führen. Summe, Differenz, Produkt und Quotient zweier rationaler Zahlen ist wieder eine solche.

Beachten muß man lediglich, daß die Division durch 0 nicht möglich ist!

Dabei kann jede rationale Zahl als Quotient zweier ganzer rationaler Zahlen dargestellt werden. Die ganzen Zahlen werden als ein Bruch mit dem Nenner 1 aufgefaßt.

Wir wollen den Bereich der rationalen Zahlen als etwas Gegebenes ansehen und gehen nicht weiter auf seine Entwicklung aus dem Bereich der natürlichen Zahlen ein. Das formale Rechnen mit derartigen Zahlen einschließlich der Vorzeichen- und Klammerregeln setzen wir ebenfalls als bekannt voraus.

Grundgesetze der Arithmetik

Im folgenden sollen einige Eigenschaften und Gesetze der rationalen Zahlen angegeben werden. Dabei bedienen wir uns eines „axiomatischen" Vorgehens, indem wir die grundlegenden Eigenschaften als Grundgesetze formulieren, aus denen sich dann alle weiteren – uns bekannten – Rechenregeln ableiten lassen. Wenn wir jetzt allgemein von Zahlen sprechen, so sind die rationalen Zahlen gemeint. Bezeichnet werden sie mit kleinen lateinischen Buchstaben $a, b, c, \ldots$

Die Grundgesetze der rationalen Zahlen werden für die Gleichheit und Ordnung, Addition und Subtraktion, Multiplikation und Division formuliert und falls erforderlich jeweils erläutert:

I. *Grundgesetze der Gleichheit:*

1. Es ist $a = a$ (*Reflexivität der Gleichheit*)
2. Aus $a = b$ folgt $b = a$ (*Symmetrie der Gleichheit*)
3. Aus $a = b$ und $b = c$ folgt $a = c$ (*Transitivität der Gleichheit*)

II. *Grundgesetze der Ordnung:*

1. Die Zahlen bilden eine geordnete Menge, d. h. für jedes Paar von Zahlen a und b gilt genau eine der drei Beziehungen: $a < b, a = b, a > b$.
2. Aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$ (Transitivität der Beziehung „kleiner").
   Eine andere kürzere Schreibweise hierfür ist
   $$(a < b \wedge b < c) \rightarrow a < c.$$

Soll nur die Ungleichheit von a und b ausgedrückt werden, so schreiben wir $a \neq b$, d. h., a ist nicht gleich b.

III. *Grundgesetze der Addition:*

1. Zu jedem Paar von Zahlen a und b gibt es genau eine dritte Zahl, die die *Summe* von a und b genannt und mit $a + b$ bezeichnet wird; a, b heißen *Summanden*. Die Addition genügt folgenden Gesetzen:
2. $a + b = b + a$ (*Kommutativität der Addition*)
3. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (*Assoziativität der Addition*)
4. Aus $a < b$ folgt $a + c < b + c$ (*Monotonie der Addition*)

   oder kürzer
   $$a < b \rightarrow a + c < b + c$$