c) Kombinationen ohne Wiederholung: $C_n^2 = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \geqq 15$, $n^2 - n - 30 \geqq 15$, $n \geqq 6$. Man benötigt also mindestens 6 Farben.

6.4: $n = 8$, $k = 3$. a) Kombinationen ohne Wiederholung: $C_8^3 = \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$.
b) Variationen ohne Wiederholung: $V_8^3 = \frac{8!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

6.5: a) Variationen mit Wiederholung: $n = 10$ (10 Ziffern), $k = 5$ (fünfstellige Rufnummern): $V_{w_n}^k = n^k = 10^5 = 100000$. b) Von den 100000 Anschlüssen beginnen $V_{w_{10}}^4 = 10^4 = 10000$ Anschlüsse mit 0; also verbleiben 90000 Anschlüsse.

6.6: Um ohne Umwege von A nach B zu gelangen, muß man 6 Abschnitte in x-Richtung und 5 Abschnitte in y-Richtung zurücklegen. Die verschiedenartigen Zusammenstellungen von 6 x-Abschnitten und 5 y-Abschnitten sind Permutationen mit Wiederholung:

$$P_{w_n}^{(6,5)} = \frac{11!}{6!\,5!} = 462.$$

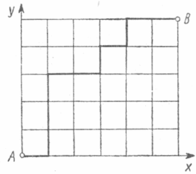

Bild L.6.1

6.7: a) $\sum\limits_{\nu=0}^{n} \binom{a+\nu}{\nu} = \binom{a+1+n}{n}$, a reell, $n \geqq 0$, (6.21);

I. Induktionsanfang $\quad n = 0$: $\sum\limits_{\nu=0}^{0} \binom{a+\nu}{\nu} = 1 = \binom{a+1}{0}$,

II. Induktionsannahme $n = k$: $\sum\limits_{\nu=0}^{k} \binom{a+\nu}{\nu} = \binom{a+1+k}{k}$,

III. $\sum\limits_{\nu=0}^{k} \binom{a+\nu}{\nu} + \binom{a+k+1}{k+1} = \sum\limits_{\nu=0}^{k+1} \binom{a+\nu}{\nu} = \binom{a+1+k}{k} + \binom{a+k+1}{k+1}$.

Mit (6.20) folgt dann: $\sum\limits_{\nu=0}^{k+1} \binom{a+\nu}{\nu} = \binom{a+k+2}{k+1}$.

IV. Formel (6.21) gilt für $n = k + 1$ und damit für alle natürlichen $n \geqq 0$.

7.1: Es ist $A = \left\{x \mid x \in \mathbf{R} \wedge |x+1| \leqq \frac{x}{2} + 2\right\} = \{x \mid x \in \mathbf{R} \wedge -2 \leqq x \leqq +2\}$, denn: 1) wenn $x + 1 \geqq 0$ ist, folgt $x + 1 \leqq \frac{x}{2} + 2$, d. h. $x \leqq 2$, und 2) wenn $x + 1 < 0$ ist, folgt $-x - 1 \leqq \frac{x}{2} + 2$, d. h. $\frac{3}{2}x \geqq -3$ (gleichwertig mit $x \geqq -2$). Demzufolge ist $\bar{A}$ nach Definition:

$$\bar{A} = \{x \mid (-\infty < x < -2) \vee (+2 < x < +\infty)\}.$$

7.2: a) Es sei $3 - 2x > 0$, d. h. $x < \frac{3}{2}$. Dann gilt bei Richtigkeit der Ungleichung auch $3x + 2 \geqq 2(3 - 2x)$, d. h. $3x + 2 \geqq 6 - 4x$. Hieraus folgt $x \geqq \frac{4}{7}$. Da die Rechenschritte rückwärts durchlaufbar sind, lösen alle $x \in \left[\frac{4}{7}, \frac{3}{2}\right)$ die Ungleichung. Für $x = \frac{3}{2}$ ist der Ausdruck $\frac{3x+2}{3-2x}$ nicht erklärt. Für $x > \frac{3}{2}$ ist $3 - 2x < 0$. Deshalb folgt $3x + 2 \leqq 2(3 - 2x)$, d. h. $6x \leqq 4$, also $x \leqq \frac{2}{3}$. Demzufolge besitzt die Ungleichung für $x > \frac{3}{2}$ keine Lösungen. Die Lösungsmenge ist $\left[\frac{4}{7}, \frac{3}{2}\right)$. b) Die Lösungsmenge ist $(-\infty, -8] \cup \left[2, \frac{8}{3}\right]$. Man unterscheide die drei Fälle: $x \leqq -3$, $\quad -3 < x \leqq \frac{5}{2}$, $\quad x > \frac{5}{2}$. c) Es sei $x \leqq -5$. Dann geht Ungleichung $|x - 1| + |x + 5| \leqq 4$ über in $-(x - 1) - (x + 5) = -2x - 4 \leqq 4$, d. h. $x \geqq -4$.