ergibt. Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt aus ihr (vgl. Aufgabe 10.12) die Behauptung (10.30).

Im Zusammenhang mit (10.29) sei noch folgende allgemeingültige Konvergenzaussage erwähnt.

Satz 10.13: *Wenn eine Folge $\{a_n\}$ gegen den Grenzwert a konvergiert, dann konvergiert auch die Folge $\{b_n\}$ mit* **S.10.13**

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

gegen a.

Beispiel 10.19: Die Limesrelation

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt[2]{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots + \sqrt[n]{n}}{n} = 1$$

ist eine unmittelbare Folgerung des Satzes 10.13 sowie des Ergebnisses (10.29).

Als dritte und letzte spezielle Zahlenfolge erwähnen wir

$$\{a_n\}, \quad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{10.31}$$

Ohne hier auf Einzelheiten einzugehen, bemerken wir, daß diese Folge streng monoton wachsend sowie nach oben beschränkt ist und daher auch konvergiert. Ihr Grenzwert ist die Wachstumskonstante e

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}, \quad \text{wobei} \quad \mathrm{e} = 2{,}718\,281\,828\,4\ldots \tag{10.32}$$

Beispiel 10.20: Wir benutzen das Resultat (10.32), um zu zeigen, daß

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \sqrt{\mathrm{e}} \tag{10.33}$$

ist. Dazu nehmen wir die einfache Umformung

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \sqrt{\tilde{a}_n} \quad \text{mit} \quad \tilde{a}_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}$$

vor. Dabei ist $\{\tilde{a}_n\}$ eine Teilfolge von (10.31), und somit gilt $\tilde{a}_n \to \mathrm{e}$, woraus die Behauptung (10.33) folgt (vgl. mit letztem Absatz in Abschnitt 10.5.).

Aufgabe 10.21: Man untersuche, ob die Zahlenfolge $\{a_n\}$, $a_n = \left(\frac{kn+1}{kn}\right)^n$, für eine beliebig fixierte natürliche Zahl $k > 0$ konvergiert. *

10.8. Häufungspunkte und lim sup sowie lim inf

In den Abschnitten 10.3. bis 10.7. wurden – abgesehen von einzelnen Bemerkungen und Beispielen – konvergente Zahlenfolgen untersucht. Dabei haben wir gesehen, daß der Grenzwert einer konvergenten Zahlenfolge eindeutig bestimmt ist. Jetzt betrachten wir beliebige, jedoch beschränkte Folgen. Für sie gilt eine Aussage, auf