denn: $(p \vee (p \wedge q)) \leftrightarrow p$ ist eine Tautologie (p = „$x \in X \wedge a(x)$", q = „$b(x)$", zunächst x fest, jedoch für jedes beliebige x).

Es gibt nun noch eine Reihe weiterer wichtiger Rechenregeln, die man jedoch durch Anwendung der bereits bekannten Regeln (7.12) bis (7.17) herleiten kann. So gilt z. B.:

(7) $\bar{\bar{A}} = A$; (7.20)

(8) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$; (*de-Morgan-Gesetze*) (7.21)

(9) $A \subseteqq B \leftrightarrow \bar{B} \subseteqq \bar{A}$; (7.22)

(10) $(A \subseteqq B) \leftrightarrow (A \cap \bar{B} = \emptyset) \leftrightarrow (\bar{A} \cup B = M)$. (7.23)

Wir beweisen die Regel (7.21): Nach Regel (6), Formel (7.17) genügt es zu zeigen:

$$(A \cup B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) = M \quad \text{und} \quad (A \cup B) \cap (\bar{A} \cap \bar{B}) = \emptyset.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) &\underset{(7.15)}{=} ((A \cup B) \cup \bar{A}) \cap ((A \cup B) \cup \bar{B}) \\ &\underset{(7.12),\,(7.13)}{=} ((A \cup \bar{A}) \cup B) \cap (A \cup (B \cup \bar{B})) \\ &\underset{(7.17)}{=} (M \cup B) \cap (A \cup M) \underset{(7.17)}{=} M \cap M = M\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap (\bar{A} \cap \bar{B}) &= (A \cap (\bar{A} \cap \bar{B})) \cup (B \cap (\bar{A} \cap \bar{B})) \\ &= ((A \cap \bar{A}) \cap \bar{B}) \cup ((B \cap \bar{B}) \cap \bar{A}) \\ &= (\emptyset \cap \bar{B}) \cup (\emptyset \cap \bar{A}) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset.\end{aligned}$$

Wir werden zum Abschluß des nächsten Abschnittes ein Beispiel für die Anwendung dieser Regeln geben.

Aufgabe 7.4: A, B, C, D seien beliebige Mengen. Man untersuche die Richtigkeit folgender Beziehungen: *

a) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$; b) $A \setminus B = A \cap (A \setminus B)$;

c) $A = (A \setminus B) \cup B$;

d) $(A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D) = (A \cap B) \cup (C \cap D)$.

Aufgabe 7.5: A, B, C seien Teilmengen von M. Man vereinfache folgende Ausdrücke: *

a) $A \cap ((A \cup B) \setminus B)$; b) $(A \cap B \cap C) \cup \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$.

7.4. Über Mächtigkeit von Mengen

In den vorhergehenden Abschnitten haben wir eine Reihe von Mengen betrachtet, die endlich viele Elemente besitzen, aber auch solche, die nicht aus endlich vielen Elementen bestehen.

Beispiel 7.15:

$A_1 = \{1, 2, 3, 5, 8, 12\}$,

$A_2 = \{\text{grün, rot, gelb, blau}\}$,

$A_3 = \mathbf{P} = \{x \mid x \text{ ist eine rationale Zahl}\}$,

$A_4 = \{x \mid x \text{ ist eine reelle Zahl und } 0 \leqq x \leqq 1\}$,

$A_5 = \{x \mid x \in \mathbf{G} \wedge x^2 = 3\} = \emptyset$.