Beispiele 6.4:

1. Wie groß ist die Anzahl aller verschiedenen Reihenfolgen von 2 grünen, 3 roten und 5 schwarzen Kugeln?

$$P_{w_{10}}^{(2,3,5)} = \frac{10!}{2!\,3!\,5!} = 2520.$$

2. Stehen in einer Warteschlange von 6 Personen 2 Männer und 4 Frauen, so lassen sich diese in

$$P_{w_6}^{(2,4)} = \frac{6!}{2!\,4!} = 15$$

verschiedene Reihenfolgen bringen, wenn bei dem einzelnen Standort nur zwischen Mann und Frau unterschieden wird.

6.3. Variationen

Jede Auswahl oder Zusammenstellung von k aus n verschiedenen Elementen, die ihre Anordnung berücksichtigt, heißt eine Variation von n Elementen zu je k (oder zur *k-ten Ordnung* bzw. zur *k-ten Klasse*).

Bei der Bildung von Wörtern aus drei Buchstaben wird die Anordnung berücksichtigt. Die unterschiedliche Bedeutung der Wörter „rot", „ort" und „tor" gehen von der Berücksichtigung der Anordnung der drei Buchstaben o, r, t aus.

6.3.1. Variationen ohne Wiederholung

Treten in den Zusammenstellungen nur verschiedene Elemente auf, so spricht man von Variationen ohne Wiederholung von n Elementen zu je k. Naturgemäß ist $1 \leqq k \leqq n$.

S.6.5 **Satz 6.5:** *Die Anzahl V_n^k der Variationen ohne Wiederholung von n Elementen zu je k ist*

$$V_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1), \quad 1 \leqq k \leqq n. \tag{6.12}$$

Diese Anzahl V_n^k ergibt sich aus dem Produkt von n und den $(k-1)$ nächst kleineren Zahlen.

Beweis: Die n Elemente seien durch $a_1, a_2, \dots, a_n$ beschrieben. Wir werden den Satz durch vollständige Induktion nach der Ordnung k beweisen.

I. Induktionsbeginn: Für $k = 1$ gilt $V_n^1 = n$, denn es lassen sich die Zusammenstellungen zu je einem Element durch genau die Elemente selbst realisieren. Wir wollen uns noch für $k = 2$ eine Übersicht über die möglichen Variationen ohne Wiederholung verschaffen:

$$\begin{array}{llll} a_1a_2 & a_1a_3 & \dots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2a_3 & \dots & a_2a_n \\ a_3a_1 & a_3a_2 & \dots & a_3a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_na_1 & a_na_2 & \dots & a_na_{n-1} \end{array}$$

Die Variationen sind in n waagerechten und $(n-1)$ senkrechten Reihen angeordnet, insgesamt ergibt sich also

$$V_n^2 = n \cdot (n-1).$$