Der obere Grenzwert besitzt neben den bereits genannten auch noch folgende Eigenschaft:

3. Zu jedem $\varepsilon > 0$ und jeder natürlichen Zahl N existiert wenigstens ein Element a_n mit $n > N$ derart, daß

$$a^* - \varepsilon < a_n$$

ist. Eine analoge Eigenschaft gilt für den unteren Grenzwert a_*.

Nun wenden wir uns dem Begriff des Häufungspunktes zu. Er ist in gewisser Weise eine Verallgemeinerung des Grenzwertes. Um diese Verallgemeinerung zu erhalten, gehen wir den in solchen Fällen üblichen Weg. Wir wählen für die Definition des Grenzwertes eine Formulierung, von der man durch Vernachlässigung oder Abschwächung einer Forderung dann zu einer Verallgemeinerung gelangt. Zuvor sei noch erwähnt, daß der Begriff des Häufungspunktes nicht auf Zahlenfolgen beschränkt ist, sondern für beliebige Mengen, für deren Elemente ein Abstand erklärt ist, definiert werden kann.

Es sei $\{a_n\}$ eine konvergente Zahlenfolge mit dem Grenzwert a. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N(\varepsilon)$ derart, daß $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geqq N(\varepsilon)$ ist. Für alle hinreichend großen n gilt also

$$a_n \in U_\varepsilon(a). \tag{10.34}$$

In dieser Formulierung des Grenzwertes nehmen wir nun eine Abschwächung vor, um zum Begriff des Häufungspunktes zu gelangen. Wir fordern nämlich nicht mehr, daß (10.34) für alle hinreichend großen n erfüllt ist, sondern nur noch, daß es wenigstens ein a_n gibt, welches (10.34) erfüllt. Zusätzlich wird allerdings verlangt, daß dieses $a_n \neq a$ ist. Präziser gehen wir wie folgt vor:

Definition 10.7: *Es sei M eine beliebige Punktmenge der reellen Zahlengeraden, d. h. eine beliebige Menge reeller Zahlen. Dann heißt ein Punkt a der Zahlengeraden (eine Zahl a)* **Häufungspunkt** *der Menge M, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Element $a' \in M$ derart gibt, daß $a' \neq a$ und* **D.10.7**

$$a' \in U_\varepsilon(a) \tag{10.35}$$

ist.

Als erstes erwähnen wir folgende Eigenschaft des Häufungspunktes. Besitzt eine Menge M einen Häufungspunkt, so kann dieser zur Menge M gehören, kann aber auch nicht zu ihr gehören.

Beispiel 10.22: Es sei $M = (-1, 1)$. Dann ist jeder Punkt $a \in (-1, 1)$ Häufungspunkt von M, aber auch die nicht zu M gehörenden Randpunkte ± 1 sind Häufungspunkte von M. Tatsächlich, es seien $a \in (-1, 1)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig fixiert. Dann gilt für $r = \frac{1}{2} \min(\varepsilon, a + 1, 1 - a)$ sowohl $U_r(a) \subset U_\varepsilon(a)$ als auch $U_r(a) \subset M$, und daher ist (10.35) für jedes $a' \in U_r(a)$ mit $a' \neq a$ erfüllt.

Aufgabe 10.23: Man zeige, daß der Randpunkt $a = 1$ Häufungspunkt der Menge $M = (-1, 1)$ ist. *

Folgende Eigenschaft des Häufungspunktes erläutert seinen Namen. Ist a Häufungspunkt einer Menge M, so gibt es in jeder ε-Umgebung von a unendlich viele Punkte dieser Menge, die alle von a verschieden sind (vgl. Beispiel 10.22). Anschau-