10.13: Nach Definition 10.4 muß (10.15) gezeigt werden. Dazu betrachten wir

$$\left| s_n - \frac{q}{1-q} \right| = \left| \frac{s_n - s_n q - q}{1-q} \right| = \left| \frac{q - q^{n+1} - q}{1-q} \right| = \frac{1}{1-q} q^{n+1}.$$

Wegen $0 \leqq q < 1$ steht aber auf der rechten Seite eine Nullfolge, und somit existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N(\varepsilon)$ derart, daß (10.15) erfüllt ist.

10.14:
$$a_n = 4 + \frac{1}{n} > 4 + \frac{1}{n+1} = \frac{4(n+1)+1}{n+1} = a_{n+1},$$

$$b_n = 4 - \frac{1}{n} < 4 - \frac{1}{n+1} = \frac{4(n+1)-1}{n+1} = b_{n+1}.$$

Es sei k eine beliebige natürliche Zahl. Dann betrachten wir die drei aufeinanderfolgenden Glieder $c_{2k}, c_{2k+1}, c_{2k+2}$. Wegen $c_{2k} = 4 + \frac{1}{2k}$, $c_{2k+1} = 4 - \frac{1}{2k+1}$, $c_{2k+2} = 4 + \frac{1}{2k+2}$ folgt $c_{2k} > c_{2k+1}$ und $c_{2k+1} < c_{2k+2}$, so daß $\{c_n\}$ weder monoton fallend noch monoton wachsend ist.

10.15: Unter Anwendung der Rechengesetze für konvergente Zahlenfolgen erhalten wir nach entsprechenden Umformungen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{7}{n^3} + \frac{3}{n^2} + \frac{4}{n} - 5}{\frac{2}{n^2} + 10} = -\frac{1}{2}, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5}{n^3} + \frac{4}{n^2} + \frac{6}{n}}{\frac{1}{n^4} - \frac{2}{n^2} + 3} = 0.$$

10.16: Unter Anwendung entsprechender Rechengesetze für konvergente Zahlenfolgen erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 2 \lim_{n\to\infty} a_n - 3 \lim_{n\to\infty} b_n = 6 - 12 = -6, \qquad \lim_{n\to\infty} d_n = \frac{4 \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{12+4}{3 \cdot 4} = \frac{4}{3}.$$

10.17: Der Beweis wird durch vollständige Induktion geführt. Wegen $a_1 = \sqrt{d} < \sqrt{d} + 1$ ist die Behauptung für $n = 1$ richtig. Angenommen, sie sei für eine gewisse natürliche Zahl n richtig, d. h. es möge gelten $a_n < \sqrt{d} + 1$. Dann folgt wegen $a_{n+1} = \sqrt{d + a_n}$ auch $a_{n+1} < \sqrt{d + \sqrt{d} + 1} < \sqrt{d + 2\sqrt{d} + 1} = \sqrt{d} + 1$. Damit ist die Behauptung für alle $n = 1, 2, \ldots$ bewiesen.

10.18: Wegen der Gleichung

$$a_{n+1} = a_n \frac{q}{n+1} \tag{L.10.1}$$

folgt für alle $n + 1 > q$ die Ungleichung $a_{n+1} < a_n$. Daher ist $\{a_n\}$ streng monoton fallend im weiteren Sinne. Außerdem gilt offensichtlich $a_n > 0$, so daß $\{a_n\}$ nach Satz 10.10 konvergent ist.

10.19: Für $\alpha > 0$ folgt $n^\alpha < (n+1)^\alpha$, so daß $\{a_n\}$ streng monoton fällt. Außerdem gilt offensichtlich $a_n > 0$ für alle $n = 1, 2, \ldots$ Dann folgt aber wegen Satz 10.10, daß $\{a_n\}$ konvergent ist.

10.20: Nach der Lösung von Aufgabe 10.18 existiert der Grenzwert. Bezeichnet man ihn mit a und geht in (L.10.1) zum Grenzwert für $n \to \infty$ über, so erhält man $a = a \cdot 0$, woraus $a = 0$ folgt.

10.21: In Anlehnung an das Beispiel 10.20 wird auch hier das Resultat (10.32) verwendet. Dazu wird die Umformung $a_n = \left(\frac{kn+1}{kn}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{kn}\right)^n = \sqrt[k]{\hat{a}_n}$ mit $\hat{a}_n = \left(1 + \frac{1}{kn}\right)^{kn}$ vorgenommen. Weiter folgt wie in Beispiel (10.20): $a_n \to \sqrt[k]{e}$.

10.22: Die Zahlenfolge $\{a_n\}$ konvergiere gegen den Grenzwert a. Dann konvergiert bekanntlich auch jede ihrer Teilfolgen gegen a, und daher folgt $a_* = a^* = a$, womit die Behauptung in einer Richtung bewiesen ist. Es sei nun $a_* = a^*$. Wir bezeichnen diesen gemeinsamen Wert mit a. Weiter sei $N(\varepsilon)$ für beliebiges $\varepsilon > 0$ die größere der beiden Zahlen $N_*(\varepsilon)$ und $N^*(\varepsilon)$ aus den beiden Eigen-