bei der Behandlung derartiger Größen den Namen „imaginäre" Zahlen, was soviel wie „eingebildete" oder „unwirkliche" Zahlen – im Gegensatz zu den „wirklichen" reellen Zahlen – bedeutet. Diese Bezeichnung hat sich bis heute erhalten. Das Symbol i, dessen Quadrat $= -1$ ist, hat Euler 1777 eingeführt. Eine strengere Theorie zur Begründung der komplexen Zahlen geht auf Gauß zurück, der auch ihre Veranschaulichung in der Ebene vornahm. Die komplexen Zahlen haben seitdem die gleiche Bedeutung erlangt wie die reellen; sie treten bei zahlreichen Anwendungen in Physik und Technik auf.

Die komplexen Zahlen können axiomatisch als Zahlenpaare (a, b) eingeführt werden, wobei a und b reelle Zahlen sind. Für diese Paare werden dann die Gleichheit und die vier Grundrechenarten definiert. Auf die Gesetze der Ordnung und Monotonie wird verzichtet. Die reellen Zahlen sind als Paare der Form $(a, 0)$ im Bereich der komplexen Zahlen enthalten. Wir werden die komplexen Zahlen in einer anderen Weise gewinnen. Zur besseren Unterscheidung werden wir für die Bezeichnung der Zahlen auch indizierte Buchstaben verwenden: $a_1, a_2, a_3, \ldots$ oder $b_1, b_2, b_3, \ldots$

5.3.1. Rein imaginäre Zahlen

Zunächst werden die *rein imaginären* Zahlen eingeführt. Dazu wird festgelegt, daß die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ von der imaginären Einheit i[1]) gelöst wird. Es gilt also

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

Definition 5.3: *Das Produkt b*i *mit reellem $b \neq 0$ heißt* **rein imaginäre** Zahl. **D.5.3**

Für die rein imaginären Zahlen können ohne weiteres die Grundgesetze der Gleichheit, Ordnung, Addition und Subtraktion von den reellen Zahlen übernommen werden. Es ist also insbesondere

$$b_1\mathrm{i} + b_2\mathrm{i} = (b_1 + b_2)\,\mathrm{i}, \quad b_1\mathrm{i} - b_2\mathrm{i} = (b_1 - b_2)\,\mathrm{i}$$

und

$$b_1\mathrm{i} < b_2\mathrm{i} \quad \text{für} \quad b_1 < b_2.$$

Dabei wird $0\mathrm{i} = 0$ gesetzt.
Mithin lassen sich die rein imaginären Zahlen auch anschaulich auf einer Zahlengeraden, der imaginären Achse, darstellen. Die Einheit ist i.

Überträgt man die Regeln der Multiplikation, so ist bei Beachtung von $\mathrm{i}^2 = -1$:

$$b_1\mathrm{i} \cdot b_2\mathrm{i} = (b_1 \cdot b_2) \cdot \mathrm{i}^2 = -b_1 b_2.$$

Das Produkt zweier rein imaginärer Zahlen ist demnach nicht wieder eine rein imaginäre, sondern eine reelle Zahl!

Für die Potenzen von i gilt:

$$\mathrm{i}^1 = \mathrm{i}, \quad \mathrm{i}^2 = -1, \quad \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}, \quad \mathrm{i}^4 = 1 \qquad \text{oder allgemein}$$
$$\mathrm{i}^{4n+1} = \mathrm{i}, \quad \mathrm{i}^{4n+2} = -1, \quad \mathrm{i}^{4n+3} = -\mathrm{i}, \quad \mathrm{i}^{4n} = 1 \qquad \text{für alle } n \geqq 0, \text{ ganz}.$$

Eine Lösung der Gleichung $\mathrm{i}x = 1$ für rein imaginäres x ist $x = -\mathrm{i}$, deshalb setzen wir $\frac{1}{\mathrm{i}} = \mathrm{i}^{-1} = -\mathrm{i}$.

---

[1]) In der Elektrotechnik wird dafür der Buchstabe j verwendet, da mit i bereits die Stromstärke bezeichnet wird.