lich gesprochen heißt das eben gerade, daß sich in jeder Umgebung eines Punktes mit den in der Definition 10.7 genannten Eigenschaften unendlich viele Punkte der Menge befinden, sich also dort „häufen". Darauf beruht die Bezeichnung Häufungspunkt.

Betrachtet man Zahlenfolgen gleichzeitig als Punktmenge auf der Zahlengeraden, so gelten über die Beziehungen zwischen ihnen und dem Begriff des Häufungspunktes folgende Aussagen.

1. Wenn eine konvergente Zahlenfolge unendlich viele Glieder enthält, die von ihrem Grenzwert verschieden sind, so ist ihr Grenzwert gleichzeitig ihr einziger Häufungspunkt.
2. Enthält eine konvergente Zahlenfolge dagegen nur endlich viele Glieder, die von ihrem Grenzwert verschieden sind, so besitzt sie keinen Häufungspunkt und insbesondere ist ihr Grenzwert nicht Häufungspunkt für sie.
3. Wenn eine divergente, jedoch beschränkte Zahlenfolge höchstens endlich viele gleiche Glieder enthält, so besitzt sie mindestens zwei Häufungspunkte, nämlich ihren unteren und oberen Grenzwert.

* *Aufgabe 10.24:* Man untersuche, ob die Zahlenfolgen

$$\{a_n\},\ a_n = [1 + (-1)^n]\frac{4n-3}{n^2}, \qquad \{b_n\},\ b_n = [1 + (-1)^n]\frac{4n-3}{n},$$

konvergent oder divergent sind. Im Falle der Konvergenz ermittle man ihren Grenzwert und prüfe, ob dieser Grenzwert gleichzeitig ihr Häufungspunkt ist. Im Falle der Divergenz prüfe man, ob die Folgen beschränkt sind. Sollten sie sich als beschränkt erweisen, so ermittle man ihren oberen und unteren Grenzwert und prüfe, ob diese Grenzwerte gleichzeitig Häufungspunkte für die Folgen sind.

10.9. Bedeutung von Zahlenfolgen und Grenzwert für die numerische Mathematik

Wenn praktische Untersuchungen auf mathematische Aspekte führen, so ergibt sich in vielen Fällen die Aufgabe, konkrete Zahlen zu ermitteln, d. h. numerische Lösungen zu finden. Als ein Beispiel hierfür sei die Aufgabe genannt, für eine Funktion $f(x)$, $x \in D_f$, die Nullstellen, d. h. diejenigen $x \in D_f$ zu bestimmen, für die

$$f(x) = 0 \tag{10.36}$$

gilt. Eine andere Aufgabe dieser Art besteht darin, den Flächeninhalt einer ebenen Fläche zu bestimmen, deren Randkurven die Graphen bekannter Funktionen sind.

Sehr einfach und exakt kann die Lösung von (10.36) angegeben werden, wenn z. B. $f(x) = 3x - 12$ ist. Sie lautet dann $x_0 = 4$. Komplizierter wird es schon, wenn $f(x) = 3x - 1$ ist. Dann lautet die Lösung $x_0 = \frac{1}{3}$. Will man diese Zahl nun im Dualsystem darstellen – das macht sich insbesondere bei der Anwendung von elektronischen Rechenanlagen notwendig – dann stößt man schon auf Schwierigkeiten, bei deren Überwindung die Zahlenfolgen von Nutzen sind. Man überzeugt sich leicht davon (vgl. Aufgabe 10.13 und deren Lösung), daß

$$\frac{1}{3} = \lim_{n\to\infty} s_n \quad \text{mit} \quad s_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2i}$$