VI. *Grundgesetz der Division* (Umkehrung der Multiplikation):

Zu jedem Paar von Zahlen a und b mit $a \neq 0$ gibt es genau eine Lösung x der Gleichung $a \cdot x = b$. Man nennt x den *Quotienten* (oder *Bruch*) von b und a und schreibt $x = \frac{b}{a}$ oder $x = b : a$; b wird als *Dividend* (oder *Zähler*), a als *Divisor* (oder *Nenner*) bezeichnet.

Auch sei hier besonders auf die Eindeutigkeit der Lösung x hingewiesen! Die Division durch 0 wird ausgeschlossen!

Beweisbar ist jetzt der Satz von der Existenz der Eins:

Satz 5.2: *Es gibt genau eine Zahl* 1, *die, bei der Multiplikation als Faktor verwendet, keine Änderung bewirkt, d. h., es gilt* $(\forall a)\ a \cdot 1 = a$. **S.5.2**

Als letztes soll eine weitere grundlegende Eigenschaft der rationalen Zahlen angegeben werden, die man als Archimedisches Grundgesetz bezeichnet.

VII. *Archimedisches Grundgesetz:*

Ist a eine positive Zahl, so gibt es stets eine natürliche Zahl n mit $n > a$.

Die folgende Formulierung läßt eine geometrische Interpretation zu. Sind a und b zwei positive Zahlen, so gibt es stets eine natürliche Zahl n mit

$$\underbrace{a + a + \ldots + a}_{n\text{-mal}} = n \cdot a > b.$$

Die Strecke der Länge a kann so oft addiert werden, daß die Summe größer als die Strecke b wird.

Abgeleitete Rechenregeln

Aus den vorstehend genannten Grundgesetzen lassen sich alle bekannten Regeln – so etwa die Vorzeichen- und Klammerregeln – für das Rechnen mit rationalen Zahlen herleiten. Die getroffene Auswahl der Grundgesetze erweist sich insofern als zweckmäßig, da alle Rechenregeln der Arithmetik aus ihnen ableitbar sind und ihre Anwendung nicht zu Widersprüchen führt. Auf die interessanten Fragen, ob die angegebenen Grundgesetze selbst bewiesen oder inwieweit sie durch andere ersetzt werden können oder ob sie für den Bereich der rationalen Zahlen charakteristisch sind, kann hier nicht eingegangen werden.

Anschließend werden einige Rechenregeln aus den Grundgesetzen hergeleitet. Die hierfür erforderlichen Schlußweisen sind nicht sehr schwierig, müssen aber *sorgfältig* durchgeführt werden.

Beispiele 5.3:

1. Es gilt $-(-a) = a$.

Da wegen III.2. aus $a + (-a) = 0$ auch $(-a) + a = 0$ folgt, ergibt sich nach IV. $a = 0 - (-a)$ oder $a = -(-a)$.

2. Es gilt $b + (-a) = b - a$.

Die Zahl $x = b - a$ löst nach IV. die Gleichung $a + x = b$. Setzen wir andererseits für $x = b + (-a)$, so ergibt sich nach III.2. und III.3.:

$$a + [b + (-a)] = a + [(-a) + b] = [a + (-a)] + b = 0 + b = b.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Lösung muß demnach $b + (-a) = b - a$ sein.