3.4. Die wesentlichen logischen Zeichen und ihre technische Realisierung

3.4.1. Logische Zeichen

Wir haben bereits in 3.3.1. einige wesentliche Kurzzeichen, die in der Logik zur Beschreibung von Aussagenverbindungen benutzt werden, angegeben.

Wir wiederholen:

$\bar{p}$ – *nicht p*

$p \wedge q$ – *p und q*

$p \vee q$ – *p oder q*

$p \rightarrow q$ – *wenn p, so q*

$p \leftrightarrow q$ – *p genau dann, wenn q*

Die Zeichen $^-$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ sind die Kurzzeichen (*Funktoren*) der Aussagenlogik. Darüber hinaus gibt es jedoch einige Zeichen, die insbesondere für mathematische Aussagen von Bedeutung sind. Dazu betrachten wir noch einmal eine Aussageform $p(x)$ mit dem Bereich X der Variablen x.

Es gibt außer der schon behandelten Möglichkeit, von der Aussageform $p(x)$ zu Aussagen überzugehen (einsetzen konkreter $x = x_1 \in X$), noch eine andere Möglichkeit, Aussagen mit Hilfe von $p(x)$ zu bilden. Diese Möglichkeit ergibt sich aus der Tatsache, daß beim Einsetzen spezieller $x = x_1 \in X$ in die Aussageform die drei folgenden Fälle eintreten können:

1. Alle entstehenden Aussagen sind wahr,
2. mindestens eine der entstehenden Aussagen ist wahr und mindestens eine ist falsch,
3. alle entstehenden Aussagen sind falsch.

Entsprechend definieren wir:

Definition 3.3: **D.3.3**

(a) $q = (\forall x)\, p(x)$, *gelesen: „Für jedes x gilt p(x)", ist eine zweiwertige Aussage, die genau dann den Wert W besitzt, wenn p(x) für jedes konkrete* $x = x_1 \in X$ *eine wahre Aussage darstellt. Das Symbol* $\forall$ *heißt* **Allquantor.**

(b) $r = (\exists x)\, p(x)$, *gelesen: „Es existiert ein x so, daß p(x) gilt", ist eine zweiwertige Aussage, die genau dann den Wert F besitzt, wenn p(x) für jedes konkrete* $x = x_1 \in X$ *eine falsche Aussage darstellt. Das Symbol* $\exists$ *heißt* **Existenzquantor.**

(c) $s = (\mathsf{N}x)\, p(x) = (\forall x)\, \overline{p(x)}$, *gelesen: Für kein x gilt p(x)".* N *heißt* **Nullquantor** *und kann leicht auf den* **Allquantor** *zurückgeführt werden.*

Beispiele 3.8:

$p(x) =$ „x ist eine gerade Zahl",

$q(x) =$ „Das Quadrat von x ist nicht negativ",

$X = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\} = G$ (Menge der ganzen Zahlen).

Dann gilt:

$w((\forall x)\, p(x)) = F$, denn z. B. $x = 1$ ist eine ungerade Zahl;

$w((\exists x)\, p(x)) = W$, denn z. B. $x = 2$ ist eine gerade Zahl;

$w((\forall x)\, q(x)) = W$, denn das Quadrat einer ganzen Zahl ist nicht negativ;

$w((\exists x)\, q(x)) = W$ ist eine Folgerung von $w((\forall x)\, q(x)) = W$.