

Wir definieren Mengen A_k folgendermaßen

$$A_k = \left\{ \frac{m}{k} \mid m \in \mathbf{G} \wedge k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, k \text{ - fest} \wedge m \text{ und } k \text{ teilerfremd} \right\}.$$

Nun gilt offenbar

$$M = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \mathbf{P},$$

und deshalb gilt nach Satz 7.4 (3): \mathbf{P} ist abzählbar. ■

7.4.3. Nicht abzählbare Mengen

Am Beispiel der rationalen Zahlen haben wir gesehen, daß eine Menge abzählbar sein kann, auch wenn ihre Struktur und Anordnung sich außerordentlich stark von \mathbf{N} unterscheidet. Man könnte daher beinahe denken, daß jede unendliche Menge abzählbar ist. Daß dies ein Trugschluß wäre, drückt Satz 7.5 aus.

Satz 7.5: Die Menge C , $C = \{x \mid x \in \mathbf{R} \wedge 0 < x \leq 1\}$ ist nicht abzählbar.

Bezeichnungsweisen: Eine nicht abzählbare unendliche Menge nennen wir *überabzählbare Menge*. Die Mächtigkeit der Menge C heißt „*Mächtigkeit des Kontinuums*“.

Wir bemerken zum Abschluß, daß der Mächtigkeitstypus des Kontinuums von dem abzählbaren Mengen verschieden ist und daß man mit Hilfe von Satz 7.4 sowie Definition 7.11 zeigen kann, daß z. B. die Mengen

$$D = \{x \mid x \in \mathbf{R} \wedge 0 \leq x \leq 1\},$$

$$E = \{x \mid x \in \mathbf{R} \wedge a \leq x \leq b, a, b \text{ - fest}, a, b \in \mathbf{R}\},$$

$$\mathbf{R}$$

ebenfalls die Mächtigkeit des Kontinuums besitzen. Dabei kommt es zum Beweis nur darauf an, geeignete Zuordnungen, die die Definition 7.11 erfüllen, zu finden. Man nennt alle Mengen, die zu C gleichmächtig sind, *Kontinua*.

7.4.4. Beispiel für die Begriffe Vereinigung, Durchschnitt, Komplement und Mächtigkeit

Eine statistische Erhebung an einer Technischen Hochschule ergab bei 100 Studenten das folgende Ergebnis: 48 Studenten hören weiterführende Vorlesungen über Technologie, 26 über konstruktiven Ingenieurbau, 8 über Technologie und mathematische Operationsforschung, 23 über konstruktiven Ingenieurbau, aber keine Operationsforschung, 18 nur über konstruktiven Ingenieurbau, 8 über Technologie und konstruktiven Ingenieurbau und 24 über keines dieser 3 Gebiete.

Wir stellen folgende Fragen:

1. Wie viele Studenten hören Operationsforschung?
2. Wie viele Studenten hören Operationsforschung und konstruktiven Ingenieurbau, aber nicht Technologie?
3. Wie viele Studenten hören konstruktiven Ingenieurbau und daneben Operationsforschung oder Technologie?