Cauchysches Konvergenzkriterium): Eine Zahlenfolge $\{a_n\}$ ist dann und nur dann konvergent, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N(\varepsilon)$ derart gibt, daß* **S.10.12**

$$|a_i - a_j| < \varepsilon \quad \textit{für alle} \quad i, j \geqq N(\varepsilon) \tag{10.24}$$

gilt.

Der Beweis kann z. B. in [10] nachgelesen werden.

Das Cauchysche Konvergenzkriterium hat sich bei zahlreichen theoretischen Untersuchungen bewährt. Genannt seien hier der Konvergenznachweis für die Näherungsfolgen bei iterativer Lösung von Gleichungen und insbesondere das Fixpunktprinzip (vgl. [8], [9] und Bd. 22).

10.7. Einige spezielle Zahlenfolgen

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir uns mit konvergenten Zahlenfolgen beschäftigt und dabei für gewisse Klassen solcher Folgen Methoden zur Berechnung ihres Grenzwertes kennengelernt. Mit diesen Klassen waren aber durchaus nicht alle konvergenten Folgen erfaßt. Im folgenden werden einige spezielle Zahlenfolgen untersucht. Die Konvergenzaussagen für sie erweisen sich wiederum als gutes Hilfsmittel bei der Ermittlung des Grenzwertes einer Reihe anderer Folgen.

Zunächst beginnen wir mit einer bestimmt divergenten Folge. Als solche erweist sich nämlich

$$\{a_n\}, \quad a_n = \frac{a^n}{n^k}, \qquad a > 1, \qquad k > 0. \tag{10.25}$$

Zum Beweis dieser Behauptung benötigen wir eine Hilfsungleichung, die uns auch in einem anderen Zusammenhang noch nützlich sein wird. Wegen $a > 1$ gibt es ein $d > 0$ derart, daß $a = 1 + d$ ist. Daher ergibt sich nach der binomischen Formel

$$a^n = (1 + d)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} d^i > \binom{n}{2} d^2 = \frac{n(n-1)}{2} d^2 \geqq \frac{n^2}{4} d^2,$$

wobei die letzte Ungleichung für alle $n \geqq 2$ gilt. Setzt man hier für d seinen Wert $a - 1$ ein, so erhält man die gewünschte Hilfsungleichung

$$a^n > \frac{(a-1)^2}{4} n^2, \tag{10.26}$$

woraus speziell für $0 < k \leqq 1$

$$\frac{a^n}{n^k} \geqq \frac{a^n}{n} > \frac{(a-1)^2}{4} n \tag{10.27}$$

folgt. Aus (10.27) ergibt sich für $0 < k \leqq 1$ sofort

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n} = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n^k} = +\infty. \tag{10.28}$$