$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2(2k + 1) = 4k + 2$. Es bleibt zu zeigen, daß $4k + 2 > 2(k + 1) + 1 = 2k + 3$, d. h. $4k + 2 > 2k + 3$, also $2k > 1$ gilt. Diese Ungleichung ist für $k \geqq 3$ selbstverständlich erfüllt und somit der Induktionsschritt nachgewiesen. Mit Hilfe des Induktionsschlusses folgt die Behauptung.

4.6: Für $n = 0$ ist die Gleichung richtig: $\sum_{m=0}^{0} mx^{m-1} = \frac{1 - (0 + 1)\,x^0 + 0 \cdot x^{0+1}}{(1 - x)^2} = 0$ (Induktionsanfang). Die Gleichung gelte nun für beliebiges fest gewähltes $k \geqq 0$ (Induktionsannahme). Zu zeigen ist: $\sum_{m=0}^{k+1} mx^{m-1} = \frac{1 - (k + 2)\,x^{k+1} + (k + 1)\,x^{k+2}}{(1 - x)^2}$. Es gilt: $\sum_{m=0}^{k+1} mx^{m-1} = \sum_{m=0}^{k} mx^{m-1} + (k + 1)\,x^k$

$$= \frac{1 - (k + 1)\,x^k + kx^{k+1}}{(1 - x)^2} + (k + 1)\,x^k = \frac{1 - (k + 1)\,x^k + kx^{k+1} + (k + 1)\,x^k(1 - x)^2}{(1 - x)^2}$$

$$= \frac{1 - (k + 2)\,x^{k+1} + (k + 1)\,x^{k+2}}{(1 - x)^2}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

5.1: 1. $x = -(a + b)$ löst nach IV. (S. 39) die Gleichung $(a + b) + x = 0$. Ferner ist mit $b + y = -a$ nach IV. $y = -a - b$ und nach III. $3a + (b + y) = (a + b) + y = a + (-a) = 0$. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung muß $y = x$ sein. 2. Aus der 2. abgeleiteten Regel der Beispiele 5.3 folgt: $(-a) + (-b) = -a - b$. Die Regel folgt aus I.2. und I.3. (S. 37).

5.2: $\sqrt{2^\pi} = \sqrt{2}^{\pi} > \sqrt{2}^{3,14} > 1{,}41^{3,14}$; $\quad \sqrt{2}^{\pi} < \sqrt{2}^{3,15} < 1{,}42^{3,15}$;

$\sqrt{2}^{-\frac{1}{\sqrt{\pi}}} > \sqrt{2}^{-\frac{1}{\sqrt{3,14}}} > 1{,}42^{-\frac{1}{\sqrt{3,14}}}$.

5.3: a) $27 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 1^0 = \text{LLOLL}$; $53.625 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = \text{LLOLOL.LOL}$
b) $\text{LLOLO.OLO} = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} = 26.25$; $\text{LOLLOLLLOLL.LLLLLL} = 1467.984375$.

5.4: $(a^2 + c^2)(b^2 + d^2) - (ab + cd)^2 = a^2d^2 - 2adbc + b^2c^2 = (ad - bc)^2 \geqq 0$.

5.5: Wir beweisen jede Ungleichung für sich. Nach Voraussetzung ist:

$a(a - b) \leqq 0$	$0 \leqq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$	$0 \leqq (a - b)^2$	$a \leqq b$
$a^2 + ab \leqq 2ab$	$2\sqrt{ab} \leqq a + b$	$ab \leqq \frac{1}{4}(a^2 + 2ab + b^2)$	$a + b \leqq 2b$
$a \leqq \frac{2ab}{a + b} = H$	$H = \frac{2ab}{a + b} \leqq \sqrt{ab} = G$	$G = \sqrt{ab} \leqq \frac{1}{2}(a + b) = A$	$A \leqq b$.

5.6: I. Induktionsanfang für $n = 1$: $1 + a < \frac{1}{1 - a} \,\Big|\, (1 - a) > 0$, $0 < a^2$ richtig, da $a \neq 0$. II. Mit der Induktionsannahme ist für $n = k$: $(1 + a)^k < \frac{1}{1 - ka}$. III. Beide Seiten mit $1 + a > 0$ multiplizieren: $(1 + a)^{k+1} < \frac{1}{1 - ka}(1 + a) < \frac{1}{1 - ka} \cdot \frac{1}{1 - a} < \frac{1}{1 - (k + 1)\,a}$. IV. Die Ungleichung gilt für $n = k + 1$ und somit für alle natürlichen $n \geqq 1$.

5.7: a) Fallunterscheidung: 1. Für $x - 3 > 0$ folgt $4 < x$, 2. $x - 3 < 0 \rightarrow x < 3$, insgesamt $x < 3$ und $x > 4$. b) $z = \frac{x - 4}{2x^2 - 7x + 5} = \frac{x - 4}{2(x - 1)\left(x - \frac{5}{2}\right)} = \frac{x - x_3}{2(x - x_1)(x - x_2)}$ (Bild L.5.1).

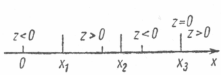

Bild L.5.1