Sowohl in (9.1) als auch (9.2) fehlt jeglicher Hinweis auf den Wertebereich W_f der Funktion f. Das ist berechtigt, denn eine Funktion ist – im Gegensatz zur Abbildung – allein durch ihren Definitionsbereich und ihre Zuordnungsvorschrift eindeutig bestimmt. Es gilt nämlich

S.9.1 Satz 9.1: *Zwei Funktionen*

$$f_i: \quad y = f_i(x), \quad x \in D_{f_i}, \quad i = 1, 2,$$

sind genau dann gleich, wenn ihre Definitionsbereiche gleich sind und sie für jedes Argument x aus dem Definitionsbereich gleiche Funktionswerte besitzen, d. h., es gilt

$$f_1 = f_2 \tag{9.3}$$

genau dann, wenn sowohl $D_{f_1} = D_{f_2}$ als auch $f_1(x) = f_2(x)$ für alle $x \in D_{f_1}$ gilt.

Mit diesem Satz wird noch einmal betont, daß in (9.1) bzw. (9.2) genau die Angaben enthalten sind, durch die eine Funktion eindeutig bestimmt ist. Wird etwa der Definitionsbereich nicht angegeben – wie das leider manchmal noch anzutreffen ist –, dann ist auch keine Funktion mehr gegeben. Und umgekehrt kann man durch Angabe verschiedener Definitionsbereiche zur gleichen Zuordnungsvorschrift auch unterschiedliche Funktionen angeben.

Beispiel 9.1: Von den drei Funktionen

$$f_1: \quad y = \sqrt{(x-5)(x+3)}, \qquad x \in D_{f_1} = (-\infty, -3] \cup [5, +\infty) \tag{9.4}$$

$$f_2: \quad y = \sqrt{(x-5)(x+3)}, \qquad x \in D_{f_2} = [5, +\infty) \tag{9.5}$$

$$f_3: \quad y = \sqrt{(x-5)}\sqrt{(x+3)}, \quad x \in D_{f_3} = [5, +\infty) \tag{9.6}$$

sind nur die beiden letzten einander gleich: $f_2 = f_3$. Ihre Zuordnungsvorschriften stellen nämlich in dem gemeinsamen Definitionsbereich $[5, +\infty)$ nur unterschiedliche Schreibweisen dar. Dagegen gilt $f_1 \neq f_2$, denn hier sind zur gleichen Zuordnungsvorschrift verschiedene Definitionsbereiche angegeben worden.

* *Aufgabe 9.1:* Man gebe für a_1 und a_2 solche konkreten Werte an, daß die Funktionen

$$f_1: \quad y = \frac{(x^2 - 2x - 3)(x+2)}{(x+1)(x-3)}, \quad x \in (a_1, +\infty)$$

$$f_2: \quad y = x + 2, \quad x \in (a_2, +\infty)$$

gleich sind.

Das Ergebnis von Satz 9.1 kann auch noch wie folgt formuliert werden: Der Wertebereich einer Funktion ist durch ihren Definitionsbereich und ihre Zuordnungsvorschrift eindeutig festgelegt. Jedoch ist durch Wertebereich und Zuordnungsvorschrift der Definitionsbereich und damit die Funktion im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

* *Aufgabe 9.2:* Man bestimme vier Zahlen, a_1, b_1, a_2, b_2 derart, daß durch

$$y = x^2, \quad x \in [a_1, b_1]$$

$$y = x^2, \quad x \in [a_2, b_2]$$

zwei verschiedene Funktionen f_1 und f_2 gegeben sind, die den gleichen Wertebereich $W_{f_1} = W_{f_2} = [1,9]$ besitzen.