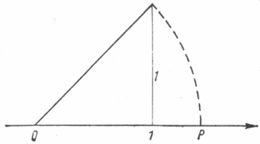

Bild 5.3

Der Umfang eines Kreises mit dem Radius r berechnet sich nach der Formel $U = 2\pi r$. Auch π ist keine rationale Zahl, so daß wir für $r = \frac{1}{2}$ einen Kreisumfang erhalten, dessen Länge ebenfalls nicht mit einer rationalen Zahl meßbar ist.

Es gibt also nichtrationale Zahlen. Das führt zu einer Erweiterung des Bereiches der rationalen Zahlen. Durch Hinzunahme von *irrationalen* (nichtrationalen) Zahlen erhalten wir den Bereich der *reellen* Zahlen. Die Einführung der irrationalen Zahlen und die Rechtfertigung der Gültigkeit der Grundgesetze der Arithmetik und damit auch der abgeleiteten Regeln bedarf genauerer Untersuchungen, die hier nicht geführt werden.

So kann man nach Weierstraß (1815–1897) die reellen Zahlen durch Intervallschachtelungen mit rationalen Intervallgrenzen oder nach Dedekind (1831–1916) durch Schnitte im rationalen Zahlenbereich erklären. Die rationalen Zahlen lassen sich in diese Definitionen einordnen und gehören damit zum Bereich der reellen Zahlen.

Letzterer bildet also eine Erweiterung des Bereichs der rationalen Zahlen derart, daß alle im Bereich der rationalen Zahlen gültigen Regeln bestehen bleiben und formal unverändert auf die irrationalen Zahlen übertragen werden. Weiterhin läßt sich zwischen den Punkten der Zahlengeraden und den reellen Zahlen eine umkehrbar eindeutige Zuordnung herstellen. Jedem Punkt P der Zahlengeraden entspricht dann genau eine reelle Zahl a und umgekehrt jeder reellen Zahl a genau ein Punkt P der Geraden.

* *Aufgabe 5.2:* Welches der Zeichen $<$, $=$, $>$ gehört jeweils zwischen die folgenden Zahlen:

$$\sqrt{2^{\pi}} \text{ und } 1{,}41^{3{,}14}; \quad \sqrt{2^{\pi}} \text{ und } 1{,}42^{3{,}15}; \quad \sqrt{2}^{\,-\frac{1}{\sqrt{\pi}}} \text{ und } 1{,}42^{-\frac{1}{\sqrt{3{,}14}}}?$$

Eine Erweiterung des Bereichs der reellen Zahlen ist bei Beibehaltung der Grundgesetze aus 5.1.2. nicht mehr möglich. Das geht nur bei Verzicht auf gewisse Axiome. So wird bei der Erweiterung zum Bereich der komplexen Zahlen in 5.3. auf die Grundgesetze der Ordnung und der Monotonie verzichtet.

Übersicht zum Bereich der reellen Zahlen

Wir geben eine endgültige Übersicht über den Aufbau des Bereichs der reellen Zahlen an:

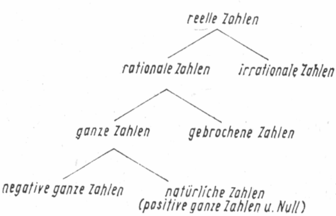

Bild 5.4