ist. Somit kann für hinreichend großes n näherungsweise $\frac{1}{3} \approx s_n$ gesetzt werden. Da s_n bereits im Dualsystem dargestellt ist, haben wir damit auch eine näherungsweise Darstellung der Zahl $\frac{1}{3}$ im Dualsystem erhalten.

Noch schwieriger wird die Lösung von (10.36), wenn $f(x)$ kein Polynom ersten Grades ist. Auch in diesen Fällen sind Zahlenfolgen ein wesentliches Hilfsmittel zur näherungsweisen Bestimmung der gesuchten Lösung. Dabei werden die Zahlenfolgen auf dem Wege der sogenannten Iteration konstruiert. Das Wesen der Iteration besteht darin, daß die zu lösende Gleichung $f(x) = 0$ durch eine andere der Art $x = h(x)$ ersetzt wird. Dabei muß letztere so beschaffen sein, daß sie die gleichen Lösungen wie $f(x) = 0$ besitzt. (Wie diese Funktion gewonnen wird, ist in Band 18, Numerische Methoden, bzw. in [8] ausführlich behandelt.) Danach wird für die gesuchte Lösung eine Näherungsfolge $\{x_n\}$ konstruiert. Dazu wählt man eine Zahl x_0, von der man annimmt, daß sie möglichst nahe bei der gesuchten Lösung liegt, und berechnet dann $x_1 = h(x_0)$. Danach folgen $x_2 = h(x_1)$, $x_3 = h(x_2), \ldots$ und allgemein

$$x_{n+1} = h(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{10.37}$$

Wenn $h(x)$ bzw. $f(x)$ gewissen Bedingungen genügen, dann konvergiert die so konstruierte Zahlenfolge $\{x_n\}$ gegen eine Nullstelle von $f(x)$. Wir demonstrieren dieses allgemeine Vorgehen an einem Beispiel.

Beispiel 10.23: Es sollen die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^2 - 2 - \ln x$, $x \geqq 1$, ermittelt werden, d. h., es sollen diejenigen Werte $x \geqq 1$ bestimmt werden, für die

$$x^2 - 2 - \ln x = 0 \tag{10.38}$$

gilt (vgl. R. Zurmühl, Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker).

Zunächst überlegen wir uns, ob überhaupt eine Lösung von (10.38) existiert, die nicht kleiner als eins ist. Dazu wird (10.38) umgeformt auf $x^2 - 2 = \ln x$. Stellt man nun die beiden Funktionen $g_1(x) = x^2 - 2$, $g_2(x) = \ln x$, $x \geqq 1$, graphisch dar (siehe Bild 10.3), so überzeugt man sich davon, daß genau eine Lösung von (10.38) existiert, die nicht kleiner als eins ist. Sie liegt in der Nähe des Wertes 1,6.

Im gegebenen Falle kann u. a.

$$h(x) = x - \frac{x^2 - 2 - \ln x}{2x - \frac{1}{x}}, \qquad x \geqq 1,$$

gewählt und Gleichung (10.38) durch $x = h(x)$ ersetzt werden. Es sei erwähnt, daß es sich hierbei um das sogenannte Newtonsche Verfahren handelt (Einzelheiten siehe Abschnitt 7.7. in Band 2 bzw. Band 18). Damit nimmt (10.37) die konkrete Form

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2 - \ln x_n}{2x_n - \frac{1}{x_n}}, \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

an. Wählt man nun für $x_0 = 1{,}6$ (vgl. Bild 10.3), so konvergiert die auf diese Weise konstruierte Folge $\{x_n\}$ gegen die gesuchte Lösung von (10.38). Dabei ergibt sich bereits mit $x_2 = 1{,}5646$ ein Wert, von dem man zeigen kann, daß er sich höchstens noch um 0,0006 von der gesuchten Lösung unterscheidet.