punkt gerade umgekehrt sein kann. So sind z. B. für die Abbildung in Aufgabe 8.7 die Werte der Temperatur die Originale und die zugehörigen Meßwerte des Drucks die Bilder. Man kann jedoch das Gas auch Veränderungen des Drucks unterwerfen und die Temperatur des Gases in Abhängigkeit vom Druck messen. Für eine Abbildung dieses Sachverhalts sind dann die Werte des Drucks die Originale und die zugehörigen Meßwerte der Temperatur die Bilder.

In der Mathematik reduziert sich die Vielfalt solcher konkreten Probleme auf die Frage, was sich ergibt, wenn man die Rolle von Original und Bild bei einer Abbildung A umkehrt. Offensichtlich entsteht dabei wieder eine Abbildung; sie wird auf Grund ihrer Konstruktion die Umkehrabbildung von A genannt.

Definition 8.4: *Es sei A eine Abbildung aus M in N. Dann heißt die Menge $\{(y, x) \mid y \in N \wedge x \in M \wedge (x, y) \in A\}$ die* **Umkehrabbildung** *oder* **inverse Abbildung** *von A. Sie wird mit A^{-1} bezeichnet:* **D.8.4**

$$A^{-1} = \{(y, x) \mid y \in N \wedge x \in M \wedge (x, y) \in A\}. \tag{8.9}$$

Aus dieser Definition ist ersichtlich, daß $A^{-1} \subseteqq N \times M$ und somit eine Abbildung aus N in M ist, wenn $A \subseteqq M \times N$ gilt. Als Ergänzung hierzu sei bemerkt, daß die Bildung der Produktmengen i. allg. nicht kommutativ ist und daher i. allg. $M \times N \neq N \times M$ folgt.

Die Definition gibt gleichzeitig an, wie man in einfacher Weise für eine Abbildung A deren inverse A^{-1} erhält. Dazu ist nur in allen geordneten Paaren (x, y), die zu A gehören, die Reihenfolge der Elemente umzukehren. Dabei vertauschen gleichzeitig Definitions- und Wertebereiche ihre Rollen:

$$D_{A^{-1}} = W_A, \qquad W_{A^{-1}} = D_A.$$

Beispiel 8.5: Es seien A_1 und A_2 die Abbildungen von Beispiel 8.3; dann sind die Umkehrabbildungen gegeben durch

$$A_1^{-1} = \{(a, 1), (b, 1), (a, 2), (c, 2)\},$$
$$A_2^{-1} = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3)\}.$$

Dabei gilt

$$D_{A_1^{-1}} = W_{A_1} = \{a, b, c\}, \qquad W_{A_1^{-1}} = D_{A_1} = \{1, 2\},$$
$$D_{A_2^{-1}} = W_{A_2} = \{a\}, \qquad W_{A_2^{-1}} = D_{A_2} = \{1, 2, 3\}.$$

Aufgabe 8.14: Man gebe für die Abbildung A vom Teil a) der Aufgabe 8.12 die inverse A^{-1} einschließlich $D_A{}^{-1}$ und $W_A{}^{-1}$ an. *

8.4. Einige spezielle Abbildungen

Nachdem bereits in Abschnitt 8.2. eine Klasse einfacher Abbildungen näher betrachtet worden ist, setzen wir diese Untersuchungen jetzt fort und interessieren uns für weitere Klassen von Abbildungen, die durch besonders charakteristische Merkmale ausgezeichnet sind.

So ein charakteristisches Merkmal besteht z. B. darin, daß zu jedem Original genau ein Bild gehört. Für Abbildungen praktischer Probleme ist das häufig der Fall (vgl. u. a. Beispiel 8.1, Aufgaben 8.7 und 8.11), muß jedoch durchaus nicht immer erfüllt sein. So wird es für die Abbildung von Beispiel 8.2 im allgemeinen zu einzelnen Originalen durchaus mehrere Bilder geben. Daher sondert man unter allen Abbildungen durch die folgenden Definitionen eine Teilklasse aus.