10.3: Mit der Bezeichnung $p = r - n$ erhält man durch wiederholte Anwendung von (10.4):
$a_n \leqq a_{n+1} \leqq a_{n+2} \leqq \ldots \leqq a_{n+p-1} \leqq a_{n+p} = a_r$.

10.4: Die Folge ist für fixiertes $q \in (0, 1)$ streng monoton wachsend und für fixiertes $q \in (1, +\infty)$ streng monoton fallend (analog zu den Betrachtungen von Beispiel 10.3).

10.5: Die ersten 5 Glieder dieser Folge sind $a_1 = 11$, $a_2 = \frac{7}{4}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_4 = -\frac{1}{16}$, $a_5 = -\frac{1}{5}$. Würde man aus dem Verhalten dieser Glieder schließen, daß die ganze Folge monoton fallend ist, so wäre das falsch. Denn man überzeugt sich leicht, daß z. B. $a_{10} = -\frac{1}{4}$, $a_{11} = -\frac{29}{121}$ und somit $a_{10} < a_{11}$ ist. Daher ist die Folge weder monoton wachsend noch monoton fallend. Man kann aber zeigen, daß für ihre Glieder gilt $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \geqq 8$.

10.6: Zur Lösung der Aufgabe nehmen wir an, daß die Folge monoton wachsend ist und versuchen daraus eine Bedingung für c abzuleiten. Aus $a_n \leqq a_{n+1}$ würde

$$cn + \frac{7}{3}(-1)^n \leqq cn + c + \frac{7}{3}(-1)^{n+1} \quad \text{oder} \quad \frac{7}{3}(-1)^n \cdot 2 \leqq c$$

folgen. Setzt man nun $c = \frac{14}{3}$, so ist die Folge $\{a_n\}$, $a_n = \frac{14}{3}n + \frac{7}{3}(-1)^n$, zwar monoton wachsend, jedoch nicht streng monoton wachsend. Dagegen ist die Folge für jeden fixierten Wert $c > \frac{14}{3}$ streng monoton wachsend.

10.7: Es sei A die Schranke von $\{a_n\}$ und B die Schranke von $\{b_n\}$. Dann folgt aus $|c_n| = |a_n b_n| = |a_n|\,|b_n| \leqq AB$ bzw. $|d_n| = |a_n + b_n| \leqq |a_n| + |b_n| \leqq A + B$, daß auch die Folgen $\{c_n\}$ bzw. $\{d_n\}$ beschränkt sind.

10.8: Gemäß Definition 10.3 ist zu prüfen, ob zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ derart existiert, daß (10.11) gilt. Angenommen, es wäre $-\varepsilon < q^n < \varepsilon$. Daraus folgt $\varepsilon > |q^n| = |q|^n$ oder $\ln \varepsilon > n \ln |q|$. Wegen $|q| < 1$ ist aber $\ln |q| < 0$, so daß schließlich die Bedingung $n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}$ folgt. Da alle durchgeführten Umformungen umkehrbar sind, ist die Bedingung (10.11) für jedes $\varepsilon > 0$ erfüllt, wenn $N(\varepsilon)$ gleich der größten ganzen Zahl gewählt wird, die kleiner oder gleich $\ln \varepsilon\, (\ln |q|)^{-1}$ ist.

10.9: Betrachtet man den Quotienten $c_n = \frac{b_n}{a_n} = \frac{q_2^n}{q_1^n} = q^n$ mit $q = \frac{q_2}{q_1} \in (0, 1)$, so folgt, daß $\{c_n\}$ ebenfalls eine Nullfolge ist (vgl. Lösung von Aufgabe 10.8), und daher ist $\{b_n\}$ im Vergleich zu $\{a_n\}$ eine Nullfolge höherer Ordnung.

10.10: Wendet man die zu (10.11) äquivalente Bedingung (10.12) an, so folgt aus den Voraussetzungen des Satzes, daß $|b_n| < \varepsilon$ für alle $n \geqq N_1(\varepsilon)$ gilt, wobei $N_1(\varepsilon) = \max(N_1, N(\varepsilon))$ gesetzt wurde.

10.11: Wegen $a_n - 2 = \frac{2 - 4n + 12n^2}{3n^2} - 2 = \frac{2 - 4n}{3n^2} + 2 > -\frac{4}{3n} + 2 > \frac{1}{2}$ kann die Bedingung (10.15) für kein $\varepsilon < \frac{1}{2}$ erfüllt werden, so daß 2 nicht Grenzwert der gegebenen Folge ist. Dagegen ergibt die Betrachtung von $|a_n - 4|$: $|a_n - 4| = \left|\frac{2 - 4n}{3n^2}\right| = \frac{4n - 2}{3n^2} < \frac{4}{3n}$. Weiter schlußfolgert man analog Beispiel 10.8 und findet so, daß 4 Grenzwert der Folge ist.

10.12: Es gibt nur eine einzige nichtnegative Zahl, die kleiner als alle positiven Zahlen ist, und das ist die Null. Es ist unmittelbar klar, daß Null kleiner als jede positive Zahl ist. Angenommen, sie ist nicht die einzige nichtnegative Zahl mit dieser Eigenschaft. Dann gäbe es eine Zahl $r_0 > 0$, die kleiner als jede positive Zahl ist. Dann müßte jedoch auch $\frac{r_0}{2} > r_0$ sein, woraus aber $r_0 < 0$ folgen würde. Dieser Widerspruch beweist, daß unsere Annahme falsch war.