5. Ist $a < b$ und $c < d$ und sind b und c positiv, dann gilt $a \cdot c < b \cdot d$.

Beweis: Aus $a < b$ folgt wegen V.5. $a \cdot c < b \cdot c$,

aus $c < d$ folgt ebenso $b \cdot c < b \cdot d$

und somit wiederum wegen II.2. die Behauptung. ■

Wir können aber gleichgerichtete Ungleichungen im allgemeinen nicht miteinander multiplizieren, z. B. ist $-3 < -1$ und $2 < 10$, aber $-6 > -10$!

6. Aus $a < b$ folgt $-a > -b$ und falls $a > 0$ – und somit auch $b > 0$ – ist, folgt $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

Die Beweise hierfür sind bereits in den Beispielen 5.3 (3 und 7) angegeben. Bei der Multiplikation mit (-1) kehrt sich der Sinn der Ungleichung um!

Beispiele 5.4:

1. Es sollen diejenigen reellen Zahlen ermittelt werden, die der Ungleichung

$$\frac{9x + 2}{2 - 3x} \geqq -5$$

genügen. Zur Lösung wird die Ungleichung mit $2 - 3x$ multipliziert. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: $2 - 3x > 0 \left(\leftrightarrow x < \frac{2}{3}\right)$;
dann wird $9x + 2 \geqq -5\,(2 - 3x)$ oder $12 \geqq 6x$ oder $x \leqq 2$; d. h., die Ungleichung gilt für $x < \frac{2}{3}$.

Fall 2: $2 - 3x < 0 \left(\leftrightarrow x > \frac{2}{3}\right)$;

hierfür gilt $9x + 2 \leqq -5\,(2 - 3x)$ oder $12 \leqq 6x$ oder $x \geqq 2$; d. h., die Ungleichung gilt für $x \geqq 2$. Insgesamt gilt die Ungleichung somit für

$$x < \frac{2}{3} \quad \text{und} \quad 2 \leqq x.$$

2. Wenn $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ und $q, s > 0$, so gilt

$$\frac{p}{q} < \frac{p + r}{q + s} < \frac{r}{s}.$$

Wir beweisen die linke Ungleichung. Bei der Durchführung des Beweises beachten wir, daß wir von der Voraussetzung ausgehen und durch schrittweise Folgerungen die Behauptung entwickeln!

Aus $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ und $q, s > 0$ folgt nach Multiplikation beider Seiten mit $q \cdot s$:

$$p \cdot s < q \cdot r$$