Beweis: Es ist

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)\cdot((k+1)+1)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

(nach II)

$$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Demzufolge ist III. gezeigt, und wir können nach IV. schließen, daß die Summenformel

$$S_k = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

für jede natürliche Zahl $n \geqq 1$ gilt. ■

Beispiel 4.10: Wir betrachten die Aussage (3) am Beispiel 4.7. Wir nehmen an: Es sei $k = k + 1$ für ein beliebiges $n = k \geqq 0$. Dann ist nach III. zu zeigen: $k + 1 = k + 2$. Dies ist aber nicht schwer, denn aus $k = k + 1$ folgt durch Addition von 1 auf beiden Seiten sofort $k + 1 = k + 2$.

Hieraus den Schluß zu ziehen, daß die in Beispiel 4.7, (3), formulierte Aussage richtig ist, wäre jedoch falsch, denn wir haben vergessen, I. nachzuprüfen. Nach I. müßte gelten: $0 = 1$. Das ist aber offenbar falsch.

So einfach es im Beispiel 4.10 auch zu sehen ist, daß die Aussage $(\forall n)\, n = n + 1$ falsch ist, so zeigt es doch die Wichtigkeit des Schrittes I. Es kann ohne weiteres vorkommen, daß sich III. beweisen läßt, aber I. nicht gilt. In einem solchen Falle ist die zu untersuchende Aussage falsch. Den Beweis der Aussage (4) aus Beispiel 4.7 überlassen wir dem Leser.

Bemerkungen:

1. Die Schwierigkeit beim Induktionsbeweis liegt darin, da es zum Beweis von III. keine Rezepte gibt. Es kommt jeweils darauf an, die Annahme II. günstig auszunutzen, um III. zu zeigen.
2. In vielen Anwendungen sind sowohl a als auch die Aussageformen $p(n)$ nicht gegeben, und es kann sehr schwierig sein, diese zu finden.
3. Es gibt eine Modifikation der Annahme II., die folgendermaßen lautet:
   II'.: Die Aussagen $p(n)$ mögen für alle Zahlen $a \leqq n \leqq k$ gelten. Man kann nun II. durch II'. ersetzen und in manchen Beispielen nutzbringend anwenden.

Aufgabe 4.5: Man zeige mittels vollständiger Induktion $q = (\forall n)\, 2^n > 2n + 1$, $X = \{3, 4, 5, \ldots\}$, ist eine wahre Aussage! *

Aufgabe 4.6: Man zeige mittels vollständiger Induktion *

$$q = (\forall n) \sum_{m=1}^{n} m \cdot x^{m-1} = \frac{1-(n+1)\cdot x^n + n\cdot x^{n+1}}{(1-x)^2}; \quad X = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

ist für jede beliebige reelle Zahl x, $x \neq 1$, x fest gewählt, eine wahre Aussage.