deren Tragweite hier nur aufmerksam gemacht werden kann. Die Aussage bringt ein fundamentales Prinzip der gesamten Analysis und Funktionalanalysis zum Ausdruck. Sie hängt eng zusammen mit dem allgemeineren Begriff der kompakten Menge.

S.10.14 **Satz 10.14:** *Aus einer beliebigen beschränkten Folge $\{a_n\}$ kann man immer konvergente Teilfolgen auswählen.*

Zu diesem Satz sei bemerkt, daß sein Inhalt uns für konvergente Folgen bereits bekannt ist. Sie sind nämlich beschränkt (siehe Satz 10.5), und außerdem konvergiert auch jede ihrer Teilfolgen, und zwar gegen den Grenzwert der Folge. Das wesentliche Neue an dem Satz 10.14 besteht darin, daß von der Folge $\{a_n\}$ nur die Beschränktheit gefordert wird und also auch divergente, jedoch beschränkte Folgen wie z. B. $\{a_n\}$, $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$, zugelassen sind. Dabei werden die Teilfolgen solcher Folgen i. allg. nicht mehr gegen ein und denselben Grenzwert konvergieren. In diesem Zusammenhang ergibt sich die Frage, ob ein kleinster und ein größter Grenzwert unter den Grenzwerten aller konvergenten Teilfolgen einer beschränkten Zahlenfolge existiert. Die Antwort hierauf gibt der folgende Satz.

S.10.15 **Satz 10.15:** *Unter den Grenzwerten aller konvergenten Teilfolgen einer beschränkten Folge $\{a_n\}$ gibt es einen kleinsten a_* und einen größten a^*.*

D.10.6 **Definition 10.6:** *Die Zahlen a_* bzw. a^* haben eine spezielle Bezeichnung. Sie werden* **unterer** *bzw.* **oberer Grenzwert** *der beschränkten Folge $\{a_n\}$ genannt und mit*

$$a_* = \liminf a_n \quad \textit{bzw.} \quad a^* = \limsup a_n$$

oder auch

$$a_* = \underline{\lim}\, a_n \quad \textit{bzw.} \quad a^* = \overline{\lim}\, a_n$$

bezeichnet.

Beispiel 10.21: Die Folge $\{a_n\}$, $a_n = (-1)^n\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$, ist offensichtlich beschränkt, denn es gilt z. B. $|a_n| = \left|1 + \frac{1}{n}\right| \leqq 2$. Also existieren für sie die Zahlen a_* und a^*. Man kann zeigen, daß $a_* = -1$ und $a^* = +1$ ist.

Ohne Beweis werden nun einige Eigenschaften des unteren bzw. oberen Grenzwertes einer beschränkten Zahlenfolge formuliert (Einzelheiten siehe [10]).

1. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine natürliche Zahl $N^*(\varepsilon)$ derart, daß

$$a_n < a^* + \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n > N^*(\varepsilon).$$

2. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine natürliche Zahl $N_*(\varepsilon)$ derart, daß

$$a_* - \varepsilon < a_n \quad \text{für alle} \quad n > N_*(\varepsilon).$$

Diese beiden Eigenschaften lassen sich auch so formulieren: Sind a_* bzw. a^* der untere bzw. obere Grenzwert einer beschränkten Zahlenfolge $\{a_n\}$, so liegen bei beliebigem $\varepsilon > 0$ nur endlich viele Glieder der Folge außerhalb des Intervalls $(a_* - \varepsilon, a^* + \varepsilon)$. Für konvergente Zahlenfolgen ist uns eine solche Schlußfolgerung bereits bekannt. In diesem Zusammenhang stellen wir die

* *Aufgabe 10.22:* Man beweise, daß eine beschränkte Zahlenfolge $\{a_n\}$ dann und nur dann konvergent ist, wenn ihr oberer Grenzwert gleich ihrem unteren ist: $a^* = a_*$.