$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ für alle $n \geqq N(\varepsilon)$. Dann gilt aber auch $|a_n| < C_1$ für alle $n \geqq N(\varepsilon)$, wobei $C_1$ die größere der beiden Zahlen $|a - \varepsilon|$ und $|a + \varepsilon|$ ist. Bezeichnet man nun mit $C$ die größte der Zahlen $C_1, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N(\varepsilon)-1}|$, dann folgt die Behauptung $|a_n| < C$ für alle $n = 1, 2, \ldots$

Die Umkehrung von Satz 10.5 gilt nicht, d. h., im allgemeinen ist nicht jede beschränkte Zahlenfolge auch konvergent. Das wird im Beispiel 10.13 bewiesen. Man kann jedoch zeigen, daß aus jeder beschränkten Folge eine konvergente Teilfolge ausgewählt werden kann (vgl. Satz 10.14 in Abschnitt 10.8.).

Bevor wir eine weitere Eigenschaft konvergenter Zahlenfolgen formulieren, möge sich der Leser einmal – ohne zu rechnen, nur seiner Intuition folgend – überlegen, wie sich der Abstand $|a_n - a_{n+1}|$ zweier benachbarter Glieder einer konvergenten Zahlenfolge mit wachsendem $n$ verhält. In der Hoffnung, daß er der richtigen Antwort nahe gekommen ist, formulieren wir nun den

S.10.6 **Satz 10.6:** *Für eine konvergente Zahlenfolge $\{a_n\}$ bilden die Abstände $d_n = |a_n - a_{n+1}|$ zweier beliebiger benachbarter Glieder eine Nullfolge, d. h.* $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$.

Hiernach ist es leicht, das oben erwähnte Beispiel zu geben.

*Beispiel 10.13:* Die Folge $\{a_n\}$, $a_n = \dfrac{n+1}{n}(-1)^n$, ist zwar beschränkt, denn man prüft leicht die Ungleichung $|a_n| < 2$, $n = 1, 2, \ldots$, nach. Dennoch ist sie nicht konvergent; für den Abstand zweier beliebiger benachbarter Glieder ergibt sich nämlich

$$\begin{aligned} |a_n - a_{n+1}| &= \left| \frac{n+1}{n}(-1)^n - \frac{n+1+1}{n+1}(-1)^{n+1} \right| \\ &= \left| (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n} + 1 + \frac{1}{n+1}\right) \right| \geqq 2, \qquad n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Daher ist $\{d_n\}$, $d_n = |a_n - a_{n+1}|$, keine Nullfolge, so daß nach Satz 10.6 die Folge $\{a_n\}$ selbst nicht konvergent sein kann.

Unter den Eigenschaften konvergenter Zahlenfolgen sei noch folgende erwähnt.

S.10.7 **Satz 10.7:** *Jede Teilfolge einer konvergenten Zahlenfolge $\{a_n\}$ ist ebenfalls konvergent und besitzt den gleichen Grenzwert wie die ursprüngliche Folge $\{a_n\}$.*

Wenden wir uns nun dem Rechnen mit konvergenten Zahlenfolgen zu und erklären zunächst, daß wir ganz allgemein unter der Summe zweier Zahlenfolgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ die neue Zahlenfolge $\{a_n + b_n\}$ verstehen. Wir führen also die Addition zweier Zahlenfolgen auf die Addition ihrer Glieder mit gleichem Index zurück. Analog werden Differenz, Produkt und Quotient zweier Zahlenfolgen sowie das Produkt einer Zahlenfolge mit einer Zahl erklärt. Uns interessiert nun, ob das Ergebnis derartiger arithmetischer Verknüpfungen von konvergenten Zahlenfolgen wieder konvergente Zahlenfolgen sind. Antwort hierauf geben die folgenden Aussagen:

S.10.8 **Satz 10.8:** *Die beiden Folgen $\{a_n\}$ bzw. $\{b_n\}$ seien konvergent gegen den Grenzwert $a$ bzw. $b$:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

*Dann sind auch die Summe bzw. Differenz $\{a_n \pm b_n\}$, das Produkt $\{a_n b_n\}$ dieser beiden Folgen sowie die Folge $\{ca_n\}$, wobei $c$ eine gewisse reelle Zahl ist, konvergent.*