Beispiel 7.6: Häufig werden spezielle Teilmengen der Menge der reellen Zahlen $\mathbf{R}$, die **Intervalle** benötigt, die folgendermaßen klassifiziert und bezeichnet werden:

$[a, b] = \{x \mid x \in \mathbf{R} \wedge a \leqq x \leqq b\}$ abgeschlossenes Intervall;

$(a, b) = \{x \mid x \in \mathbf{R} \wedge a < x < b\}$ offenes Intervall;

$[a, b) = \{x \mid x \in \mathbf{R} \wedge a \leqq x < b\}$ halboffenes Intervall;

$(a, b] = \{x \mid x \in \mathbf{R} \wedge a < x \leqq b\}$ halboffenes Intervall;

$[a, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbf{R} \wedge a \leqq x < +\infty\}$

$(-\infty, b] = \{x \mid x \in \mathbf{R} \wedge -\infty < x \leqq b\}$ unendliche Intervalle.

$(-\infty, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbf{R} \wedge -\infty < x < +\infty\} = \mathbf{R}$

Denken wir uns die Mengen A und B durch Aussageformen $a(x)$, $b(y)$ über Variablenbereichen X, Y gebildet, so können wir die Definition der Teilmengenbeziehung folgendermaßen ausdrücken: $A \subseteqq B$ ist gleichbedeutend mit $(\forall x)\,(a(x) \to b(x))$ ist eine wahre Aussage.

Beispiel 7.7:

$X = \mathbf{N}$, $Y = \mathbf{G}$;

$a(x)$ = „x ist eine gerade Zahl"

$b(y)$ = „y ist größer oder gleich -10"

$a(x) \to b(x)$ = „Wenn x eine gerade Zahl ist, so ist $x \geqq -10$"

ist offenbar für jedes feste $x \in X\ (= \mathbf{N})$ eine wahre Aussage. Deshalb ist $(\forall x)\,(a(x) \to b(x))$ eine wahre Aussage und demzufolge auch $A \subseteqq B$.

Eigenschaften der Teilmengenbeziehung

(1) Für alle Mengen A gilt: $A \subseteqq A$ (siehe Definition 7.2).

(2) Für alle Mengen A, B, C gilt:

$$(A \subseteqq B \wedge B \subseteqq C) \to A \subseteqq C.$$

Auch Eigenschaft (2) ist eine einfache Folgerung von Definition 7.2. Man nennt (1) *Reflexivität*, (2) *Transitivität* der Teilmengenbeziehung.

D.7.3 **Definition 7.3** *(Gleichheit von Mengen): Zwei Mengen A, B heißen gleich, wenn jedes Element der Menge A auch Element der Menge B ist und umgekehrt.*

Kurzschreibweise: $A = B$ *ist gleichbedeutend mit* $(\forall x)\,(x \in A \leftrightarrow x \in B)$ *ist eine wahre Aussage.*

Nehmen wir an, $A = \{x \mid a(x)\}$, $B = \{x \mid b(x)\}$ (die Variablenbereiche sind also von vornherein gleich), so nimmt Definition 7.3 die folgende Form an:

$A = B$ ist gleichbedeutend mit $(\forall x)\,(a(x) \leftrightarrow b(x))$ ist eine wahre Aussage.
Man sieht daran, daß wir durchaus von gleichen (umfangsgleichen) Mengen sprechen, wenn auch deren erzeugende Aussageformen voneinander verschieden sind.

Beispiel 7.8:

$X = \mathbf{N}$, $A = \{x \mid x^2 - 7x + 10 = 0\} = B = \{x \mid \text{Entweder } x = 2 \text{ oder } x = 5\}$.

S.7.1 **Satz 7.1:** *Für alle Mengen A, B gilt*

$$(A \subseteqq B \wedge B \subseteqq A) \leftrightarrow A = B. \qquad (7.3)$$