9.7: f ist eine Parabel. Sie nimmt ihren kleinsten Funktionswert für $x = x_s$ an (x_s — x-Koordinate des Scheitelpunktes der Parabel). Für x_s ergibt sich aus einer entsprechenden Formel (vgl. [4]): $x_s = 1$. Somit folgt also $f(x) \geqq f(1) = 1 - 2 - 1 = -2$ für alle $x \in (-\infty, +\infty)$. Daher ist $C_1 = -3$ erst recht eine untere Schranke. Weiter sollen die Zahlen a, b so bestimmt werden, daß $x^2 - 2x - 1 \leqq 7$ oder $x^2 - 2x - 8 \leqq 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt. Nun ist aber $h(x) = x^2 - 2x - 8$, $x \in (-\infty, +\infty)$ selbst eine Parabel, die negative Werte nur zwischen ihren Nullstellen annimmt (vorausgesetzt, diese Nullstellen sind reelle Zahlen). Löst man die Gleichung $x^2 - 2x - 8 = 0$, so folgt $h(x) \leqq 0$ für alle $x \in [-2,4]$ oder $f(x) \leqq 7$ für alle $x \in [a, b]$ mit $a = -2$, $b = 4$.

9.8: Es seien $x_1, x_2 \in R^1$, beliebig, mit $x_1 < x_2$. Dann gilt $2x_2 = 2x_1 + a$ mit $a > 0$. Somit folgt $e^{2x_2} = e^{2x_1+a} = e^a \cdot e^{2x_1} > e^{2x_1}$, wobei $e^a > 1$ für $a > 0$ benutzt wurde. Nach Multiplikation mit -1 und anschließender Addition der Zahl 1 ergibt sich die geforderte Ungleichung $1 - e^{2x_2} < 1 - e^{2x_1}$.

9.9: Es sei $x_1 < x_2 \leqq -\frac{a}{2}$. Daraus folgt $x_1 + \frac{a}{2} < x_2 + \frac{a}{2} \leqq 0$. Nach entsprechender Multiplikation erhält man hieraus $\left(x_1 + \frac{a}{2}\right)^2 > \left(x_1 + \frac{a}{2}\right)\left(x_2 + \frac{a}{2}\right) \geqq \left(x_2 + \frac{a}{2}\right)^2$ oder $x_1^2 + ax_1 + \frac{a^2}{4} > x_2^2 + ax_2 + \frac{a^2}{4}$. Addiert man hier auf beiden Seiten $\left(b - \frac{a^2}{4}\right)$, so erhält man die gewünschte Ungleichung $x_1^2 + ax_1 + b > x_2^2 + ax_2 + b$. Analog wird der Satz für $-\frac{a}{2} \leqq x_1 < x_2$ bewiesen.

9.10: Es sei $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ beliebig. Aus den Voraussetzungen über f_1 und f_2 folgt dann $f_1(x_1) < f_1(x_2)$ und $f_2(x_1) < f_2(x_2)$. Addiert man diese beiden Ungleichungen bzw. multipliziert man sie mit $a < 0$, so folgt $f_1(x_1) + f_2(x_1) < f_1(x_2) + f_2(x_2)$ bzw. $af_i(x_1) > af_i(x_2)$, $i = 1, 2$, w. z. b. w.

9.11: Es muß für beliebige $x_1, x_2 \in R^1$ die Ungleichung $-\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 \geqq -\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2$ gezeigt werden. Diese Forderung ist äquivalent mit $\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 \geqq 0$. Die letzte Ungleichung ist aber immer erfüllt, denn man überzeugt sich nach einigen einfachen Umformungen davon, daß ihre linke Seite gleich dem nichtnegativen Ausdruck $\frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2$ ist.

9.12: Das Zählerpolynom besitzt die Nullstellen $x_1 = -3$ und $x_2 = 4$; die Nullstellen des Nennerpolynoms sind $x_3 = -1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 4$. Daher gelten die Zerlegungen $x^2 - x - 12 = (x + 3)(x - 4)$ sowie $x^4 - 3x^3 - 4x^2 = x^2(x + 1)(x - 4)$, und die gebrochen rationale Funktion hat in $x_1 = -3$ eine Nullstelle der Vielfachheit 1, in $x_3 = -1$ einen Pol der Ordnung 1, in $x_4 = 0$ einen Pol der Ordnung 2 und in $x = 4$ eine Lücke; letztere stellt eine hebbare Unstetigkeit dar.

9.13: Aus dem Definitionsbereich der Logarithmusfunktion (vgl. Abschnitt 9.4.) folgt die Bedingung $1 - x^2 > 0$. Das ist gleichbedeutend mit $1 > x^2$ oder $-1 < x < 1$. Somit ergibt sich für das gesuchte Intervall $I = (-1, 1)$.

9.14: Das Anliegen dieser Aufgabe ist eine reine Rechenübung. Empfehlung: Man löse zunächst die eckigen Klammern auf der rechten Seite der behaupteten Formel auf; den dabei erhaltenen Doppelbruch forme man auf einen einfachen Bruch um. Nun löse man die dritte Gleichung des Systems (9.62) nach c_2 auf und forme den so für c_2 erhaltenen Ausdruck auf den bereits erwähnten Bruch um.

9.15: Mit dem zusätzlichen Stützpaar $(2, -43)$ anstelle von $(1, 4)$ ergibt sich in Beispiel 9.11, daß $c_4 = 0$ ist. Somit führt dieses Stützpaar nicht zu einer Erhöhung des Grades des Newtonschen Interpolationspolynoms. Die Ursache hierfür liegt darin, daß $(2, -43)$ schon Element des Polynoms $P_3(x)$ ist, d. h., es gilt bereits $P_3(2) = -43$.

9.16: Verwendet man die gegebenen Stützpaare in der angegebenen Reihenfolge, so lautet das entsprechende Gleichungssystem (9.62) jetzt:

$i = 0$: $115 = c_0$,
$i = 1$: $-2 = c_0 - c_1$,
$i = 2$: $4 = c_0 - 3c_1 - 3(-2)\,c_2$,
$i = 3$: $7 = c_0 - 4c_1 - 4(-3)\,c_2 - 4\,(-3)\,(-1)\,c_3$,
$i = 4$: $73 = c_0 - 6c_1 - 6(-5)\,c_2 - 6\,(-5)\,(-3)\,c_3 - 6\,(-5)\,(-3)\,(-2)\,c_4$.