Inversionen

Wenn zwei Elemente in einer Permutation umgekehrt zu ihrer natürlichen Anordnung stehen, so bilden sie eine *Inversion* dieser Permutation. Die Inversionen sind demnach die Fehlstände in einer Permutation. Ist 1 2 3 4 5 die natürliche Anordnung von 5 Elementen, so haben die Permutationen

2 5 1 3 4 vier Inversionen durch Fehlstände der Elemente 2 und 1, 5 und 4, 5 und 3, 5 und 1;

3 2 4 5 1 fünf Inversionen durch Fehlstände der Elemente 3 und 2, 3 und 1, 2 und 1, 4 und 1, 5 und 1.

Satz 6.2: *Die Anzahl der Inversionen ändert sich um eine ungerade Zahl, wenn aus einer Permutation eine andere durch Vertauschung zweier Elemente gebildet wird.* **S.6.2**

Dieser Satz wird bei der Erklärung von Determinanten (Band 13) verwendet.

Beispiele 6.3:

1. In 3 2 4 5 1 mit fünf Inversionen wird 2 mit 5 vertauscht. Man erhält die neue Permutation 3 5 4 2 1 mit acht Inversionen. Vertauscht man in dieser 1 mit 2, so ergibt sich 3 5 4 1 2 mit 7 Inversionen. Die Änderungen der Inversionen betragen also 3 bzw. 1.
2. Die Permutation $a_n\, a_{n-1} \ldots a_3\, a_2\, a_1$ hat gegenüber der natürlichen Anordnung $a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_{n-1}\, a_n$ insgesamt
$$(n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$
Fehlstände.

Gerade und ungerade Permutationen

Ist die Anzahl der Inversionen gerade, so heißt die Permutation gerade, sonst ungerade.

Satz 6.3: *Die Anzahl der geraden Permutationen von n verschiedenen Elementen* ($n > 1$) *ist gleich der Anzahl der ungeraden Permutationen und somit gleich* $\frac{1}{2}n!$. **S.6.3**

6.2.2. Permutationen mit Wiederholung

Wenn die n Elemente nicht alle voneinander verschieden sind, so treten Permutationen mit Wiederholungen auf, bei denen einzelne Elemente mehrfach vorkommen, z. B. $a_1\, a_1\, a_1\, a_2\, a_2$. Die Anzahl der Permutationen verringert sich bei gleicher Stellenzahl n gegenüber der Anzahl der Permutationen von durchweg verschiedenen Elementen. Hat man 3 Elemente, so ist $P_3 = 6$. Werden davon zwei gleichgesetzt, etwa $a_1 = a_2$, so reduzieren sich die voneinander verschiedenen Permutationen auf drei:
$$a_1\, a_1\, a_3, \quad a_1\, a_3\, a_1, \quad a_3\, a_1\, a_1.$$
Hat man n verschiedene Elemente, so gibt es $n!$ Permutationen. Sind nun n_1 Elemente einander gleich, so sind alle ursprünglichen Permutationen nicht mehr zu unterscheiden, bei denen nur diese n_1 Elemente die Plätze untereinander vertauschen. Dafür gibt es aber jeweils $n_1!$ Möglichkeiten. Daher hat man nur noch insgesamt $\frac{n!}{n_1!}$ Permutationen. Entsprechendes gilt, wenn weitere Gruppen von einander gleichen Elementen auftreten.

Allgemein ergibt sich die Anzahl der Permutationen mit Wiederholungen aus dem

Satz 6.4: *Teilt man die n Elemente derart in k Gruppen von je* n_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) *gleichen Elementen auf, daß die Elemente verschiedener Gruppen verschieden sind, so ist die Anzahl der verschiedenen Permutationen.* **S.6.4**

$$P_{w_n}^{(n_1, \ldots, n_k)} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!} \quad mit \quad n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n. \tag{6.11}$$

Der Satz wird hier nicht bewiesen.