Man vermutet daher den

S.6.1 **Satz 6.1:** *Bezeichnet man mit P_n die Anzahl der Permutationen von n verschiedenen Elementen, so ist*

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n. \tag{6.8}$$

Der *Beweis* wird durch vollständige Induktion geführt (siehe 4.3.):

I. Induktionsbeginn: Die Behauptung ist für $n = 1$ richtig.

II. Induktionsannahme: Der Satz gilt für $n = k$, es ist also $P_k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$.

III. Nehmen wir ein weiteres $(k + 1)$-tes Element hinzu, so kann dieses in eine bestimmte vorhandene Zusammenstellung der k Elemente an die erste, zweite, ..., $(k + 1)$-te Stelle gesetzt werden. Wir erhalten somit $(k + 1)$ Permutationen für diese eine Zusammenstellung.
Wird dieser Vorgang für jede der P_k Permutationen durchgeführt, so erhalten wir für die Anzahl der Permutationen von $(k + 1)$ Elementen:

$$P_{k+1} = P_k \cdot (k + 1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k + 1).$$

IV. Die Formel gilt also für $n = k + 1$ und somit für alle natürlichen Zahlen $n \geqq 1$. ■

Fakultät

Für das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis n wird das Symbol $n!$ – gelesen: „n-Fakultät" – verwendet:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n. \tag{6.9}$$

Es gilt

$$(n + 1)! = n! \cdot (n + 1). \tag{6.10}$$

Zudem wird $0! = 1! = 1$ gesetzt. Wir erhalten $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$, $7! = 5040$, $8! = 40320$ usf. Damit kann die Anzahl der Permutationen ohne Wiederholung geschrieben werden:

$$P_n = n!. \tag{6.8'}$$

Beispiele 6.2:

1. 6 Personen können in $6! = 720$ verschiedenen Reihenfolgen in einer Warteschlange stehen.
2. 5 Bücher können auf $5! = 120$ verschiedene Weisen auf einem Bücherbrett angeordnet werden.
3. Wenn auf einer Maschine n verschiedene Artikel nacheinander bearbeitet werden sollen, so gibt es für die Reihenfolge $n!$ Möglichkeiten.

Lexikographische Anordnung

Bei vielen Elementen gibt es eine sogenannte natürliche Zusammenstellung, so bei den indizierten Größen die Anordnung $a_1 \, a_2 \, a_3 \ldots a_n$, bei den Buchstaben das Alphabet. Permutationen werden als *lexikographisch* geordnet bezeichnet, wenn die einzelnen Permutationen wie die Wörter in einem Wörterbuch aufeinander folgen. Von zwei Permutationen geht dabei diejenige voran, deren erstes Element in der natürlichen Anordnung an niedrigerer Stelle steht. Falls jedoch die ersten Elemente gleich sind, geht diejenige voraus, deren zweites Element in der natürlichen Anordnung niedriger ist. Sind die ersten zwei Elemente gleich, so folgt die Unterscheidung nach dem dritten usf.

Beispielsweise sind die Permutationen der drei Elemente a_1, a_2, a_3 in (6.7) nicht lexikographisch geordnet. Für *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba* liegt dagegen eine lexikographische Anordnung vor, wenn man das Alphabet als natürliche Zusammenstellung ansieht.