Beispiel 5.1: Aus $\frac{4}{5} < \frac{5}{4}$ folgt $\frac{4}{5} + 3 < \frac{5}{4} + 3$, also $\frac{19}{5} < \frac{17}{4}$

oder $\frac{4}{5} + (-3) < \frac{5}{4} + (-3)$, also $-\frac{11}{5} < -\frac{7}{4}$.

IV. *Grundgesetz der Subtraktion* (Umkehrung der Addition):

Zu jedem Paar von Zahlen a und b gibt es genau eine Lösung x der Gleichung $a + x = b$. Man nennt x die *Differenz* von b und a und schreibt $x = b - a$; b wird als *Minuend*, a als *Subtrahend* bezeichnet.

Auf die Eindeutigkeit der Lösung – „es gibt genau eine Lösung" – soll besonders hingewiesen werden.

An dieser Stelle wird der Satz von der Existenz der Null eingefügt, der aus den angeführten Grundgesetzen abgeleitet werden kann.

S.5.1 **Satz 5.1:** *Es gibt genau eine Zahl* 0, *die, bei der Addition als Summand verwendet, keine Änderung bewirkt, d. h., es gilt* $(\forall a)\, a + 0 = a$.

D.5.1 **Definition 5.1:** *Eine Zahl a heißt positiv, wenn* $a > 0$, *und negativ, wenn* $a < 0$ *ist.*

Die Gleichung $a + x = 0$ wird durch $x = 0 - a$ gelöst, wofür wir $x = -a$ schreiben. Man nennt $-a$ die zu a entgegengesetzte Zahl, und es gilt $a + (-a) = 0$. Daraus folgt sofort: Ist $a > 0$, so ist $-a < 0$, und ist $a < 0$, so ist $-a > 0$. Denn ist beispielsweise $a > 0$, so ist wegen III.4. $a + (-a) > (-a)$, also auch $0 > -a$. Überlegen Sie sich ebenso den Nachweis des zweiten Teils der Folgerung!

V. *Grundgesetze der Multiplikation*

1. Zu jedem Paar von Zahlen a und b gibt es genau eine dritte Zahl, die das *Produkt* von a und b genannt und mit $a \cdot b$ (oder ab) bezeichnet wird; a, b heißen *Faktoren*, a *Multiplikand*, b *Multiplikator*. Die Multiplikation genügt folgenden Gesetzen:
2. $a \cdot b = b \cdot a$ (*Kommutativität der Multiplikation*)
3. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (*Assoziativität der Multiplikation*)
4. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (*Distributivität*)
5. Aus $a < b$ und $c > 0$ folgt $a \cdot c < b \cdot c$ (*Monotonie der Multiplikation*)
   oder kürzer

$$(a < b \wedge c > 0) \rightarrow a \cdot c < b \cdot c.$$

Zu beachten ist, daß das 4. Gesetz Addition und Multiplikation unsymmetrisch miteinander verknüpft. Die Vertauschung beider Operationen in diesem Gesetz führt zu einer falschen Aussage, denn es ist im allgemeinen $a \cdot b + c \neq (a + c) \cdot (b + c)$.

Wegen des 5. Gesetzes spielt die 0 für die Multiplikation von Ungleichungen eine besondere Rolle, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 5.2: Wir gehen von der Beziehung $4 < 6$ aus, die wir nacheinander mit $2, \frac{1}{2}, 0$ und -1 multiplizieren:

$$\begin{array}{cccc} 4 \cdot 2 < 6 \cdot 2 & 4 \cdot \frac{1}{2} < 6 \cdot \frac{1}{2} & 4 \cdot 0 = 6 \cdot 0 & 4 \cdot (-1) > 6 \cdot (-1) \\ 8 < 12 & 2 < 3 & 0 = 0 & -4 > -6. \end{array}$$

Man darf also Ungleichungen nur mit positiven Zahlen multiplizieren, ohne daß sich das Ungleichheitszeichen ändert.